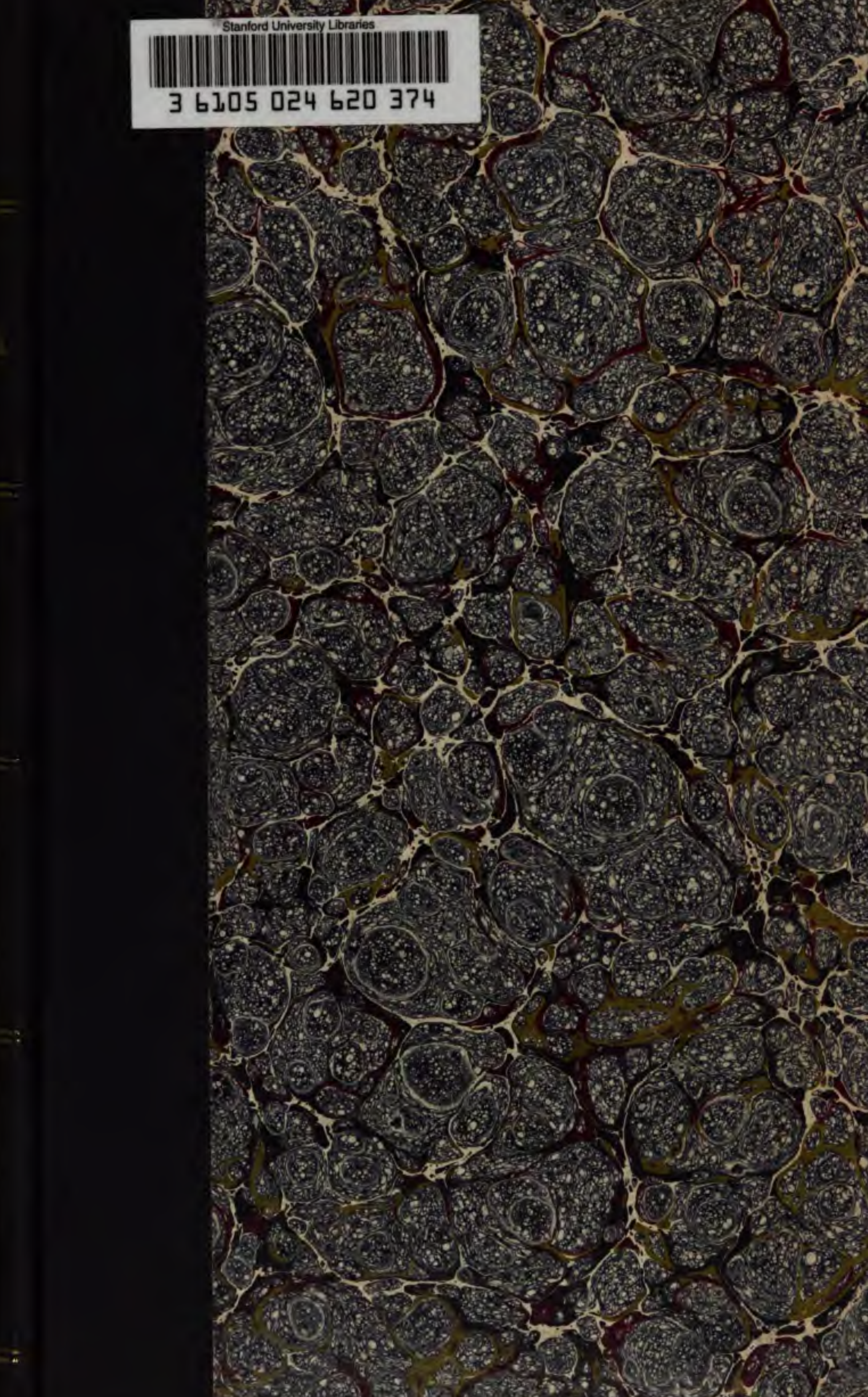




Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Zweiunddreissigster Theil.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1859.

Inhaltsverzeichniss des zweiunddreissigsten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Mechanik.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte *).

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Theorie der loxodromischen Linien auf dem Ellipsoid und auf der Kugel.

Von

Herrn Doctor *W. Plagemann*

zu Wittenburg im Grossherzogthum Mecklenburg-Schwerin.

Vorwort.

Die loxodromische Linie oder die Rhumb-Linie, worunter man die Linie auf der Erdoberfläche versteht, welche alle Meridiane der Erde unter gleichen Winkeln schneidet, ist bekanntlich vorzugsweise für den Seemann von Wichtigkeit. Auf einer solchen Linie legt nämlich das Schiff seinen Weg zurück, so lange es denselben Curs beibehält, und die Lehre von der loxodromischen Linie muss daher allen Schiffsrechnungen, welche sich darauf beziehen, mittelst des Logs und des Kompasses den Ort des Schiffes zu bestimmen, zu Grunde gelegt werden: wenn man nicht, wie es bei der sogenannten Plan-Schifffahrt geschieht, sich mit einer, nicht allgemein ausreichenden, Näherungsrechnung begnügen will, indem man die Oberfläche der Erde als eine Ebene und die gesegelte Distanz als eine grade Linie betrachtet. Während derjenige Theil der Nautik, welcher sich damit beschäftigt, durch Messungen am Himmel den Ort des Schiffes zu bestimmen, oder die sogenannte nautische Astronomie, schon vielfach und zum Theil mit hinreichender Ausführlichkeit behandelt worden ist, hat man demjenigen Theile der Nautik, welcher sich mit jener anderen Art der Ortsbestimmung beschäftigt, bisher verhältnissmässig eine

zu geringe Beachtung geschenkt, und es finden sich in den Schifffahrtslehrbüchern nur einzelne dahin gehörende Aufgaben, welche vorzugsweise auf der See Anwendung finden. Wenn daher überhaupt für die Gelehrten eine wohlbegründete Aufforderung vorhanden ist, diesem sehr wichtigen Theile der Nautik mehr als bisher ihre Kräfte zu widmen, so dürfte diese bei der in der jetzigen Zeit wohl ziemlich allgemein anerkannten Bedeutung, welche die Herstellung einer Flotte für Deutschland hat, besonders den deutschen Mathematikern nahe liegen, und ich glaube daher nicht mit Unrecht bei einem Versuche, die im Allgemeinen hinreichend ausgebildete Theorie der Curven doppelter Krümmung an einer speciellen Curve möglichst vollständig zu erläutern, die loxodromische Linie zum Gegenstande meiner Untersuchung gewählt zu haben.

In der neueren Zeit hat allerdings schon Grunert in seiner „Loxodromischen Trigonometrie, Leipzig, 1849“ die loxodromische Linie, auch mit Rücksicht auf die Abplattung der Erde, einer sorgfältigeren Behandlung unterworfen, er hat aber die Theorie dieser Linien in jener Schrift hauptsächlich nur so weit verfolgt, als es für seine Aufgabe, die Auflösung des sogenannten loxodromischen Dreiecks, erforderlich war. Ich habe es in der vorliegenden Abhandlung versucht, diese Theorie möglichst zu vervollständigen. So lange die Formeln nicht zu complicirt wurden, habe ich auch die Abplattung der Erde in Betracht gezogen; aus den für das Sphäroid gefundenen Formeln habe ich dann, die Abplattung gleich Null setzend, die entsprechenden Formeln für die Kugel abgeleitet, und endlich habe ich in Bezug auf die Kugel die Theorie der loxodromischen Linie in den Theilen ergänzt, in welchen sie mit Rücksicht auf die sphäroidische Gestalt der Erde wegen der erforderlichen Einfachheit der Formeln nicht verfolgt werden durfte.

Erstes Kapitel.

Die loxodromische Linie auf dem Sphäroid.

§. 1.

Denken wir uns die Erde durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden; der Punkt A (Taf. I. Fig. 1.) sei der eine Endpunkt der kleinen Axe oder der Pol der Erde; CBD sei ein Bogen des von der grossen Axe beschriebenen Kreises oder

ein Bogen des Aequators; AMB und AND seien zwei Quadranten der erzeugenden Ellipse oder zwei Quadranten der Meridiane; CMm sei eine auf der Oberfläche der Erde gezogene Curve, welche alle Meridiane unter demselben Winkel schneidet, oder eine loxodromische Linie.

Bezeichnen wir die halbe grosse Axe der beschreibenden Ellipse mit a, die halbe kleine Axe derselben mit b; den Winkel, welchen die Normale des Erdellipsoids in einem Punkte M mit der Ebene des Aequators bildet, oder die geographische Breite eines Punktes M, mit φ; den Winkel, welchen der durch den Punkt M gehende Meridian mit dem als ersten angenommenen Meridiane AC bildet, oder die geographische Länge des Punktes M, mit ψ; den Winkel, unter welchem die loxodromische Linie jeden Meridian schneidet, oder den Winkel CMB, mit Θ; endlich den elliptischen Bogen BM mit σ.

Denken wir uns nun durch M eine mit dem Aequator parallele Ebene gelegt, welche die zwischen den beiden Quadranten AB und AD enthaltene Oberfläche in MN schneidet, so ist der Bogen MN ein Kreisbogen, welchen der Punkt M bei der Drehung der Ellipse beschreibt, und der Halbmesser dieses Bogens ist die Abscisse des Punktes M, wenn man in der Ebene der Ellipse die grosse Axe derselben zur Abscissenaxe und die kleine Axe derselben zur Ordinatenaxe nimmt. Bezeichnen wir daher die Abscisse des Punktes M mit ξ, so können wir setzen:

$$MN = \xi\Delta\psi,$$

wo unter $\Delta\psi$ die Veränderung der Länge ψ verstanden wird. Da nun ferner $DN = BM$ ist, so ist Nm in Bezug auf die loxodromische Linie die zu der Veränderung von ψ gehörige, mit $\Delta\sigma$ zu bezeichnende, Veränderung des Bogens BM, und wir erhalten daher, wenn wir die verschiedenen Veränderungen als unendlich klein, und somit das im Punkte N rechtwinklige Dreieck MNm als ein gradliniges betrachten, für die loxodromische Linie die Gleichung:

$$1)\qquad \xi d\psi = \operatorname{tg}\Theta . d\sigma$$

§. 2.

Bezeichnen wir die Coordinaten unserer Ellipse in Bezug auf die grosse und kleine Axe mit ξ und ζ, so haben wir für dieselbe die Gleichung:

2) $$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\zeta^2}{b^2}=1;$$

da nun φ der Winkel ist, welchen die Normale der Ellipse mit der Axe der ξ macht, so haben wir:

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{d\xi}{d\zeta},$$

und wenn wir den Werth von $\frac{d\xi}{d\zeta}$ aus der Gleichung 2) bestimmen, so erhalten wir hieraus:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a^2\zeta}{b^2\xi}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich aber mit Hülfe der Gleichung 2):

$$\xi=\frac{a^2.\cos\varphi}{\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2}},\quad \zeta=\frac{b^2.\sin\varphi}{\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2}};$$

oder, wenn wir

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2$$

setzen:

$$\xi=\frac{a.\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2.\sin\varphi^2}},\quad \zeta=\frac{b^2.\sin\varphi}{a\sqrt{1-e^2.\sin\varphi^2}}.$$

Hieraus erhalten wir ferner:

$$d\xi=-\frac{b^2}{a}.\frac{\sin\varphi.d\varphi}{(1-e^2.\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}},\quad d\zeta=\frac{b^2}{a}.\frac{\cos\varphi.d\varphi}{(1-e^2.\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}};$$

folglich, da $d\sigma^2=d\xi^2+d\zeta^2$ ist,

$$d\sigma=\frac{a(1-e^2)d\varphi}{(1-e^2.\sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituiren wir die für ξ und $d\sigma$ aufgestellten Werthe in die Gleichung 1), so erhalten wir als Gleichung der loxodromischen Linie:

3) $$d\psi=\operatorname{tg}\Theta\frac{(1-e^2)d\varphi}{\cos\varphi(1-e^2.\sin\varphi^2)}.$$

oder da

$$d\varphi = \frac{d.\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

ist:

3ᵃ) $$d\psi = (1-e^2)\operatorname{tg}\Theta\frac{d.\sin\varphi}{(1-\sin\varphi^2)(1-e^2.\sin\varphi^2)}.$$

Eine andere, nicht ganz so einfache, aber rein analytische Ableitung dieser Gleichung hat Grunert gegeben in seiner Schrift „Loxodromische Trigonometrie", S. 18. ff.

§. 3.

Zerlegen wir, um diese Gleichung zu integriren, den Bruch $\frac{1}{(1-\sin\varphi^2)(1-e^2.\sin\varphi^2)}$ in Partialbrüche, so erhalten wir, indem wir setzen:

$$\frac{1}{(1-\sin\varphi^2)(1-e^2.\sin\varphi^2)} = \frac{M}{1-\sin\varphi^2} + \frac{N}{1-e^2.\sin\varphi^2},$$

die Gleichung:

$$\frac{1}{(1-\sin\varphi^2)(1-e^2.\sin\varphi^2)} = \frac{M+N-(e^2M+N)\sin\varphi^2}{(1-\sin\varphi^2)(1-e^2.\sin\varphi^2)},$$

woraus sich zur Bestimmung von M und N ergiebt:

$$M+N=1,\quad e^2M+N=0;$$

also:

$$M=\frac{1}{1-e^2},\quad N=-\frac{e^2}{1-e^2}.$$

Wir erhalten demnach:

$$\frac{1}{(1-\sin\varphi^2)(1-e^2.\sin\varphi^2)} = \frac{1}{1-e^2}\left\{\frac{1}{1-\sin\varphi^2} - \frac{e^2}{1-e^2.\sin\varphi^2}\right\}.$$

Da ferner

$$\frac{1}{1-\sin\varphi^2} = \frac{1}{2(1-\sin\varphi)} + \frac{1}{2(1+\sin\varphi)},$$

$$\frac{1}{1-e^2.\sin\varphi^2} = \frac{1}{2(1-e.\sin\varphi)} + \frac{1}{2(1+e.\sin\varphi)}$$

ist, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{(1-\sin\varphi^2)(1-e^2.\sin\varphi^2)}$$

$$=\frac{1}{2(1-e^2)}\left\{\frac{1}{1-\sin\varphi}+\frac{1}{1+\sin\varphi}-\frac{e^2}{1-e.\sin\varphi}-\frac{e^2}{1+e.\sin\varphi}\right\}.$$

Da nun nach den Prinzipien der Integralrechnung im Allgemeinen

$$\int\frac{dx}{1\pm ax}=\pm\frac{1}{a}l.(1\pm ax)+C$$

ist, wenn mit C eine willkürliche Constante bezeichnet wird, so erhalten wir für die Integration der Gleichung 3a):

$$\int\frac{d.\sin\varphi}{(1-\sin\varphi^2)(1-e^2.\sin\varphi^2)}$$

$$=\frac{1}{2(1-e^2)}\{l.(1+\sin\varphi)-l.(1-\sin\varphi)-e.l.(1+e\sin\varphi)+e.l.(1-e.\sin\varphi)\}+C$$

$$=\frac{1}{2(1-e^2)}\left\{l.\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}-e.l.\frac{1+e.\sin\varphi}{1-e.\sin\varphi}\right\}+C.$$

Um diese Gleichung weiter umzuformen, können wir setzen:

$$\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}=\frac{1+\cos(90^0-\varphi)}{1-\cos(90^0-\varphi)}=\left\{\frac{\cos(45^0-\frac{1}{2}\varphi)}{\sin(45^0-\frac{1}{2}\varphi)}\right\}^2$$

$$=\cot g(45^0-\tfrac{1}{2}\varphi)^2=\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\varphi)^2,$$

wornach sich ergiebt:

$$\int\frac{d.\sin\varphi}{(1-\sin\varphi^2)(1-e^2.\sin\varphi^2)}$$

$$=\frac{1}{1-e^2}\left\{l.\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\varphi)-\tfrac{1}{2}e l.\frac{1+e.\sin\varphi}{1-e.\sin\varphi}\right\}+C.$$

Wir erhalten daher aus 3a) für die loxodromische Linie die Gleichung

4) $$\psi=\operatorname{tg}\Theta\left\{l.\operatorname{tg}(45^0+\tfrac{1}{2}\varphi)-\tfrac{1}{2}e.l.\frac{1+e.\sin\varphi}{1-e.\sin\varphi}\right\}+C,$$

in welcher Gleichung, wie man leicht sieht, $C=0$ zu setzen ist,

wenn für $\varphi = 0$ auch $\psi = \Theta$ wird, d. h. wenn man die Länge von dem Punkte an rechnet, wo die loxodromische Linie den Aequator schneidet.

Wir können in der Gleichung 4) das zweite in der Klammer enthaltene Glied auch in eine Reihe entwickeln, indem wir nach einer bekannten Formel setzen:

$$\frac{1 + e.\sin\varphi}{1 - e.\sin\varphi} = 2(e.\sin\varphi + \tfrac{1}{3}e^3.\sin\varphi^3 + \tfrac{1}{5}e^5.\sin\varphi^5 + \ldots\ldots);$$

dann erhalten wir statt der Gleichung 4):

4ᵃ)

$$\psi = \mathrm{tg}\,\Theta l.\mathrm{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) - \mathrm{tg}\,\Theta(e^2.\sin\varphi + \tfrac{1}{3}e^4.\sin\varphi^3 + \tfrac{1}{5}e^6.\sin\varphi^5 + \ldots.) + C.$$

§. 4.

Aus den entwickelten Gleichungen ersehen wir, dass die *loxodromische* Linie auf dem Erdellipsoid für $\Theta = 0$ mit dem *Meridian* zusammenfällt, da für diesen Werth von Θ sich $\psi =$ Const. ergiebt. Ferner zeigt die Gleichung 3), dass für $\Theta = 90^\circ$ die Curve ein Parallelkreis des Aequators wird, da für diesen Werth von Θ nach jener Gleichung $d\varphi = 0$, also $\varphi =$ Const. sein muss. Für alle anderen Werthe von Θ wird die Curve vom Aequator aus sich den Polen in unendlichen Windungen immer mehr nähern, ohne dieselben je zu erreichen, denn nach den Gleichungen 4) müsste ψ einen unendlichen Werth bekommen, wenn $\varphi = 90^\circ$ sein sollte.

§. 5.

Um die Gleichungen für die Projectionen der Curve auf drei zu einander rechtwinklige Ebenen zu erhalten, denken wir uns durch den Mittelpunkt des Erdellipsoids als Anfangspunkt ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz gelegt. Die Ebene des Aequators sei die Ebene der xy, und also die Axe des Erdellipsoids die Axe der z; die Axe der x sei der nach dem ersten Meridian, die Axe der y der nach dem neunzigsten Grade der Länge gerichtete Halbmesser des Aequators. Unter diesen Voraussetzungen haben wir für unser Erdellipsoid die Gleichung:

5) $$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

und da die Coordinate z mit der in §. 2. aufgestellten Coordinate

ζ zusammenfällt, in Bezug auf die dort angenommene Coordinate ξ, aber

$$x = \xi.\cos\psi \text{ und } y = \xi.\sin\psi$$

ist, so ergeben sich aus den in §. 2. für ξ und ζ gefundenen Formeln in Bezug auf x, y, z die Gleichungen:

$$6)\quad \begin{cases} x = \dfrac{a^2.\cos\psi.\cos\varphi}{\sqrt{a^2.\cos\varphi^2 + b^2.\sin\varphi^2}} = \dfrac{a.\cos\psi.\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2.\sin\varphi^2}}, \\ y = \dfrac{a^2.\sin\psi.\cos\varphi}{\sqrt{a^2.\cos\varphi^2 + b^2.\sin\varphi^2}} = \dfrac{a.\sin\psi.\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2.\sin\varphi^2}}, \\ z = \dfrac{b^2.\sin\varphi}{\sqrt{a^2.\cos\varphi^2 + b^2.\sin\varphi^2}} = \dfrac{a(1-e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2.\sin\varphi^2}}. \end{cases}$$

Wir haben demnach:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{y}{x}, \text{ also } \psi = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{y}{x},$$

ferner:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2.\cos\varphi^2}{1-e^2.\sin\varphi^2},$$

woraus sich ergiebt:

$$\sin\varphi = \pm\frac{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}{\sqrt{a^2-e^2(x^2+y^2)}},$$

wo das positive oder negative Vorzeichen zu nehmen ist, jenachdem φ positiv oder negativ ist, d. h. jenachdem der Punkt, auf welchen sich die Breite φ bezieht, auf der positiven oder negativen Hälfte der Oberfläche des Erdellipsoids liegt.

Substituiren wir die für ψ und $\sin\varphi$ gefundenen Werthe in die Gleichung 4), so erhalten wir, da $l.\operatorname{tg}(45^0+\frac{1}{2}\varphi) = \frac{1}{2}l.\dfrac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$ ist, für die Projection des sich auf der positiven Hälfte des Erdellipsoids befindlichen Theils der loxodromischen Linie auf der Ebene der xy die Gleichung:

$$7)\quad \operatorname{cotg}\Theta.\operatorname{Arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}l.\frac{\sqrt{a^2-e^2(x^2+y^2)}+\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}{\sqrt{a^2-e^2(x^2+y^2)}-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}$$
$$-\frac{1}{2}e.l.\frac{\sqrt{a^2-e^2(x^2+y^2)}+e\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}{\sqrt{a^2-e^2(x^2+y^2)}-e\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}},$$

und für die Projection des sich auf der negativen Hälfte des Erdellipsoids befindlichen Theils auf derselben Ebene erhalten wir die Gleichung:

$$7^a)\quad \cotg\Theta.\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}=\tfrac{1}{2}l.\frac{\sqrt{a^2-e^2(x^2+y^2)}-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}{\sqrt{a^2-e^2(x^2+y^2)}+\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}$$
$$-\tfrac{1}{2}e.l.\frac{\sqrt{a^2-e^2(x^2+y^2)}-e\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}{\sqrt{a^2-e^2(x^2+y^2)}+e\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}},$$

wenn wir die Constante C gleich Null setzen, indem wir annehmen, dass der erste Meridian durch denjenigen Punkt des Aequators geht, in welchem die loxodromische Linie den Aequator schneidet.

Da sich ferner aus den für $\mathrm{tg}\,\psi$ und $\sin\varphi$ aufgestellten Ausdrücken mit Hülfe der Gleichung 5) ergiebt, dass

$$\cos\psi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{bx}{a\sqrt{b^2-z^2}},$$

$$\sin\psi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{by}{a\sqrt{b^2-z^2}},$$

$$\sin\varphi=\frac{z}{\sqrt{b^2(1-e^2)+e^2z^2}}$$

ist, so erhalten wir für die Projectionen der loxodromischen Linie auf die Ebenen der xz und yz die beiden Gleichungen:

8)

$$\cotg\Theta.\mathrm{Arc}.\cos\frac{bx}{a\sqrt{b^2-z^2}}$$
$$=\tfrac{1}{2}l.\frac{\sqrt{b^2(1-e^2)+e^2z^2}+z}{\sqrt{b^2(1-e^2)+e^2z^2}-z}-\tfrac{1}{2}el.\frac{\sqrt{b^2(1-e^2)+e^2z^2}+ez}{\sqrt{b^2(1-e^2)+e^2z^2}-ez},$$

$$\cotg\Theta.\mathrm{Arc}.\sin\frac{by}{a\sqrt{b^2-z^2}}$$
$$=\tfrac{1}{2}l.\frac{\sqrt{b^2(1-e^2)+e^2z^2}+z}{\sqrt{b^2(1-e^2)+e^2z^2}-z}-\tfrac{1}{2}e.l.\frac{\sqrt{b^2(1-e^2)+e^2z^2}+ez}{\sqrt{b^2(1-e^2)+e^2z^2}-ez}.$$

§. 6.

Denken wir uns auf einer Curve im Raume zwei Punkte, deren Coordinaten in Bezug auf die Axen der x, der y und der z wir respective durch u, v, w und $u+\Delta u$, $v+\Delta v$, $w+\Delta w$ bezeichnen wollen, durch eine Sehne verbunden, so sind die Gleichungen der Projectionen dieser Sehne auf die Ebenen der xz und yz offenbar:

$$x-u=\frac{\Delta u}{\Delta w}(z-w), \quad y-v=\frac{\Delta v}{\Delta w}(z-w).$$

Rückt nun der zweite Punkt dem ersten unendlich nahe, so nähert sich die Sehne immer mehr einer bestimmten Lage, welche die der Tangente der Curve im Punkte (u, v, w) ist. Zu gleicher Zeit nähern sich aber die Projectionen des zweiten Punktes den Projectionen des ersten auf denselben Ebenen, und die Projectionen der Sehne nähern sich bestimmten Lagen, welche die der Tangenten der Projectionslinien sind. Folglich sind die Tangenten der Projectionslinien die Projectionen von der Tangente der gegebenen Curve, und da nach dem eben Erörterten die Tangenten der Projectionslinien durch die beiden obigen Gleichungen bestimmt werden, wenn in denselben du, dv, dw respective für Δu, Δv, Δw gesetzt werden, so haben wir auch für die Tangente der Curve im Raume das System der beiden Gleichungen:

$$x-u=\frac{du}{dw}(z-w), \quad y-v=\frac{dv}{dw}(z-w);$$

wo $\frac{du}{dw}$ und $\frac{dv}{dw}$ die Werthe der aus den Gleichungen der Curve entwickelten Differentialquotienten $\frac{dx}{dz}$ und $\frac{dy}{dz}$ für $x=u$, $y=v$ und $z=w$ sind.

Um also die Gleichungen für die Tangente der loxodromischen Linie in einem Punkte (u, v, w) zu finden, müssen wir die Ausdrücke für die Differentialquotienten $\frac{dx}{dz}$ und $\frac{dy}{dz}$ in Bezug auf die loxodromische Linie herleiten. Wir erhalten aus den Gleichungen 6), wenn wir die Grössen x, y, z in Bezug auf ψ als unabhängige Variable differenziren:

$$\frac{dx}{d\psi} = -a^2 \frac{\sin\psi.\cos\varphi(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)+b^2.\cos\psi\sin\varphi.\frac{d\varphi}{d\psi}}{(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2}},$$

$$\frac{dy}{d\psi} = a^2.\frac{\cos\psi.\cos\varphi(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)-b^2.\sin\psi.\sin\varphi.\frac{d\varphi}{d\psi}}{(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2}};$$

$$\frac{dz}{d\psi} = \frac{a^2b^2.\cos\varphi}{(a^2.\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2)\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2}}.\frac{d\varphi}{d\psi},$$

und da nach den Principien der Differentialrechnung

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{d\psi}:\frac{dz}{d\psi},\quad \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{d\psi}:\frac{dz}{d\psi}$$

ist, so ergiebt sich:

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\sin\psi.\cos\varphi(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)+b^2.\cos\psi.\sin\varphi.\frac{d\varphi}{d\psi}}{b^2.\cos\varphi\frac{d\varphi}{d\psi}},$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\cos\psi.\cos\varphi(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)-b^2.\sin\psi.\sin\varphi.\frac{d\varphi}{d\psi}}{b^2.\cos\varphi.\frac{d\varphi}{d\psi}};$$

da nun ferner für die loxodromische Linie nach Gleichung 3)

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{\cos\varphi(a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2)}{b^2.\operatorname{tg}\Theta}$$

ist, so erhalten wir für die gesuchten Differentialquotienten in Bezug auf diese Linie die Formeln:

9)

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\sin\psi+\operatorname{cotg}\Theta.\cos\psi.\sin\varphi}{\operatorname{cotg}\Theta.\cos\varphi} = -\frac{\operatorname{tg}\Theta.\sin\psi+\cos\psi.\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\cos\psi-\operatorname{cotg}\Theta.\sin\psi.\sin\varphi}{\operatorname{cotg}\Theta.\cos\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\Theta.\cos\psi-\sin\psi.\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Wenn wir daher, die geographische Breite des Punktes (u, v, w) mit φ und die Länge desselben mit ψ bezeichnend, die Coordinaten u, v, w vermöge der Gleichungen 6) und die Differential-

quotienten $\frac{du}{dw}$ und $\frac{dv}{dw}$ vermöge der Gleichungen 9) durch φ und ψ ausdrücken, und die erhaltenen Ausdrücke in die oben gefundenen allgemeinen Gleichungen der Tangente substituiren, so ergeben sich für die Tangente der loxodromischen Linie im Punkte (u, v, w) die Gleichungen:

10)

$$x - \frac{a.\cos\psi.\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2.\sin\varphi^2}} = -\frac{\mathrm{tg}\,\Theta\sin\psi+\cos\psi.\sin\varphi}{\cos\varphi}\left\{z-\frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2.\sin\varphi^2}}\right\},$$

$$y - \frac{a.\sin\psi.\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2.\sin\varphi^2}} = \frac{\mathrm{tg}\,\Theta\cos\psi-\sin\psi.\sin\varphi}{\cos\varphi}\left\{z-\frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2.\sin\varphi^2}}\right\}.$$

Wollen wir die Gleichungen der Tangente nicht durch die geographische Breite und Länge des Punktes (u, v, w), sondern durch die Coordinaten u, v, w selbst ausdrücken, so erhalten wir, da nach §. 5.

$$\sin\psi = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \cos\psi = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}};$$

$$\sin\varphi = \frac{a^2w}{\sqrt{b^4(u^2+v^2)+a^4w^2}},\quad \cos\varphi = \frac{b^2\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{b^4(u^2+v^2)+a^4w^2}}$$

ist, nach den Gleichungen 9):

$$\frac{du}{dw} = -\frac{\mathrm{tg}\,\Theta\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}.\frac{a^2w}{\sqrt{b^4(u^2+v^2)+a^4w^2}}}{\frac{b^2\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{b^4(u^2+v^2)+a^4w^2}}}$$

$$= -\frac{\mathrm{tg}\,\Theta.v\sqrt{b^4(u^2+v^2)+a^4w^2}+a^2uw}{b^2(u^2+v^2)};$$

und ebenso bekommen wir:

$$\frac{dv}{dw} = \frac{\mathrm{tg}u.\sqrt{b^4(u^2+v^2)+a^4w^2}-a^2vw}{b^2(u^2+v^2)};$$

wir haben daher für die Tangente der loxodromischen Linie im Punkte (u, v, w) auch die beiden Gleichungen:

11)

$$x-u=-\frac{\operatorname{tg}\Theta.v\sqrt{b^4(u^2+v^2)+a^4w^2}+a^2uw}{b^2(u^2+v^2)}(z-w),$$

$$y-v=\frac{\operatorname{tg}\Theta.u\sqrt{b^4(u^2+v^2)+a^4w^2}-a^2vw}{b^2(u^2+v^2)}(z-w).$$

§. 7.

Die Sehne, welche zwei Punkte

(u, v, w) und $(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)$

einer Curve im Raume verbindet, bildet mit den durch den Punkt (u, v, w) zu den positiven Axen der x, der y und der z gezogenen Parallelen Winkel, deren Cosinus offenbar respective ausgedrückt werden durch:

$$\frac{\pm\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2+\Delta w^2}},\quad \frac{\pm\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2+\Delta w^2}},\quad \frac{\pm\Delta w}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2+\Delta w^2}};$$

wo die doppelten Vorzeichen sich auf die beiden einander entgegengesetzten Richtungen beziehen, nach denen man sich die Sehne gezogen denken kann.

Gehen wir daher wieder zur Grenze über, indem wir den zweiten Punkt sich dem ersten unendlich nahe rücken lassen, so erhalten wir für die Winkel, welche die Tangente im Punkte (u, v, w) mit der Axe der x, der y, und der z bildet, wenn wir diese Winkel respective mit α, β und γ bezeichnen, die allgemeinen Gleichungen:

$$\cos\alpha=\frac{\pm du}{\sqrt{du^2+dv^2+dw^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{\pm dv}{\sqrt{du^2+dv^2+dw^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\pm dw}{\sqrt{du^2+dv^2+dw^2}};$$

wo du, dv, dw respective die Werthe der Differentiale dx, dy, dz sind, welche man aus den Gleichungen der Curve abgeleitet denkt, indem man x, y, z als Functionen derselben unabhängigen Veränderlichen betrachtet. Sieht man z als die unabhängige Veränderliche an, so kann man statt der erhaltenen Gleichungen schreiben:

$$\cos\alpha = \frac{\pm\frac{du}{dw}}{\sqrt{1+\left(\frac{du}{dw}\right)^2+\left(\frac{dv}{dw}\right)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\pm\frac{dv}{dw}}{\sqrt{1+\left(\frac{du}{dw}\right)^2+\left(\frac{dv}{dw}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\left(\frac{du}{dw}\right)^2+\left(\frac{dv}{dw}\right)^2}}.$$

Für die loxodromische Linie ist nun nach den Formeln 9):

$$\sqrt{1+\left(\frac{du}{dw}\right)^2+\left(\frac{dv}{dw}\right)^2} = \frac{\sec\Theta}{\cos\varphi},$$

und wir erhalten daher für dieselbe:

$$12) \quad \begin{cases} \cos\alpha = \mp(\sin\Theta\sin\psi + \cos\Theta\cos\psi\sin\varphi), \\ \cos\beta = \pm(\sin\Theta\cos\psi - \cos\Theta\sin\psi\sin\varphi), \\ \cos\gamma = \pm\cos\Theta\cos\varphi; \end{cases}$$

oder, wenn wir für $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ die in §. 6. aufgestellten Ausdrücke setzen:

12a)

$$\cos\alpha = \mp\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\{\sin\Theta . v + a^2 . \cos\Theta\frac{uw}{\sqrt{b^4(u^2+v^2)+a^4w^2}}\},$$

$$\cos\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\{\sin\Theta . u - a^2 . \cos\Theta\frac{vw}{\sqrt{b^4(u^2+v^2)+a^4w^2}}\},$$

$$\cos\gamma = \pm b^2 . \cos\Theta\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{b^4(u^2+v^2)+a^4w^2}}.$$

§. 8.

Mit Hülfe der Formeln 9) sind wir auch im Stande, die Formeln für die Rectification der loxodromischen Linie abzuleiten. Da die Länge des Bogens einer Curve von doppelter Krümmung die Grenze ist, welcher sich die Länge eines in den Curvenbogen

beschriebenen windschiefen Polygonstücks ohne Ende nähert, wenn die Anzahl der Seiten desselben unendlich wächst, und jede Seite unendlich abnimmt; so haben wir, wenn wir die Länge des Bogens einer Curve von doppelter Krümmung von einem willkürlichen Punkte aus mit s bezeichnen:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dz\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}.$$

Für die loxodromische Linie haben wir nun nach den Formeln 9):

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} = \frac{\sec\Theta}{\cos\varphi},$$

und wir erhalten daher:

$$ds = \frac{dz}{\cos\Theta . \cos\varphi}.$$

Da sich aus der dritten der Gleichungen 6) durch Differenzirung ergiebt:

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{a^2b^2\cos\varphi}{(a^2 . \cos\varphi^2 + b^2 . \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

so können wir statt der gefundenen Gleichung auch schreiben:

$$ds = \frac{a^2b^2 d\varphi}{\cos\Theta(a^2 . \cos\varphi^2 + b^2 . \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder, wenn wir wieder

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$$

setzen:

13) $$ds = \frac{a(1 - e^2)d\varphi}{\cos\Theta(1 - e^2 . \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für s selbst erhält man hieraus keinen geschlossenen Ausdruck, da das Integral

$$\int \frac{d\varphi}{(1 - e^2 . \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

zu den sogenannten elliptischen Functionen gehört. Man kann aber den Werth dieses Integrals annähernd bestimmen, indem man die zu integrirende Function in eine unendliche Reihe entwickelt. Nach dem binomischen Lehrsatz ist nämlich:

$$\frac{1}{(1-e^2.\sin\varphi^2)^{\frac{1}{2}}}=1+\tfrac{1}{2}e^2.\sin\varphi^2+\frac{3.5}{2.4}e^4.\sin\varphi^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}e^6.\sin\varphi^6+\ldots,$$

und man erhält daher:

$$\int\frac{d\varphi}{(1-e^2.\sin\varphi^2)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$\int d\varphi+\tfrac{1}{2}e^2\int\sin\varphi^2.d\varphi+\frac{3.5}{2.4}e^4\int\sin\varphi^4.d\varphi+\frac{3.5.7}{2.4.6}e^6\int\sin\varphi^6.d\varphi+\ldots.$$

Nach einer bekannten Reductionsformel der Integralrechnung ist nun allgemein:

$$\int\sin\varphi^{2n}.d\varphi=-\frac{\sin\varphi^{2n-1}.\cos\varphi}{2n}+\frac{2n-1}{2n}\int\sin\varphi^{2n-2}d\varphi,$$

und vermittelst dieser Formel kann man leicht alle Integrale auf der rechten Seite der gefundenen Gleichung nach einander berechnen.

Es ist nämlich erstlich, wie bekannt:

$$\int d\varphi=\varphi+\text{Const},$$

folglich mit Rücksicht auf die aufgestellte Reductionsformel:

$$\int\sin\varphi^2.d\varphi=-\tfrac{1}{2}\sin\varphi.\cos\varphi+\tfrac{1}{2}\varphi+\text{Const},$$

$$\int\sin\varphi^4.d\varphi=-\tfrac{1}{4}\sin\varphi^3.\cos\varphi-\frac{1.3}{2.4}\sin\varphi.\cos\varphi+\frac{1.3}{2.4}\varphi+\text{Const.},$$

$$\int\sin\varphi^6.d\varphi=-\tfrac{1}{6}\sin\varphi^5.\cos\varphi-\frac{1.5}{4.6}\sin\varphi^3.\cos\varphi-\frac{1.3.5}{2.4.6}\sin\varphi.\cos\varphi$$

$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi+\text{Const.},$$

und so lassen sich auch alle übrigen Integrale auf der rechten Seite unserer Gleichung nach einander berechnen.

Will man die Grenze für die ganze Länge der loxodromischen Linie auf der einen Hälfte der Erde, etwa auf der positiven Seite des Aequators haben, so muss man die einzelnen Integrale zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ nehmen; dann erhält man, da, für $\varphi=0$, $\sin\varphi=0$, und, für $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi=0$ wird:

$$s=\frac{a(1-e^2)}{\cos\Theta}\cdot\frac{\pi}{2}\{1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}e^2+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{1.3}{2.4}e^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}e^6+....\}$$

$$=\frac{a(1-e^2)}{\cos\Theta}\cdot\frac{\pi}{2}\{1+\frac{3}{2^2}e^2+\frac{3^2.5}{2^2.4^2}e^4+\frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}e^6+....\}$$

$$=\frac{a\pi}{2\cos\Theta}\{1+\left(\frac{3}{2^2}-1\right)e^2+\left(\frac{3^2.5}{2^2.4^2}-\frac{3}{2^2}\right)e^4+\left(\frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}-\frac{3^2.5}{2^2.4^2}\right)e^6$$

$$+\left(\frac{3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2}-\frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}\right)e^8+....\}$$

$$=\frac{a\pi}{2.\cos\Theta}\{1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{1.3}{2^2.4^2}e^4-\frac{1.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}e^6-\frac{1.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}e^8-....\}.$$

Denselben Ausdruck würde man auch für die Länge der loxodromischen Linie zwischen den Grenzen 0 und $-\frac{\pi}{2}$ erhalten, und da sich das eine Ende der loxodromischen Linie dem positiven Pol, das andere Ende dem negativen Pol ohne Ende nähert, so nähert sich die Länge der ganzen loxodromischen Linie auf dem Erdsphäroid dem Werthe:

$$\frac{a\pi}{\cos\Theta}\{1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{1.3}{2^2.4^2}e^4-\frac{1.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}e^6-\frac{1.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}e^8-....\},$$

wenn unter π die Ludolphsche Zahl verstanden wird.

§. 9.

Die loxodromische Linie hat offenbar als eine Curve doppelter Krümmung in jedem Punkte unendlich viele Normalen; alle diese Normalen liegen aber in einer und derselben Ebene, welche man die Normalebene nennt. Da die Normalebene in einem Punkte (u, v, w) auf der Tangente in diesem Punkte senkrecht steht, so ist die allgemeine Gleichung derselben:

$$z-w+\frac{dv}{dw}(y-v)+\frac{du}{dw}(x-u)=0,$$

und wir erhalten daher für die loxodromische Linie aus den in §. 6. gefundenen Werthen von $\frac{dx}{dz}$ und $\frac{dy}{dz}$ als Gleichung der Normalebene im Punkte (u, v, w):

$$\left.\begin{array}{l} z-\dfrac{b^2\sin\varphi}{\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2}} \\ +\dfrac{\operatorname{tg}\Theta.\cos\psi-\sin\psi.\sin\varphi}{\cos\varphi}\left(y-\dfrac{a^2.\sin\psi.\cos\varphi}{\sqrt{a.\cos\varphi^2+b^2\ \sin\varphi^2}}\right) \\ -\dfrac{\operatorname{tg}\Theta.\sin\psi+\cos\psi.\sin\varphi}{\cos\varphi}\left(x-\dfrac{a^2.\cos\psi.\cos\varphi}{\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2}}\right) \end{array}\right\}=0,$$

wofür wir auch schreiben können:

14)

$$z+\frac{\operatorname{tg}\Theta.\cos\psi-\sin\psi.\sin\varphi}{\cos\varphi}y-\frac{\operatorname{tg}\Theta.\sin\psi+\cos\psi.\sin\varphi}{\cos\varphi}x$$
$$+\frac{e^2.\sin\varphi}{\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2}}=0.$$

Da das constante Glied dieser Gleichung nur verschwindet, wenn $\sin\varphi=0$ ist, so erhellt, dass die Normalebene der loxodromischen Linie, wenn die Abplattung der Erde berücksichtigt wird, nur für denjenigen Punkt, in welchem die Curve den Aequator schneidet, durch den Mittelpunkt des Ellipsoids geht.

§. 10.

Die Ebene, welche durch einen Punkt (u, v, w) einer Curve doppelter Krümmung so gelegt wird, dass sie ausser durch diesen Punkt noch durch zwei dem Punkte (u, v, w) unendlich nahe liegende Punkte der Curve geht, nennt man bekanntlich die Osculationsebene oder Krümmungsebene der Curve im Punkte (u, v, w). Die Gleichung der Krümmungsebene im Punkte (u, v, w) ist offenbar von der Form:

(a) $$X(x-u)+Y(y-v)+Z(z-w)=0,$$

wo X, Y, Z noch unbekannte und zu bestimmende Coëfficienten sind. Diese Gleichung muss auch stattfinden, wenn man darin $u+du$, $v+dv$, $w+dw$ respective für u, v, w setzt, und man erhält daher, wenn man von der so sich ergebenden Gleichung die Gleichung (a) subtrahirt:

(a') $$Xdu+Ydv+Zdw=0.$$

Da diese beiden Gleichungen nun noch stattfinden müssen, wenn man darin für

$$u,\ v,\ w;\ du,\ dv,\ dw$$

respective setzt:

$$u+du,\ v+dv,\ w+dw;\ du+d^2u,\ dv+d^2v,\ dw+d^2w;$$

so erhält man für die Bestimmung der Coëfficienten X, Y, Z noch die dritte Gleichung:

$$(a'') \qquad Xd^2u+Yd^2v+Zd^2w=0.$$

Wenn man die drei Gleichungen (a), (a') und (a'') so mit einander verbindet, dass zwei der drei Unbekannten X, Y, Z eliminirt werden, so verschwindet die dritte zu gleicher Zeit, und man erhält für die Gleichung der Krümmungsebene:

$$(dv.d^2w-dw.d^2v)(x-u)$$
$$+(dw.d^2u-du.d^2w)(y-v)+(du.d^2v-dv.d^2u)(z-w)=0,$$

so dass in der obigen Gleichung

$$X=dv.d^2w-dw.d^2v,\ Y=dw.d^2u-du.d^2w,\ Z=du.d^2v-dv.d^2u$$

wird.

Wenn wir, wie wir es bisher in Bezug auf die loxodromische Linie gethan haben, z als die unabhängige Variable betrachten, so wird $d^2w=0$; ausserdem haben wir für jene Linie nach den Formeln 9):

$$dx=-\frac{\operatorname{tg}\Theta.\sin\psi}{\cos\varphi}dz-\operatorname{tg}\varphi.\cos\psi\,dz,$$

$$dy=\frac{\operatorname{tg}\Theta.\cos\psi}{\cos\varphi}dz-\operatorname{tg}\varphi.\sin\psi\,dz;$$

und da nach §. 5.:

$$\sin\overline{\omega}=\frac{z}{\sqrt{b^2(1-e^2)+e^2z^2}},$$

also

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{1-e^2}\sqrt{b^2-z^2}}{\sqrt{b^2(1-e^2)+e^2z^2}},$$

oder, wenn wir

$$\frac{a^2-b^2}{b^2}=\varepsilon^2$$

setzen, so dass auch

$$\frac{e^2}{1-e^2}=\varepsilon^2$$

wird,

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{b^2-z^2}}{\sqrt{b^2+\varepsilon^2 z^2}},$$

und ferner

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{z}{\sqrt{1-e^2}\sqrt{b^2-z^2}}=\frac{az}{b\sqrt{b^2-z^2}}$$

ist, so erhalten wir, wenn wir diese Werthe für $\cos\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi$ in die obigen Gleichungen einsetzen:

$$dx=-\operatorname{tg}\Theta\frac{\sqrt{b^2+\varepsilon^2 z^2}}{\sqrt{b^2-z^2}}dz.\sin\psi-\frac{azdz}{b\sqrt{b^2-z^2}}\cos\psi,$$

$$dy=\quad\operatorname{tg}\Theta\frac{\sqrt{b^2+\varepsilon^2 z^2}}{\sqrt{b^2-z^2}}dz.\cos\psi-\frac{azdz}{b\sqrt{b^2-z^2}}\sin\psi.$$

Ferner erhalten wir hieraus für die zweiten Differentialien:

$$d^2x=-\frac{\operatorname{tg}\Theta.z\sqrt{b^2+\varepsilon^2z^2}.dz^2.\sin\psi}{\sqrt{(b^2-z^2)^3}}-\frac{\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2zdz^2.\sin\psi}{\sqrt{b^2-z^2}\sqrt{b^2+\varepsilon^2z^2}}$$

$$-\frac{\operatorname{tg}\Theta\sqrt{b^2+\varepsilon^2z^2}.dz.d\psi.\cos\psi}{\sqrt{b^2-z^2}}$$

$$-\frac{a.dz^2.\cos\psi}{b\sqrt{b^2-z^2}}-\frac{az^2dz^2\cos\psi}{b\sqrt{(b^2-z^2)^3}}+\frac{azdzd\psi\sin\psi}{b\sqrt{b^2-z^2}};$$

nach §. 6. ist aber:

$$\frac{dz}{d\psi}=\frac{a^2.\cos\varphi^2}{\operatorname{tg}\Theta\sqrt{a^2.\cos\varphi^2+b^2.\sin\varphi^2}},$$

woraus sich nach den Formeln 6) ergiebt:

$$\frac{dz}{d\psi}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}.\cos\varphi}{\operatorname{tg}\Theta},$$

oder da

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}$$

und

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{b^2-z^2}}{\sqrt{b^2+\varepsilon^2z^2}}$$

ist:

$$\frac{dz}{d\psi}=\frac{a(b^2-z^2)}{b\operatorname{tg}\Theta\sqrt{b^2+\varepsilon^2z^2}};$$

es ist also:

$$d\psi=\frac{b.\operatorname{tg}\Theta\sqrt{b^2+\varepsilon^2z^2}.dz}{a(b^2-z^2)},$$

und wenn wir diesen Werth von $d\psi$ in den für d^2x gefundenen Ausdruck einsetzen, so erhalten wir:

$$d^2x=-\frac{\operatorname{tg}\Theta.z\sqrt{b^2+\varepsilon^2z^2}.dz^2.\sin\psi}{\sqrt{(b^2-z^2)^3}}-\frac{\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2zdz^2.\sin\psi}{\sqrt{b^2-z^2}\sqrt{b^2+\varepsilon^2z^2}}$$
$$-\frac{b\operatorname{tg}\Theta^2(b^2+\varepsilon^2z^2)dz^2.\cos\psi}{a\sqrt{(b^2-z^2)^3}}$$
$$-\frac{a(b^2-z^2)dz^2.\cos\psi}{b\sqrt{(b^2-z^2)^3}}-\frac{az^2.dz^2.\cos\psi}{b\sqrt{(b^2-z^2)^3}}$$
$$-\frac{\operatorname{tg}\Theta.z\sqrt{b^2+\varepsilon^2z^2}.dz^2.\sin\psi}{\sqrt{(b^2-z^2)^3}},$$

oder:

$$d^2x=-\frac{\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2zdz^2.\sin\psi}{\sqrt{b^2-z^2}\sqrt{b^2+\varepsilon^2z^2}}-\frac{b.\operatorname{tg}\Theta^2(b^2+\varepsilon^2z^2)dz^2.\cos\psi}{a\sqrt{(b^2-z^2)^3}}$$
$$-\frac{abdz^2.\cos\psi}{\sqrt{(b^2-z^2)^3}};$$

ebenso erhalten wir:

$$d^2y=\frac{\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2zdz^2.\cos\psi}{\sqrt{b^2-z^2}\sqrt{b^2+\varepsilon^2z^2}}-\frac{b\operatorname{tg}\Theta^2(b^2+\varepsilon^2z^2)dz^2.\sin\psi}{a\sqrt{(b^2-z^2)^3}}$$
$$-\frac{abdz^2.\sin\psi}{\sqrt{(b^2-z^2)^3}}.$$

Da ausserdem nach unserer Voraussetzung $d^3 z = 0$ ist, so erhalten wir, wenn die dem Punkte (u, v, w) entsprechende Länge mit ψ bezeichnet wird:

$$X = \left\{ ab.\sin\psi + \frac{b}{a}\operatorname{tg}\Theta^2(b^2+\varepsilon^2 w^2)\sin\psi - \frac{\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2 w(b^2-w^2)}{\sqrt{b^2+\varepsilon^2 w^2}}\cos\psi \right\} \frac{dw^3}{\sqrt{(b^2-w^2)^3}},$$

$$Y = -\left\{ ab\cos\psi + \frac{b}{a}\operatorname{tg}\Theta^2(b^2+\varepsilon^2 w^2)\cos\psi + \frac{\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2 w(b^2-w^2)}{\sqrt{b^2+\varepsilon^2 w^2}}\sin\psi \right\} \frac{dw^3}{\sqrt{(b^2-w^2)^3}},$$

$$Z = \left\{ \frac{b.\operatorname{tg}\Theta^3\sqrt{(b^2+\varepsilon^2 w^2)^3}}{a\sqrt{b^2-w^2}} + \frac{ab\operatorname{tg}\Theta\sqrt{b^2+\varepsilon^2 w^2}}{\sqrt{b^2-w^2}} - \frac{a\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2 w^2\sqrt{b^2-w^2}}{b\sqrt{b^2+\varepsilon^2 w^2}} \right\} \frac{dw^3}{\sqrt{(b^2-w^2)^3}}$$

$$= \operatorname{tg}\Theta \left\{ \frac{b\sqrt{b^2+\varepsilon^2 w^2}[a^2+\operatorname{tg}\Theta^2(b^2+\varepsilon^2 w^2)]}{a\sqrt{b^2-w^2}} - \frac{a\varepsilon^2 w^2\sqrt{b^2-w^2}}{b\sqrt{b^2+\varepsilon^2 w^2}} \right\} \frac{dw^3}{\sqrt{(b^2-w^2)^3}};$$

und wir erhalten daher als Gleichung der Osculationsebene im Punkte (u, v, w):

$$\left.\begin{aligned} &\left\{ \frac{b[a^2+\operatorname{tg}\Theta^2(b^2+\varepsilon^2 w^2)]}{a}\sin\psi - \frac{\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2 w(b^2-w^2)}{\sqrt{b^2+\varepsilon^2 w^2}}\cos\psi \right\}(x-u) \\ &-\left\{ \frac{b[a^2+\operatorname{tg}\Theta^2(b^2+\varepsilon^2 w^2)]}{a}\cos\psi + \frac{\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2 w(b^2-w^2)}{\sqrt{b^2+\varepsilon^2 w^2}}\sin\psi \right\}(y-v) \\ &+\operatorname{tg}\Theta \left\{ \frac{b\sqrt{b^2+\varepsilon^2 w^2}[a^2+\operatorname{tg}\Theta^2(b^2+\varepsilon^2 w^2)]}{a\sqrt{b^2-w^2}} - \frac{a\varepsilon^2 w^2\sqrt{b^2-w^2}}{b\sqrt{b^2+\varepsilon^2 w^2}} \right\}(z-w) \end{aligned}\right\} = 0;$$

da nun

$$u = \sqrt{u^2 + v^2}.\cos\psi = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - w^2}.\cos\psi,$$

$$v = \sqrt{u^2 + v^2}.\sin\psi = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - w^2}.\sin\psi$$

ist, so können wir statt der gefundenen Gleichung auch schreiben:

$$\left\{\frac{b[a^2 + \operatorname{tg}\Theta^2(b^2 + \varepsilon^2 w^2)]}{a}\sin\psi - \frac{\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2 w(b^2 - w^2)}{\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 w^2}}\cos\psi\right\} x$$

$$- \left\{\frac{b[a^2 + \operatorname{tg}\Theta^2(b^2 + \varepsilon^2 w^2)]}{a}\cos\psi + \frac{\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2 w(b^2 - w^2)}{\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 w^2}}\sin\psi\right\} y$$

$$+ \operatorname{tg}\Theta\left\{\frac{b\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 w^2}[a^2 + \operatorname{tg}\Theta^2(b^2 + \varepsilon^2 w^2)]}{a\sqrt{b^2 - w^2}} - \frac{a\varepsilon^2 w^2\sqrt{b^2 - w^2}}{b\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 w^2}}\right\}(z - w)$$

$$+ \frac{a.\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2 w\sqrt{(b^2 - w^2)^3}}{b\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 w^2}} = 0,$$

oder da

$$\frac{a.\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2 w^3\sqrt{b^2 - w^2}}{b\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 w^2}} + \frac{a\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2 w\sqrt{(b^2 - w^2)^3}}{b\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 w^2}} = \frac{ab\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2 w\sqrt{b^2 - w^2}}{\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 w^2}}$$

ist, so erhalten wir endlich für die Osculationsebene im Punkte (u, v, w) die Gleichung:

15)

$$\left\{\frac{b[a^2 + \operatorname{tg}\Theta^2(b^2 + \varepsilon^2 w^2)]}{a}\sin\psi - \frac{\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2 w(b^2 - w^2)}{\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 w^2}}\cos\psi\right\} x$$

$$- \left\{\frac{b[a^2 + \operatorname{tg}\Theta^2(b^2 + \varepsilon^2 w^2)]}{a}\cos\psi + \frac{\operatorname{tg}\Theta.\varepsilon^2 w(b^2 - w^2)}{\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 w^2}}\sin\psi\right\} y$$

$$+ \operatorname{tg}\Theta\left\{\frac{b\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 w^2}[a^2 + \operatorname{tg}\Theta^2(b^2 + \varepsilon^2 w^2)]}{a\sqrt{b^2 - w^2}} - \frac{a\varepsilon^2 w^2\sqrt{b^2 - w^2}}{b\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 w^2}}\right\} z$$

$$= \frac{b.\operatorname{tg}\Theta.w\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 w^2}}{\sqrt{b^2 - w^2}}\left\{\frac{a^2 + \operatorname{tg}\Theta^2(b^2 + \varepsilon^2 w^2)}{a} - \frac{a\varepsilon^2(b^2 - w^2)}{b^2 + \varepsilon^2 w^2}\right\}.$$

Da das constante Glied in dieser Gleichung im Allgemeinen nicht verschwindet, so ist ersichtlich, dass die Osculationsebene im Allgemeinen nicht durch den Mittelpunkt des Ellipsoids geht; dies wird aber stattfinden, wenn $\Theta = 0$ ist, d. h. wenn die loxodro-

mische Linie mit einem Meridiane zusammenfällt; in diesem Falle wird die Osculationsebene für alle Punkte durch den Mittelpunkt gehen. Für jeden anderen Werth von Θ wird dies stattfinden, wenn $w=0$ ist, d. h. für den Punkt der loxodromischen Linie, in welchem dieselbe den Aequator schneidet.

§. 11.

Als allgemeine Gleichung der Normalebene einer Curve doppelter Krümmung in einem Punkte (u, v, w) hat man nach §. 9.:

$$z-w+\frac{dv}{dw}(y-v)+\frac{du}{dw}(x-u)=0,$$

wofür man auch symmetrischer schreiben kann, indem man wieder x, y, z als Functionen einer anderen unabhängigen Variablen ansieht:

$$\text{(b)} \qquad (x-u)du+(y-v)dv+(z-w)dw=0,$$

und wenn man die Gleichung der durch einen unendlich nahe liegenden Punkt gehenden Normalebene haben will, so muss man zu dem ersten Theile der Gleichung (b) ihr Differential in Beziehung auf die Veränderlichen u, v, w addiren. Für die grade Durchschnittslinie der beiden einander unendlich nahe liegenden Normalebenen in den Punkten (u, v, w) und $(u+du, v+dv, w+dw)$ hat man folglich ausser der Gleichung (b) noch die sich durch Differenzirung daraus ergebende Gleichung:

$$(x-u)d^2u+(y-v)d^2v+(z-w)d^2w-(du^2+dv^2+dw^2)=0,$$

oder, wenn

$$du^2+dv^2+dw^2=ds^2$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$\text{(b}'\text{)} \qquad (x-u)d^2u+(y-v)d^2v+(z-w)d^2w-ds^2=0.$$

Diese Durchschnittslinie der beiden Normalebenen trifft die entsprechende Krümmungsebene in einem Punkte, welcher, ebenso wie bei den ebenen Curven, der Mittelpunkt eines Kreises ist, der durch drei einander unendlich nahe liegende Punkte der Curve geht, des sogenannten Krümmungskreises. Die Coordinaten x, y, z dieses Mittelpunktes ergeben sich offenbar aus der Verbindung der beiden Gleichungen (b) und (b') mit der im vorigen Paragraphen für die Krümmungsebene aufgestellten Gleichung (a),

und der Halbmesser ϱ des Krümmungskreises wird dann durch die Gleichung bestimmt:

$$\varrho^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2.$$

Wenn man nun aus den Gleichungen (a), (b) und (b') die Binome $x-u$ und $y-v$ eliminirt, so erhält man unmittelbar:

$$z-w = \frac{ds^2(Xdv - Ydu)}{X(dvd^2w - dwd^2v) + Y(dwd^2u - dud^2w) + Z(dvd^2v - dvd^2u)}$$
$$= \frac{ds^2(Xdv - Ydu)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

und ebenso erhält man:

$$y-v = \frac{ds^2(Zdu - Xdw)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$
$$x-u = \frac{ds^2(Ydw - Zdv)}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Es ergiebt sich also:

$$\varrho = \frac{ds^2\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)ds^2 - (Xdu + Ydv + Zdw)^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

oder mit Hülfe der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichung (a'):

$$\varrho = \frac{ds^3}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Nach §. 8. ist nun für die loxodromische Linie, wenn die dem Punkte (u, v, w) entsprechende Breite mit φ bezeichnet wird:

$$ds^2 = \frac{\sec\Theta^2 . dw^2}{\cos\varphi^2},$$

folglich erhalten wir, da nach §. 10.

$$\cos\varphi^2 = \frac{b^2 - w^2}{b^2 + \varepsilon^2 w^2}$$

ist:

$$ds^2 = \frac{\sec\Theta^2(b^2 + \varepsilon^2 w^2)dw^2}{b^2 - w^2};$$

ferner ist nach den in §. 10. für X, Y, Z gefundenen Ausdrücken:

$$X^2+Y^2+Z^2=\frac{dw^6}{(b^2-w^2)^3}\{ab+\frac{b\,\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}{a}\}^2+\frac{\mathrm{tg}\,\Theta^2\varepsilon^4w^2dw^6}{(b^2-w^2)(b^2+\varepsilon^2w^2)}$$

$$+\frac{\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)dw^6}{(b^2-w^2)^4}\{ab+\frac{b\,\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}{a}\}^2+\frac{a^2\mathrm{tg}\,\Theta^2\varepsilon^4w^4dw^6}{b^2(b^2-w^2)^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}$$

$$-\frac{2a\,\mathrm{tg}\,\Theta^2\varepsilon^2w^2dw^6}{b(b^2-w^2)^3}\{ab+\frac{b\,\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}{a}\};$$

da aber

$$\frac{1}{(b^2-w^2)^3}+\frac{\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}{(b^2-w^2)^4}=\frac{b^2-w^2+\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2-w^2)+\mathrm{tg}\,\Theta^2(1+\varepsilon^2)w^2}{(b^2-w^2)^4}$$

$$=\frac{\sec\Theta^2}{(b^2-w^2)^3}+\frac{a^2\,\mathrm{tg}\,\Theta^2w^2}{b^2(b^2-w^2)^4},$$

und

$$\frac{\mathrm{tg}\,\Theta^2\varepsilon^4w^2}{(b^2-w^2)(b^2+\varepsilon^2w^2)}+\frac{a^2\,\mathrm{tg}\,\Theta^2\varepsilon^4w^4}{b^2(b^2-w^2)^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}$$

$$=\frac{\mathrm{tg}\,\Theta^2\varepsilon^4w^2\{b^2(b^2-w^2)+a^2w^2\}}{b^2(b^2-w^2)^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}$$

$$=\frac{b^2\,\mathrm{tg}\,\Theta^2\varepsilon^4w^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}{b^2(b^2-w^2)^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}=\frac{\mathrm{tg}\,\Theta^2\varepsilon^4w^2}{(b^2-w^2)^2}$$

ist, so erhalten wir auch:

$$X^2+Y^2+Z^2$$

$$=\left\{\frac{\sec\Theta^2.dw^6}{(b^2-w^2)^3}+\frac{a^2.\mathrm{tg}\,\Theta^2.w^2.dw^6}{b^2(b^2-w^2)^4}\right\}\{ab+\frac{b\,\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}{a}\}^2$$

$$+\frac{\mathrm{tg}\,\Theta^2\varepsilon^4w^2dw^6}{(b^2-w^2)^2}-\frac{2a\,\mathrm{tg}\,\Theta^2\varepsilon^2w^2dw^6}{b(b^2-w^2)^3}\{ab+\frac{b\,\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}{a}\}$$

$$=\frac{\sec\Theta^2.dw^6}{(b^2-w^2)^3}\{ab+\frac{b.\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}{a}\}^2$$

$$+dw^6\{\frac{a\,\mathrm{tg}\,\Theta.w}{b(b^2-w^2)^2}[ab+\frac{b\,\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}{a}]-\frac{\mathrm{tg}\Theta.\varepsilon^2w}{b^2-w^2}\}^2;$$

da nun ferner sich ergiebt:

$$\frac{a\,\mathrm{tg}\,\Theta.w}{b(b^2-w^2)^2}\left[ab+\frac{b\,\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}{a}\right]-\frac{\mathrm{tg}\Theta\,\varepsilon^2w}{b^2-w^2}$$

$$=\frac{\mathrm{tg}\,\Theta.w}{b^2-w^2}\left\{\frac{a^2+\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}{b^2-w^2}-\varepsilon^2\right\}$$

$$=\frac{\mathrm{tg}\,\Theta.w}{b^2-w^2}\cdot\frac{(b^2+\varepsilon^2w^2)+\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}{b^2-w^2}=\frac{\mathrm{tg}\Theta.\sec\Theta.^2w(b^2+\varepsilon^2w^2)}{(b^2-w^2)^2},$$

so erhalten wir endlich:

$$X^2+Y^2+Z^2$$

$$=\frac{\sec\Theta^2dw^6}{(b^2-w^2)^3}\left\{ab+\frac{b\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)}{a}\right\}^2+\frac{\mathrm{tg}\Theta^2.\sec\Theta^4.w^2(b^2+\varepsilon^2w^2)^2dw^6}{(b^2-w^2)^4}$$

$$=\frac{\sec\Theta^2.dw^6}{a^2(b^2-w^2)^4}\{b^2(b^2-w^2)[a^2+\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)]^2$$

$$+a^2\,\mathrm{tg}\,\Theta^2.\sec\Theta^2.w^2(b^2+\varepsilon^2w^2)^2\},$$

und es ergiebt sich daher:

16)

$$\varrho=\frac{a.\sec\Theta^2\sqrt{b^2-w^2}\sqrt{(b^2+\varepsilon^2w^2)^3}}{\sqrt{\{b^2(b^2-w^2)[a^2+\mathrm{tg}\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)]^2+a^2\mathrm{tg}\Theta^2.\sec\Theta^2.w^2(b^2+\varepsilon^2w^2)^2\}}}.$$

Da

$$\sec\Theta^2=1+\mathrm{tg}\,\Theta^2$$

und

$$b^2(b^2-w^2)(b^2+\varepsilon^2w^2)^2+a^2w^2(b^2+\varepsilon^2w^2)^2=b^2(b^2+\varepsilon^2w^2)^3$$

ist, so können wir statt der gefundenen Formel, indem wir dem Nenner des für ϱ erhaltenen Ausdrucks eine andere Gestalt geben, auch schreiben:

16ᵃ)

$$\varrho=\frac{a.\sec\Theta^2\sqrt{b^2-w^2}\sqrt{(b^2+\varepsilon^2w^2)^3}}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}a^4b^2(b^2-w^2)+2a^2b^2\,\mathrm{tg}\,\Theta^2(b^2-w^2)(b^2+\varepsilon^2w^2)\\+a^2\,\mathrm{tg}\,\Theta^2.w^2(b^2+\varepsilon^2w^2)^2+b^2.\mathrm{tg}\,\Theta^4(b^2+\varepsilon^2w^2)^3\end{array}\right\}}}.$$

Es geht aus dieser Formel hervor, dass für $\Theta=0$, oder wenn die Curve mit dem Meridian zusammenfällt,

$$\varrho=\frac{\sqrt{(b^2+\varepsilon^2w^2)^3}}{ab}$$

wird, d. h. es wird der Krümmungshalbmesser gleich dem Krümmungshalbmesser des Meridians, denn dieser Ausdruck gilt auch für den Krümmungshalbmesser einer Ellipse mit den Axen $2a$ und $2b$ in einem Punkte, dessen Ordinate w ist.

Für $\Theta = 90^0$, das ist, wenn die Curve mit einem Parallelkreise zusammenfällt, wird

$$\varrho = \frac{a\sqrt{b^2 - w^2}}{b},$$

d. h. der Krümmungshalbmesser wird gleich dem Halbmesser dieses Parallelkreises.

In jedem anderen Falle wird für $w = 0$, d. h. für den Punkt der Curve, in welchem sie den Aequator schneidet:

$$\varrho = \frac{ab^2 . \sec \Theta^2}{a^2 + b^2 \operatorname{tg} \Theta^2} = \frac{ab^2}{a^2 . \cos \Theta^2 + b^2 . \sin \Theta^2} = \frac{b^2}{a(1 - e^2 . \sin \Theta^2)}.$$

Wenn sich w dem Werthe b nähert, so nähert sich ϱ dem Werthe Null, d. h. gegen den Pol hin wird der Krümmungshalbmesser der loxodromischen Linie verschwindend klein.

§. 12.

Nimmt man auf einer ebenen Curve ausser einem Punkte m einen zweiten m_1 an, bezeichnet die Länge des zwischen diesen beiden Punkten enthaltenen Bogens der Curve mit Δs, und den Winkel, welchen die in den beiden Punkten m und m_1 gezogenen Normalen oder Tangenten der Curve mit einander bilden, mit $\Delta \tau$, so nimmt unter der Voraussetzung, dass der Bogen mm_1 keine Inflexion erfährt, sondern in seiner ganzen Ausdehnung seine Convexität nach derselben Seite kehrt, das Verhältniss

$$\frac{\Delta \tau}{\Delta s}$$

offenbar grössere oder kleinere Werthe an, je nachdem die betrachtete Curve mehr oder weniger krumm ist, oder sich in der Nähe des Punktes m mehr oder weniger von der Tangente im Punkte m entfernt. Für einen Kreis ist offenbar in allen Punkten, so gross auch der Bogen Δs sein mag, wenn r der Halbmesser des Kreises ist, $r . \Delta \tau = \Delta s$, also $\frac{\Delta \tau}{\Delta s} = \frac{1}{r}$, und es ist ja allerdings die Krümmung eines Kreises in allen Punkten dieselbe;

nach dem Gesagten wird $\frac{1}{r}$ als das Maass der Krümmung des Kreises von dem Halbmesser r zu betrachten sein.

Für eine beliebige ebene Curve ändert sich das Verhältniss $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ nicht bloss mit der Lage des Punktes m, sondern auch mit der Länge des Bogens Δs. Lässt man aber die Grössen Δs und $\Delta\tau$ immer kleiner werden, so wird, unter der Voraussetzung, dass im Punkte m keine Stetigkeitsunterbrechung stattfindet, dieses Verhältniss gegen eine bestimmte Grenze

$$\frac{d\tau}{ds}$$

convergiren, welche man nach der Analogie als das Maass der Krümmung der Linie im Punkte m zu betrachten hat. Wenn aber der Bogen mm_1 unendlich klein wird, so ist der Punkt, in welchem die beiden Normalen der Curve in den Punkten m und m_1 sich schneiden, der Krümmungsmittelpunkt in Bezug auf den Punkt m, und man hat daher, wenn man den Krümmungshalbmesser für diesen Punkt mit ϱ bezeichnet:

$$ds = \varrho . d\tau$$

oder

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\varrho};$$

es wird demnach das Maass der Krümmung einer ebenen Curve in irgend einem Punkte ausgedrückt durch das Verhältniss $\frac{1}{\varrho}$.

Diese Betrachtung lässt sich nun auch auf die Curven im Raume ausdehnen, denn für diese liegen drei auf einander folgende Punkte auch immer in einer und derselben Ebene, welche man eben die Krümmungsebene nennt, und, wie wir schon oben gesehen haben, trifft die Durchschnittslinie zweier auf einander folgenden Normalebenen diese Krümmungsebene in einem Punkte, welcher, ähnlich wie bei den ebenen Curven, der Mittelpunkt eines Kreises ist, der durch die drei einander unendlich nahe liegenden Punkte der Curve geht. Es wird daher auch für die Curven im Raume das Maass ihrer Krümmung in der Krümmungsebene, oder das Maass ihrer sogenannten ersten Krümmung ausgedrückt durch

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\varrho},$$

wenn $d\tau$, ds und ϱ dieselbe Bedeutung haben, welche wir diesen Zeichen oben in Bezug auf die ebenen Curven beigelegt haben.

Nach den in den Formeln 16) aufgestellten Ausdrücken für den Krümmungshalbmesser ϱ erhalten wir nun in Bezug auf die loxodromische Linie für das Maass ihrer ersten Krümmung im Punkte (u, v, w) die Formel:

17)

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{\sqrt{\{b^2(b^2-w^2)[a^2+\operatorname{tg}\Theta^2(b^2+\varepsilon^2w^2)]^2+a^2\operatorname{tg}\Theta^2.\sec\Theta^2.w^2(b^2+\varepsilon^2w^2)^2\}}}{a.\sec\Theta^2\sqrt{b^2-w^2}.\sqrt{(b^2+\varepsilon^2w^2)^3}}$$

oder:

17a)

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\{a^4b^2(b^2-w^2)+2a^2b^2\operatorname{tg}\Theta^2(b^2-w^2)(b^2+\varepsilon^2w^2)\\+a^2\operatorname{tg}\Theta^2.w^2(b^2+\varepsilon^2w^2)^2+b^2\operatorname{tg}\Theta^4(b^2+\varepsilon^2w^2)^3\}\end{array}\right\}}}{a.\sec\Theta^2\sqrt{b^2-w^2}\sqrt{(b^2+\varepsilon^2w^2)^3}}.$$

Es bezeichnet hier $d\tau$ offenbar den von zwei einander unendlich nahe liegenden Tangenten gebildeten Winkel, welchen man, ebenso wie bei den ebenen Curven, den Contingenzwinkel nennt.

Für die Curven im Raume giebt es ausser der eben betrachteten ersten Krümmung noch eine zweite Krümmung, wodurch eben die Benennung „Linien von doppelter Krümmung" für diese Curven gerechtfertigt wird, und ebenso wie das Maass der ersten Krümmung von dem Winkel, den zwei auf einander folgende Tangenten mit einander bilden, dem sogenannten Contingenzwinkel, abhängt, so wird das Maass der zweiten Krümmung durch den Winkel, den zwei auf einander folgende Krümmungsebenen mit einander bilden, den sogenannten Torsionswinkel, bestimmt. Während aber das Maass der ersten Krümmung nur von den Differentialien der ersten und zweiten Ordnung von den Coordinaten x, y, z abhängt, kommen für die Bestimmung der zweiten Krümmung auch die Differentialien der dritten Ordnung in Betracht, wodurch der sich für dieselbe ergebende Ausdruck in Bezug auf die loxodromische Linie des Umdrehungs-Ellipsoids zu complicirt wird, als dass er noch von einem erheblichen Interesse für uns sein könnte. Es wird dies überhaupt mehr oder weniger mit allen noch übrigen sich auf die loxodromische Linie beziehenden Formeln der Fall sein; und um daher die Theorie dieser Linie noch weiter zu verfolgen, wollen wir von nun an die Abplattung

der Erde unberücksichtigt lassen, und die loxodromische Linie auf der Kugel, für welche die Formeln weit einfacher werden, unserer Untersuchung unterwerfen.

Zweites Kapitel.

Die loxodromische Linie auf der Kugel.

§. 13.

Betrachten wir also nun die Erde als eine Kugel, und bezeichnen den Halbmesser dieser Kugel mit R, so haben wir für dieselbe, wenn wir uns durch ihren Mittelpunkt wieder ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x, y, z gelegt denken, die Gleichung:

1) $$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Nehmen wir wieder die Ebene des Aequators zur Ebene der xy, also die Axe der Erde zur Axe der z, den nach dem ersten Meridian gerichteten Halbmesser des Aequators zur Axe der x, den nach dem neunzigsten Grade der Länge gerichteten Halbmesser desselben zur Axe der y, und bezeichnen wir wieder die geographische Länge und Breite respective durch ψ und φ, sowie den Winkel, welchen die loxodromische Linie mit dem Meridian bildet, durch Θ: so erhalten wir offenbar die den im ersten Kapitel in Beziehung auf das Umdrehungsellipsoid entwickelten für die Kugel entsprechenden Formeln, wenn wir in jenen $a = b = R$ und $e = 0$ setzen.

Aus den Gleichungen 4) von Kap. I. erhalten wir zunächst, wenn wir wieder annehmen, dass die Längen von dem Punkte an gerechnet werden, in welchem die loxodromische Linie den Aequator schneidet, für die loxodromische Linie auf der Kugel die Gleichung:

2) $$\psi = \operatorname{tg}\Theta . l . \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Für $\Theta = 0$ fällt also auch auf der Kugel die loxodromische Linie mit dem Meridian zusammen, und für $\Theta = 90^0$ wird die Curve ein Parallelkreis des Aequators. Für alle anderen Werthe von Θ wird die Curve, ebenso wie auf dem Ellipsoid, vom Aequator aus sich den Polen in unendlichen Windungen immer mehr nähern, ohne dieselben je zu erreichen.

Die Abweichung der einer bestimmten geographischen Breite φ auf der Kugel entsprechenden Länge ψ von der demselben Werthe von φ auf dem Ellipsoid entsprechenden Länge wird offenbar ausgedrückt durch:

$$\operatorname{tg}\Theta(e^2.\sin\varphi + \tfrac{1}{3}e^4.\sin\varphi^3 + \tfrac{1}{5}e^6.\sin\varphi^5 + \ldots).$$

Für die Projection der loxodromischen Linie auf den Aequator erhalten wir in Bezug auf die Kugel aus der in §. 5. gefundenen Gleichung 7):

$$\operatorname{cotg}\Theta.\operatorname{Arctg}\frac{y}{x} = \tfrac{1}{2}l.\frac{R+\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}{R-\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}$$

$$= \tfrac{1}{2}l.\frac{\{R+\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\}^2}{x^2+y^2},$$

woraus sich die Gleichung ergiebt:

$$3)\qquad \operatorname{Arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\Theta.l.\frac{R+\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ebenso erhalten wir aus den Gleichungen 8) von §. 5. für die Projectionen der loxodromischen Linie auf die Ebenen der xz und yz in Bezug auf die Kugel die beiden Gleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} \operatorname{Arc.cos}\dfrac{x}{\sqrt{R^2-z^2}} = \operatorname{tg}\Theta.l.\sqrt{\dfrac{R+z}{R-z}}, \\[2ex] \operatorname{Arc.sin}\dfrac{y}{\sqrt{R^2-z^2}} = \operatorname{tg}\Theta.l.\sqrt{\dfrac{R+z}{R-z}}. \end{cases}$$

§. 14.

Für die Tangente der loxodromischen Linie in einem Punkte (u, v, w), dessen geographische Breite und Länge respective φ und ψ sind, erhalten wir in Beziehung auf die Kugel aus den in §. 6. aufgestellten Gleichungen 10):

5)

$$x - R\cos\psi.\cos\varphi = -\frac{\operatorname{tg}\Theta.\sin\psi + \cos\psi.\sin\varphi}{\cos\varphi}(z - R.\sin\varphi),$$

$$y - R.\sin\psi.\cos\varphi = \frac{\operatorname{tg}\Theta.\cos\psi - \sin\psi.\sin\varphi}{\cos\varphi}(z - R.\sin\varphi);$$

oder wenn wir die Gleichungen der Tangente nicht durch die

geographische Breite und Länge des Punktes (u, v, w), sondern durch die Coordinaten u, v, w selbst ausdrücken wollen, so erhalten wir für dieselben aus den Gleichungen 11) von §. 6.:

$$6)\quad \begin{cases} x-u=-\dfrac{R.\operatorname{tg}\Theta.v+uw}{u^2+v^2}(z-w), \\ y-v=\dfrac{R.\operatorname{tg}\Theta.u-vw}{u^2+v^2}(z-w). \end{cases}$$

Die Winkel α, β, γ, welche die Tangente respective mit den Axen der x, y, z bildet, werden für die Kugel, ebenso wie für das Ellipsoid, durch die in §. 7. unter den Formeln 12) aufgestellten Gleichungen bestimmt, oder auch durch die folgenden sich aus den Formeln 12ᵃ), mit Hülfe der Gleichung 1) des vorhergehenden Paragraphen, ergebenden Gleichungen:

$$7)\quad \begin{cases} \cos\alpha=\mp\left(\sin\Theta\dfrac{v}{\sqrt{R^2-w^2}}+\cos\Theta\dfrac{uw}{R\sqrt{R^2-w^2}}\right), \\ \cos\beta=\pm\left(\sin\Theta\dfrac{u}{\sqrt{R^2-w^2}}-\cos\Theta\dfrac{vw}{R\sqrt{R^2-w^2}}\right), \\ \cos\gamma=\pm\dfrac{\cos\Theta\sqrt{R^2-w^2}}{R}. \end{cases}$$

Für die Coordinaten des Punktes, in welchem die Tangente die Ebene des Aequators schneidet, erhalten wir noch in Bezug auf die Kugel, wenn wir in den Gleichungen 5) der Tangente $z=0$ setzen:

$$8)\quad \begin{cases} x=\dfrac{R.\cos\psi+R.\operatorname{tg}\Theta.\sin\psi.\sin\varphi}{\cos\varphi}, \\ y=\dfrac{R.\sin\psi-R.\operatorname{tg}\Theta.\cos\psi.\sin\varphi}{\cos\varphi}. \end{cases}$$

Wir werden im folgenden Paragraphen auch die Gleichung der Linie kennen lernen, auf welcher alle diese Durchschnittspunkte der Tangenten mit der Ebene des Aequators liegen.

§. 15.

Wenn man sich an einer Linie von doppelter Krümmung nach einander alle Tangenten construirt denkt, so liegen dieselben auf einer sogenannten abwickelbaren Fläche, d. h. auf einer solchen, welche sich in eine Ebene ausbreiten oder abwickeln lässt. Im

Allgemeinen ist freilich die Fläche, welche durch eine sich im Raume auf beliebige Weise bewegende grade Linie erzeugt wird, nicht eine abwickelbare, sondern dies wird nur stattfinden, wenn die Bewegung der graden Linie so geschieht, dass zwei einander unendlich nahe liegende Erzeugungslinien einander treffen, oder wenn es eine Linie giebt, welche die Umhüllungslinie aller graden Erzeugungslinien ist, und man nennt dann diese Umhüllungslinie die Rückkehrkante oder Wendungscurve der abwickelbaren Fläche. Die auf einander folgenden Tangenten einer Curve doppelter Krümmung haben nun offenbar diese Curve selbst zur Umhüllungslinie, und sie liegen daher allerdings auf einer abwickelbaren Fläche, deren Rückkehrkante die gegebene Curve ist. Für die loxodromische Linie auf der Kugel erhalten wir die Gleichung der abwickelbaren Fläche, auf welcher alle ihre Tangenten liegen, indem wir aus den Gleichungen 5) die Grössen φ und ψ vermittelst der Gleichungen der Curve eliminiren. Wenn wir die Gleichungen 5) abwechselnd, die eine mit $\cos\psi$ und die andere mit $\sin\psi$ multipliciren, und dann respective zu einander addiren und von einander subtrahiren, so erhalten wir aus denselben die beiden Gleichungen:

$$9)\quad \begin{cases} x.\cos\psi + y.\sin\psi = R.\sec\varphi - z.\operatorname{tg}\varphi, \\ x.\sin\psi - y.\cos\psi = \operatorname{tg}\Theta(R.\operatorname{tg}\varphi - z.\sec\varphi). \end{cases}$$

Aus der Gleichung der loxodromischen Linie 2) ergiebt sich nun, wenn von jetzt an mit e die Basis des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet wird:

$$e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}} = \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}},$$

woraus man erhält:

$$\sin\varphi = \frac{e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}} - e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}}{e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}} + e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}}, \quad \cos\varphi = \frac{2}{e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}} + e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}},$$

also

$$\sec\varphi = \frac{e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}} + e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}}{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}} - e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}}{2}.$$

Substituiren wir diese Werthe von $\sec\varphi$, und $\operatorname{tg}\varphi$ in die beiden Gleichungen 9), so verwandeln sich dieselben in die beiden folgenden:

$$9^*)\quad\begin{cases} x.\cos\psi+y.\sin\psi=\dfrac{R-z}{2}e^{\frac{\psi}{tg\Theta}}+\dfrac{R+z}{2}e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}},\\[2ex] x.\sin\psi-y.\cos\psi=tg\Theta\left\{\dfrac{R-z}{2}e^{\frac{\psi}{tg\Theta}}-\dfrac{R+z}{2}e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}\right\}.\end{cases}$$

Quadriren wir diese beiden Gleichungen, und addiren sie dann zu einander, so erhalten wir die Gleichung:

$$x^2+y^2$$
$$=\frac{\sec\Theta^2}{4}(R-z)^2e^{\frac{2\psi}{tg\Theta}}+\frac{1-tg\Theta^2}{2}(R^2-z^2)+\frac{\sec\Theta^2}{4}(R+z)^2e^{-\frac{2\psi}{tg\Theta}},$$

woraus sich ferner die beiden Gleichungen ergeben:

$$x^2+y^2+tg\,\Theta^2(R^2-z^2)$$
$$=\frac{\sec\Theta^2}{4}(R-z)^2e^{\frac{2\psi}{tg\Theta}}+\frac{\sec\Theta^2}{2}(R^2-z^2)+\frac{\sec\Theta^2}{4}(R+z)^2e^{-\frac{2\psi}{tg\Theta}},$$

$$x^2+y^2-(R^2-z^2)$$
$$=\frac{\sec\Theta^2}{4}(R-z)^2e^{\frac{2\psi}{tg\Theta}}-\frac{\sec\Theta^2}{2}(R^2-z^2)+\frac{\sec\Theta^2}{4}(R+z)^2e^{-\frac{2\psi}{tg\Theta}};$$

und wenn wir diese beiden Gleichungen radiciren, so erhalten wir die beiden folgenden:

$$\frac{\sec\Theta}{2}\{(R-z)e^{\frac{\psi}{tg\Theta}}+(R+z)e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}\}=\pm\sqrt{x^2+y^2+tg\,\Theta^2(R^2-z^2)},$$

$$\frac{\sec\Theta}{2}\{(R-z)e^{\frac{\psi}{tg\Theta}}+(R+z)e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}\}=\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2};$$

wofür wir auch schreiben können:

10)

$$\frac{R-z}{2}e^{\frac{\psi}{tg\Theta}}+\frac{R+z}{2}e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}=\pm\sqrt{(x^2+y^2)\cos\Theta^2+(R^2-z^2)\sin\Theta^2},$$

$$\frac{R-z}{2}e^{\frac{\psi}{tg\Theta}}-\frac{R+z}{2}e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}=\pm\cos\Theta\sqrt{x^2+y^2+z-R^2}.$$

Um uns über die Wahl der Vorzeichen für die beiden Wurzelgrössen auf den rechten Seiten dieser Gleichungen entscheiden zu können, wollen wir nur den Theil der zu bestimmenden Fläche in Betracht ziehen, der sich zwischen den beiden, durch die Gleichungen $z=R$ und $z=-R$ bestimmten Berührungsebenen der Kugel in den beiden Polen befindet, in welchem, da alle Punkte der loxodromischen Linie zwischen diesen beiden Ebenen liegen, alle Tangenten dieser Curve in einem Theile ihrer Ausdehnung enthalten sind. Da dann die Grössen $R-z$ und $R+z$ immer einen positiven Werth haben, so ist ersichtlich, dass man der Wurzelgrösse in der ersten der beiden obigen Gleichungen immer das positive Vorzeichen beizulegen hat, während diejenige in der zweiten Gleichung sowohl das positive als auch das negative Vorzeichen erhalten kann: und es ergiebt sich daher durch Addition der beiden Gleichungen 10):

$$e^{\frac{\psi}{tg\,\Theta}}=\frac{\sqrt{(x^2+y^2)\cos\Theta^2+(R^2-z^2)\sin\Theta^2}\pm\cos\Theta\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}}{R-z},$$

folglich:

11)

$$\psi=\operatorname{tg}\Theta l.\frac{\sqrt{(x^2+y^2)\cos\Theta^2+(R^2-z^2)\sin\Theta^2}\pm\cos\Theta\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}}{R-z}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen 10) erhalten wir nun ferner aus den Gleichungen 9*) die beiden folgenden:

$$x.\cos\psi+y.\sin\psi=\sqrt{(x^2+y^2)\cos\Theta^2+(R^2-z^2)\sin\Theta^2},$$

$$x.\sin\psi-y.\cos\psi=\pm\sin\Theta\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2};$$

und wenn wir aus diesen beiden Gleichungen nach einander $\cos\psi$ und $\sin\psi$ eliminiren, so bekommen wir:

$$(x^2+y^2)\sin\psi$$

$$=y\sqrt{(x^2+y^2)\cos\Theta^2+(R^2-z^2)\sin\Theta^2}\pm x\sin\Theta\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2},$$

$$(x^2+y^2)\cos\psi$$

$$=x\sqrt{(x^2+y^2)\cos\Theta^2+(R^2-z^2)\sin\Theta^2}\mp y\sin\Theta\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2};$$

woraus sich ergiebt:

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{y\sqrt{(x^2+y^2)\cos\Theta^2+(R^2-z^2)\sin\Theta^2}\pm x\sin\Theta\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}}{x\sqrt{(x^2+y^2)\cos\Theta^2+(R^2-z^2)\sin\Theta^2}\mp y\sin\Theta\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}}.$$

Durch Substitution des oben unter 11) gefundenen Werthes von ψ in diese drei Gleichungen erhalten wir für die abwickelbare Fläche, auf welcher alle Tangenten der loxodromischen Linie auf der Kugel liegen, die Gleichungen:

12)

$$\operatorname{Arc\,sin}\frac{y\sqrt{(x^2+y^2)\cos\Theta^2+(R^2-z^2)\sin\Theta^2}\pm x.\sin\Theta\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}}{x^2+y^2}$$

$$=\operatorname{tg}\Theta l.\frac{\sqrt{(x^2+y^2)\cos\Theta^2+(R^2-z^2)\sin\Theta^2}\pm\cos\Theta\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}}{R-z}$$

oder:

12^a)

$$\operatorname{Arc\,cos}\frac{x\sqrt{(x^2+y^2)\cos\Theta^2+(R^2-z^2)\sin\Theta^2}\mp y.\sin\Theta\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}}{x^2+y^2}$$

$$=\operatorname{tg}\Theta l.\frac{\sqrt{(x^2+y^2)\cos\Theta^2+(R^2-z^2)\sin\Theta^2}\pm\cos\Theta\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}}{R-z}$$

oder:

12^b)

$$\operatorname{Arc\,tg}\frac{y\sqrt{(x^2+y^2)\cos\Theta^2+(R^2-z^2)\sin\Theta^2}\pm x.\sin\Theta\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}}{x\sqrt{(x^2+y^2)\cos\Theta^2+(R^2-z^2)\sin\Theta^2}\mp y.\sin\Theta\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}}$$

$$=\operatorname{tg}\Theta l.\frac{\sqrt{(x^2+y^2)\cos\Theta^2+(R^2-z^2)\sin\Theta^2}\pm\cos\Theta\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}}{R-z}.$$

Was die doppelten Vorzeichen in diesen Gleichungen betrifft, so geht, wie wir schon oben erwähnt haben, aus der zweiten der Gleichungen 10) hervor, dass beide zu berücksichtigen sind, wenn die ganze in Rede stehende Fläche durch unsere Gleichungen dargestellt werden soll. Es werden für einen Theil dieser Fläche offenbar die oberen, für einen anderen die unteren Vorzeichen zu nehmen sein. Die Linie, welche diese beiden Theile der Fläche von einander trennt, werden wir offenbar erhalten, wenn wir

$$\frac{R-z}{2}e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}-\frac{R+z}{2}e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}=0$$

oder

$$e^{\frac{\psi}{tg\,\Theta}}=\sqrt{\frac{R+z}{R-z}}$$

setzen. Da nach der Gleichung der loxodromischen Linie

$$e^{\frac{\psi}{tg\,\Theta}}=\sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}}$$

ist, so erhalten wir für die Linie, durch welche unsere Fläche in die beiden erwähnten Theile getheilt wird:

$$z=R.\sin\varphi,$$

woraus hervorgeht, dass diese Linie auf der Oberfläche der Kugel liegt, also die loxodromische Linie selbst oder die Rückkehrkante unserer abwickelbaren Fläche ist.

Wenn wir also an die loxodromische Linie auf der Kugel nach einander alle Tangenten ziehen, so wird die Fläche, welche alle diese Tangenten enthält, auf der einen Seite der loxodromischen Linie durch die Gleichungen 12) dargestellt, wenn in denselben die oberen Vorzeichen, auf der anderen Seite jener Linie, wenn in denselben Gleichungen die unteren Vorzeichen genommen werden.

Den Gleichungen 12) können wir auch noch eine andere Form geben, indem wir statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z ein System der Polarcoordinaten r, φ, ψ einführen, indem wir nämlich setzen:

$$x=r.\cos\varphi.\cos.\psi,\quad y=r.\cos\varphi.\sin\psi,\quad z=r.\sin\varphi,$$

so dass wieder φ den Winkel bezeichnet, welchen der Radius Vector r mit der Ebene des Aequators, und ψ den Winkel, welchen die Projection des Radius Vector auf der Ebene des Aequators mit dem nach dem ersten Meridian gezogenen Halbmesser des Aequators bildet.

Dann erhalten wir für die Fläche, auf welcher alle Tangenten der loxodromischen Linie liegen, statt der Gleichungen 12) die Gleichungen:

13)

$$\text{Arc}\sin\frac{\sin\psi\sqrt{r^2.\cos\varphi^2-(r^2-R^2)\sin\Theta^2}\pm\cos\psi.\sin\Theta\sqrt{r^2-R^2}}{r.\cos\varphi}$$

$$=\text{tg}\,\Theta l.\frac{\sqrt{r^2.\cos\varphi^2-(r^2-R^2)\sin\Theta^2}\pm\cos\Theta\sqrt{r^2-R^2}}{R-r.\sin\varphi}$$

oder:

13ᵃ)

$$\text{Arc cos}\,.\frac{\cos\psi\sqrt{r^2.\cos\varphi^2-(r^2-R^2)\sin\Theta^2}\mp\sin\psi.\sin\Theta\sqrt{r^2-R^2}}{r.\cos\varphi}$$

$$=\text{tg}\,\Theta l.\frac{\sqrt{r^2.\cos\varphi^2-(r^2-R^2)\sin\Theta^2}\pm\cos\Theta\sqrt{r^2-R^2}}{R-r.\sin\varphi}$$

oder:

13ᵇ)

$$\text{Arc tg}\,.\frac{\sin\psi\sqrt{r^2.\cos\varphi^2-(r^2-R^2)\sin\Theta^2}\pm\cos\psi.\sin\Theta\sqrt{r^2-R^2}}{\cos\psi\sqrt{r^2.\cos\varphi^2-(r^2-R^2)\sin\Theta^2}\mp\sin\psi.\sin\Theta\sqrt{r^2-R^2}}$$

$$=\text{tg}\,\Theta l.\frac{\sqrt{r^2.\cos\varphi^2-(r^2-R^2)\sin\Theta^2}\pm\cos\Theta\sqrt{r^2-R^2}}{R-r.\sin\varphi},$$

in welchen Gleichungen über die doppelten Vorzeichen dasselbe gilt, was wir darüber in Bezug auf die Gleichungen 12) gesagt haben.

Wenn wir in diesen Gleichungen $\varphi=0$ setzen, so erhalten wir die Gleichungen der Durchschnittslinie jener Fläche mit der Ebene des Aequators, oder die Gleichungen der Linie, auf welcher die Durchschnittspunkte aller Tangenten mit der Ebene des Aequators liegen. Die Gleichungen dieser Linie werden demnach sein:

14)

$$\text{Arc sin}\,.\frac{\sin\psi\sqrt{r^2.\cos\Theta^2+R^2.\sin\Theta^2}\pm\cos\psi.\sin\Theta\sqrt{r^2-R^2}}{r}$$

$$=\text{tg}\,\Theta l.\frac{\sqrt{r^2.\cos\Theta^2+R^2.\sin\Theta^2}\pm\cos\Theta\sqrt{r^2-R^2}}{R}$$

oder

14ᵃ)

$$\text{Arc cos}\,\frac{\cos\psi\sqrt{r^2.\cos\Theta^2+R^2.\sin\Theta^2}\mp\sin\psi.\sin\Theta\sqrt{r^2-R^2}}{r}$$

$$=\text{tg}\,\Theta l.\frac{\sqrt{r^2.\cos\Theta^2+R^2.\sin\Theta^2}\pm\cos\Theta\sqrt{r^2-R^2}}{R}$$

oder

14^b)

$$\text{Arctg}\,\frac{\sin\psi\sqrt{r^2.\cos\Theta^2+R^2.\sin\Theta^2}\pm\cos\psi.\sin\Theta\sqrt{r^2-R^2}}{\cos\psi\sqrt{r^2.\cos\Theta^2+R^2.\sin\Theta^2}\mp\sin\psi.\sin\Theta\sqrt{r^2-R^2}}$$

$$=\text{tg}\,\Theta l.\frac{\sqrt{r^2.\cos\Theta^2+R^2.\sin\Theta^2}\pm\cos\Theta\sqrt{r^2-R^2}}{R},$$

in welchen Gleichungen die einen Vorzeichen sich auf die Tangenten, welche an den zu der einen Seite des Aequators liegenden Theil der loxodromischen Linie gezogen sind, die anderen auf die an den anderen Theil dieser Linie gezogenen Tangenten beziehen.

§. 16.

Für die Rectification der loxodromischen Linie auf der Kugel erhalten wir nach der in §. 8. für das Sphäroid aufgestellten Formel 13):

$$ds=\frac{R.d\varphi}{\cos\Theta},$$

woraus sich unmittelbar durch Integration ergiebt:

15) $$s=\frac{R.\varphi}{\cos\Theta}+C,$$

in welcher Gleichung offenbar die Constante C gleich Null zu setzen ist, wenn man die Bogen von dem Punkte aus rechnet, in welchem die loxodromische Linie den Aequator schneidet.

Da die Breite φ sich für das eine Ende der loxodromischen Linie dem Werthe $\frac{\pi}{2}$ und für das andere Ende derselben dem Werthe $-\frac{\pi}{2}$ nähert, so nähert sich die Länge der ganzen loxodromischen Linie dem Werthe

$$\frac{R\pi}{\cos\Theta},$$

wenn unter π die Ludolphsche Zahl verstanden wird.

§. 17.

Für die Normalebene der loxodromischen Linie in einem Punkte, dessen Breite und Länge respective φ und ψ sind, erhalten wir nach §. 9. Nr. 14) in Bezug auf die Kugel die Gleichung:

$$z+\frac{\operatorname{tg}\Theta.\cos\psi-\sin\varphi.\sin\psi}{\cos\varphi}y-\frac{\sin\varphi.\cos\psi+\operatorname{tg}\Theta.\sin\psi}{\cos\varphi}x=0$$

oder:

16)

$$\sec\psi.\cos\varphi.z+(\operatorname{tg}\Theta-\operatorname{tg}\psi.\sin\varphi)y-(\operatorname{tg}\Theta.\operatorname{tg}\psi+\sin\varphi)x=0.$$

Da das constante Glied in dieser Gleichung fehlt, so sieht man, dass alle Normalebenen der loxodromischen Linie auf der Kugel durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, was man allerdings schon aus der Eigenschaft der Kugel, dass jeder Radius ihre Normale ist, hätte schliessen können.

§. 18.

Für die Osculationsebene der loxodromischen Linie in einem Punkte (u, v, w), dessen Breite und Länge respective φ und ψ sind, ergiebt sich in Bezug auf die Kugel nach §. 10. die Gleichung:

17) $$\frac{R\operatorname{tg}\Theta}{\sqrt{R^2-w^2}}(z-w)=y.\cos\psi-x.\sin\psi,$$

wofür wir, da für jeden Punkt der Kugeloberfläche

$$w=R.\sin\varphi,$$

also

$$\frac{\sqrt{R^2-w^2}}{R}=\cos\varphi$$

ist, auch schreiben können:

17ᵃ) $$\operatorname{tg}\Theta.(z-w)=\cos\varphi(y.\cos\psi-x.\sin\psi).$$

Man sieht aus diesen Gleichungen, dass auch auf der Kugel die Krümmungsebene der loxodromischen Linie im Allgemeinen nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Es wird dies für jeden Punkt der Curve nur dann stattfinden, wenn $\Theta=0$ ist, d. h. wenn die Curve ein Meridian wird. Für alle anderen Werthe von Θ findet dasselbe nur für $w=0$, d. h. in dem Punkte der Curve Statt, in welchem sie den Aequator schneidet. Für $x=y=0$ erhalten wir $z=w$, woraus hervorgeht, dass die Krümmungsebene die Erdaxe im Mittelpunkte des Parallelkreises schneidet, in welchem der Punkt liegt, wo sich die Ebene an die Curve anschmiegt; der Radius dieses Kreises liegt demnach ganz in der Krümmungsebene.

Für die Neigung der Krümmungsebene gegen den Aequator erhalten wir, wenn wir den Winkel dieser Neigung mit i bezeichnen, nach einer Grundformel der analytischen Geometrie:

$$\operatorname{tg} i^2 = \frac{\cos \varphi^2}{\operatorname{tg} \Theta^2},$$

oder:

$$\text{18)} \qquad \operatorname{tg} i = \cos \varphi . \operatorname{cotg} \Theta,$$

woraus sich ergiebt, dass dieser Neigungswinkel von $90^0 - \Theta$ bis zu Null abnimmt, während man die geographische Breite von Null bis 90^0 wachsen lässt.

§. 19.

Für den Krümmungshalbmesser der loxodromischen Linie auf der Kugel in einem Punkte (u, v, w) erhalten wir nach der in §. 11. entwickelten Formel 16):

$$\varrho = \frac{R^4 \sec \Theta^2 \sqrt{R^2 - w^2}}{\sqrt{R^6 \sec \Theta^4 (R^2 - w^2) + R^6 \operatorname{tg} \Theta^2 . \sec \Theta^2 . w^2}}$$

$$= \frac{R . \sec \Theta \sqrt{R^2 - w^2}}{\sqrt{\sec \Theta^2 (R^2 - w^2) + \operatorname{tg} \Theta^2 w^2}},$$

und es wird daher für die Kugel:

$$\text{19)} \qquad \varrho = \frac{R . \sec \Theta \sqrt{R^2 - w^2}}{\sqrt{R^2 . \sec \Theta^2 - w^2}}.$$

Auf der Kugel wird also für $\Theta = 0$, d. h. wenn die Curve mit dem Meridian zusammenfällt, $\varrho = R$; für $\Theta = 90^0$, oder wenn die Curve mit einem Parallelkreise zusammenfällt, ergiebt sich $\varrho = \sqrt{R^2 - w^2}$, d. h. es wird der Krümmungshalbmesser gleich dem Halbmesser dieses Parallelkreises. In jedem anderen Falle ist $\varrho = R$, wenn $w = 0$ ist, oder da, wo die Curve den Aequator schneidet, ist ihr Krümmungshalbmesser dem Halbmesser der Kugel gleich. Da der Ausdruck $\sqrt{\frac{R^2 - w^2}{R^2 . \sec \Theta^2 - w^2}}$ ein echter Bruch ist, so ist ersichtlich, dass der Krümmungshalbmesser mit wachsendem w abnimmt, und es ergiebt sich aus der gefundenen Formel, dass derselbe sich immer mehr dem Werthe Null nähert, je näher w dem Werthe R kömmt, d. h. je mehr sich der Punkt (u, v, w) dem Pole nähert.

Da

$$w = R.\sin\varphi$$

ist, so hat man auch:

$$\varrho = \frac{R.\sec\Theta.\cos\varphi}{\sqrt{\sec\Theta^2 - \sin\varphi^2}} = \frac{R.\sec\Theta.\cos\varphi}{\sqrt{\mathrm{tg}\,\Theta^2 + \cos\varphi^2}} = \frac{R}{\sqrt{\sin\Theta^2.\sec\varphi^2 + \cos\Theta^2}},$$

und wir haben daher für den Krümmungshalbmesser auch die Formel:

19*) $$\varrho = \frac{R}{\sqrt{1 + \sin\Theta^2.\mathrm{tg}\,\varphi^2}},$$

aus welcher hervorgeht, dass in gleichen Breiten der Krümmungshalbmesser desto kleiner ist, je grösser Θ ist, oder je mehr sich die Curve an den Parallelkreis anschmiegt.

§. 20.

Bezeichnen wir die Winkel, welche der Krümmungshalbmesser im Punkte (u, v, w) mit den Parallelen zu den Axen der x, y, z bildet, respective mit λ, μ, ν, so haben wir für dieselben, wenn x, y, z die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind, die allgemeinen Gleichungen:

$$\cos\lambda = \frac{x-u}{\varrho}, \quad \cos\mu = \frac{y-v}{\varrho}, \quad \cos\nu = \frac{z-w}{\varrho};$$

folglich nach den in §. 11. für $x-u$, $y-v$, $z-w$ und ϱ aufgestellten Formeln:

$$\cos\lambda = \frac{Ydw - Zdv}{ds\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{Zdu - Xdw}{ds\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{Xdv - Ydu}{ds\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}};$$

wo wieder

$$X = dvd^2w - dwd^2v, \quad Y = dwd^2u - dud^2w, \quad Z = dud^2v - dvd^2u,$$

$$ds = \sqrt{du^2 + dv^2 + dw^2}$$

zu setzen ist.

Für die loxodromische Linie auf der Kugel erhalten wir nun nach den in §. 10. für das Umdrehungsellipsoid entwickelten Formeln:

$$dx = -\frac{R.\operatorname{tg}\Theta.dz}{\sqrt{R^2-z^2}}\sin\psi - \frac{zdz}{\sqrt{R^2-z^2}}\cos\psi,$$

$$dy = \frac{R.\operatorname{tg}\Theta.dz}{\sqrt{R^2-z^2}}\cos\psi - \frac{zdz}{\sqrt{R^2-z^2}}\sin\psi,$$

$$d^2x = -\frac{R^2.\sec\Theta^2.dz^2}{\sqrt{(R^2-z^2)^3}}\cos\psi, \quad d^2y = -\frac{R^2.\sec\Theta^2.dz^2}{\sqrt{(R^2-z^2)^3}}\sin\psi;$$

und es wird:

$$X = \frac{R^2.\sec\Theta^2.dw^3}{\sqrt{(R^2-w^2)^3}}\sin\psi,$$

$$Y = -\frac{R^2.\sec\Theta^2.dw^3}{\sqrt{(R^2-w^2)^3}}\cos\psi,$$

$$Z = \frac{R^3.\operatorname{tg}\Theta.\sec\Theta^2.dw^3}{(R^2-w^2)^2};$$

woraus sich ergiebt:

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = \frac{R^2.\sec\Theta^2\sqrt{R^2-w^2+R^2.\operatorname{tg}\Theta^2}.dw^3}{(R^2-w^2)^2}$$

$$= \frac{R^2.\sec\Theta^2\sqrt{R^2.\sec\Theta^2-w^2}.dw^3}{(R^2-w^2)^2};$$

da nun ferner nach den in §. 11. für ds in Beziehung auf das Umdrehungsellipsoid gefundenen Ausdrücken sich für die Kugel ergiebt:

$$ds = \frac{R.\sec\Theta.dw}{\sqrt{R^2-w^2}},$$

so wird in den obigen Ausdrücken für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ in Bezug auf die loxodromische Linie:

$$ds\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = \frac{R^3.\sec\Theta^3\sqrt{R^2.\sec\Theta^2-w^2}.dw^4}{\sqrt{(R^2-w^2)^5}}.$$

Ferner ergiebt sich aus den oben für dx und dy, sowie für X, Y, Z aufgestellten Formeln:

$$Ydw - Zdv$$

$$= -\frac{R^2 . \sec\Theta^2 . dw^4}{\sqrt{(R^2-w^2)^3}}\cos\psi - \frac{R^4 . \operatorname{tg}\Theta^2 . \sec\Theta^2 . dw^4}{\sqrt{(R^2-w^2)^5}}\cos\psi$$

$$+\frac{R^3 w . \operatorname{tg}\Theta . \sec\Theta^2 . dw^4}{\sqrt{(R^2-w^2)^5}}\sin\psi$$

$$= \frac{R^3 w . \operatorname{tg}\Theta . \sec\Theta^2 . dw^4}{\sqrt{(R^2-w^2)^5}}\sin\psi - \frac{R^2 . \sec\Theta^2 (R^2 . \sec\Theta^2 - w^2)}{\sqrt{(R^2-w^2)^5}}\cos\psi,$$

$$Zdu - Xdw$$

$$= -\frac{R^4 . \operatorname{tg}\Theta^2 . \sec\Theta^2 . dw^4}{\sqrt{(R^2-w^2)^5}}\sin\psi - \frac{R^3 w . \operatorname{tg}\Theta . \sec\Theta^2 . dw^4}{\sqrt{(R^2-w^2)^5}}\cos\psi$$

$$-\frac{R^2 . \sec\Theta^2 . dw^4}{\sqrt{(R^2-w^2)^3}}\sin\psi$$

$$= -\frac{R^3 w . \operatorname{tg}\Theta . \sec\Theta^2 . dw^4}{\sqrt{(R^2-w^2)^5}}\cos\psi - \frac{R^2 . \sec\Theta^2 (R^2 . \sec\Theta^2 - w^2)}{\sqrt{(R^2-w^2)^5}}\sin\psi,$$

$$Xdv - Ydu$$

$$= -\frac{R^2 w . \sec\Theta^2 . dw^4}{(R^2-w^2)^2}(\sin\psi^2 + \cos\psi^2) = -\frac{R^2 w . \sec\Theta^2 . dw^4}{(R^2-w^2)^2};$$

und wir erhalten daher:

20)

$$\cos\lambda = \frac{w}{\sqrt{R^2 . \sec\Theta^2 - w^2}}\sin\Theta . \cos\psi - \frac{\sqrt{R^2 . \sec\Theta^2 - w^2}}{R}\cos\Theta . \cos\psi,$$

$$\cos\mu = -\frac{w}{\sqrt{R^2 . \sec\Theta^2 - w^2}}\sin\Theta . \cos\psi - \frac{\sqrt{R^2 . \sec\Theta^2 - w^2}}{R}\cos\Theta . \sin\psi,$$

$$\cos\nu = -\frac{w\sqrt{R^2-w^2}}{R\sqrt{R^2 . \sec\Theta^2 - w^2}}\cos\Theta;$$

oder, da

$$\frac{w}{R} = \sin\varphi \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{R^2-w^2}}{R} = \cos\varphi$$

ist:

$$\cos\lambda$$

$$= \frac{w}{\sqrt{R^2.\sec\Theta^2-w^2}}\sin\Theta.\sin\psi - \frac{\sqrt{R^2.\sec\Theta^2-w^2}}{w}\cos\Theta.\cos\psi.\sin\varphi,$$

$$\cos\mu$$

$$= -\frac{w}{\sqrt{R^2.\sec\Theta^2-w^2}}\sin\Theta.\cos\psi - \frac{\sqrt{R^2.\sec\Theta^2-w^2}}{w}\cos\Theta.\sin\psi.\sin\varphi,$$

$$\cos\nu = -\frac{w}{\sqrt{R^2.\sec\Theta^2-w^2}}\cos\Theta.\cos\varphi.$$

Führen wir einen Hülfswinkel ω von der Beschaffenheit ein, dass

$$R.\sec\Theta.\sin\omega = w, \quad \text{also} \quad R.\sec\Theta.\cos\omega = \sqrt{R^2.\sec\Theta^2-w^2}$$

ist, so können wir den erhaltenen Formeln auch folgende einfachere Form geben:

$$\cos\lambda = \operatorname{tg}\omega.\sin\Theta.\sin\psi - \operatorname{cotg}\omega.\cos\Theta.\cos\psi.\sin\varphi,$$

$$\cos\mu = -\operatorname{tg}\omega.\sin\Theta.\cos\psi - \operatorname{cotg}\omega.\cos\Theta.\sin\psi.\sin\varphi,$$

$$\cos\nu = -\operatorname{tg}\omega.\cos\Theta.\cos\varphi.$$

§. 21.

Für die Krümmung der loxodromischen Linie in ihrer Krümmungsebene oder ihre sogenannte erste Krümmung, welche, wie wir §. 12. gesehen haben, durch den Ausdruck $\frac{d\tau}{ds}$ gemessen wird, wenn $d\tau$ den von zwei einander unendlich nahe liegenden Tangenten gebildeten sogenannten Contingenzwinkel bezeichnet, welcher Ausdruck sowohl für die ebenen Curven, wie für die Curven im Raume den Werth $\frac{1}{\varrho}$ hat, erhalten wir in Bezug auf die Kugel aus der unter 19) für ϱ gefundenen Formel:

21) $$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\sqrt{R^2.\sec\Theta^2-w^2}}{R.\sec\Theta\sqrt{R^2-w^2}}.$$

Wie wir aber schon §. 12. erwähnt haben, giebt es für die nicht in derselben Ebene liegenden Curven ausser dieser ersten

Krümmung noch eine zweite, welche ebenso von dem durch zwei auf einander folgenden Krümmungsebenen gebildeten sogenannten Torsionswinkel abhängt, wie die erste Krümmung von dem sogenannten Contingenzwinkel. Bezeichnen λ', μ', ν' die Winkel, welche die Normale auf der Krümmungsebene im Punkte (u, v, w) respective mit den Parallelen zu den Axen der x, der y und der z bildet, so hat man, in Rücksicht auf die für die Krümmungsebene in §. 10 aufgestellte Gleichung (a), nach den Elementen der analytischen Geometrie:

$$\cos\lambda' = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \cos\mu' = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\nu' = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Bezeichnet ferner ϑ den Winkel, welchen die Normale auf der Krümmungsebene im Punkte (u, v, w) mit der Normale auf der Krümmungsebene in einem anderen Punkte $(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)$ bildet, so hat man, wenn die Cosinus der Winkel, welche die Normale auf der Krümmungsebene im Punkte $(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)$ mit den Parallelen zu den Axen der x, der y und der z bildet, respective mit

$$\cos\lambda' + \Delta.\cos\lambda', \quad \cos\mu' + \Delta.\cos\mu', \quad \cos\nu' + \Delta.\cos\nu'$$

bezeichnet werden, nach den Elementen der analytischen Geometrie die Gleichungen:

$$\cos\vartheta = \cos\lambda'(\cos\lambda' + \Delta.\cos\lambda') + \cos\mu'(\cos\mu' + \Delta.\cos\mu') + \cos\nu'(\cos\nu' + \Delta.\cos\nu'),$$

$$1 = \cos\lambda'^2 + \cos\mu'^2 + \cos\nu'^2,$$

$$1 = (\cos\lambda' + \Delta.\cos\lambda')^2 + (\cos\mu' + \Delta.\cos\mu')^2 + (\cos\nu' + \Delta.\cos\nu')^2;$$

addirt man die beiden letzten dieser drei Gleichungen, und subtrahirt von der Summe die erste Gleichung, nachdem man dieselbe mit 2 multiplicirt hat, so erhält man:

$$\begin{aligned}2(1-\cos\vartheta) = \; & \cos\lambda'^2 - 2.\cos\lambda'(\cos\lambda' + \Delta.\cos\lambda') + (\cos\lambda' + \Delta.\cos\lambda')^2 \\ & + \cos\mu'^2 - 2.\cos\mu'(\cos\mu' + \Delta.\cos\mu') + (\cos\mu' + \Delta.\cos\mu')^2 \\ & + \cos\nu'^2 - 2.\cos\nu'(\cos\nu' + \Delta.\cos\nu') + (\cos\nu' + \Delta.\cos\nu')^2,\end{aligned}$$

woraus sich mit Hülfe der zweiten von den drei oben aufgestellten Gleichungen ergiebt:

$$(2\sin\frac{\vartheta}{2})^2 = (\Delta.\cos\lambda')^2 + (\Delta.\cos\mu')^2 + (\Delta.\cos\nu')^2.$$

Wenn nun der Winkel ϑ, den die Normalen auf den beiden Krümmungsebenen mit einander bilden, unendlich klein wird, so werden auch die Winkel, welche die beiden Normalen mit den Axen der x, der y, und der z bilden, unendlich wenig von einander verschieden, und wenn daher $d\vartheta$ den unendlich kleinen Winkel bezeichnet, welchen die Normalen der einander unendlich nahe liegenden beiden Krümmungsebenen, von denen sich die eine auf den Punkt (u, v, w) und die andere auf den Punkt $(u+du, v+dv, w+dw)$ bezieht, mit einander bilden, so hat man in dem Obigen $d.\cos\lambda'$, $d.\cos\mu'$, $d.\cos\nu'$ respective für $\Delta.\cos\lambda'$, $\Delta.\cos\mu'$, $\Delta.\cos\nu'$ zu setzen, und da ausserdem der Sinus eines unendlich kleinen Bogens mit diesem Bogen selbst zusammenfällt, so ergiebt sich aus der zuletzt erhaltenen Gleichung:

$$d\vartheta^2 = (d.\cos\lambda')^2 + (d.\cos\mu')^2 + (d.\cos\nu')^2,$$

oder wenn man für $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$ die oben dafür aufgestellten Werthe substituirt:

$$d\vartheta^2 = (d.\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}})^2 + (d.\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}})^2 + (d.\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}})^2.$$

Durch Differentiation der auf der rechten Seite dieser Gleichung vorkommenden Brüche erhält man hieraus nach einigen leichten Reductionen:

$$d\vartheta^2 = \frac{(X^2+Y^2+Z^2)(dX^2+dY^2+dZ^2)-(XdX+YdY+ZdZ)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)^2}$$

$$= \frac{(XdY-YdX)^2+(ZdX-XdZ)^2+(YdZ-ZdY)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)^2}.$$

Nach §. 10. hat man nun:

$$X = dv.d^2w - dw.d^2v,\quad Y = dw.d^2u - du.d^2w,\quad Z = du.d^2v - dv.d^2u,$$

und es ist darnach:

$$dX = dv.d^3w - dw.d^3v,\quad dY = dw.d^3u - du.d^3w,$$
$$dZ = du.d^3v - dv.d^3u,$$

so dass sich ergiebt:

$$\frac{XdY - YdX}{dw} = \frac{ZdX - XdZ}{dv} = \frac{YdZ - ZdY}{du}$$

$$= dw(d^2ud^3v - d^2vd^3u) + dv(d^2wd^3u - d^2ud^3w) + du(d^2vd^3w - d^2wd^3v),$$

also:

$$(XdY - YdX)^2 + (ZdX - XdZ)^2 + (YdZ - ZdY)^2$$

$$= (du^2 + dv^2 + dw^2) \{ dw(d^2ud^3v - d^2vd^3u) + dv(d^2wd^3u - d^2ud^3w)$$

$$+ du(d^2vd^3w - d^2wd^3v) \}^2;$$

setzt man daher wieder, wie es schon im Früheren geschehen ist:

$$du^2 + dv^2 + dw^2 = ds^2,$$

so erhält man aus der oben für $d\vartheta^2$ entwickelten Gleichung:

$$\frac{d\vartheta}{ds}$$

$$= \frac{dw(d^2ud^3v - d^2vd^3u) + dv(d^2wd^3u - d^2ud^3w) + du(d^2vd^3w - d^2wd^3v)}{(dvd^2w - dwd^2v)^2 + (dwd^2u - dud^2w)^2 + (dud^2v - dvd^2u)^2}.$$

So wie nun der Ausdruck $\frac{d\tau}{ds}$, wenn $d\tau$ den von zwei einander unendlich nahe liegenden Tangenten gebildeten Contingenzwinkel bezeichnet, das Maass der ersten Krümmung oder der Krümmung einer Curve in ihrer Krümmungsebene angiebt, so stellt der Ausdruck $\frac{d\vartheta}{ds}$ offenbar das Maass der zweiten Krümmung, d. h. der Windung der Elemente um einander, dar, welche den Curven im Raume ausser ihrer Krümmung in der Osculationsebene eigenthümlich ist.

Während der Ausdruck der ersten Krümmung nur von den Differentialien der ersten und zweiten Ordnung von den Coordinaten x, y, z abhängig war, kommen für den Ausdruck der zweiten Krümmung, wie wir sehen, auch die Differentialien der dritten Ordnung in Betracht, und um daher für die loxodromische Linie auf der Kugel auch das Maass der zweiten Krümmung zu finden, müssen wir für dieselbe erst diese dritten Differentialien durch weitere Differenzirung der schon erhaltenen zweiten Differentialien herleiten.

Aus den im §. 20. für d^2x und d^2y gefundenen Ausdrücken erhalten wir, wenn wir dieselben noch einmal in Bezug auf z als unabhängige Variable differenziren:

$$d^3x = -\frac{3R^2 z \sec\Theta^2 . dz^3}{\sqrt{(R^2-z^2)^5}}\cos\psi + \frac{R^2 . \sec\Theta^2 . dz^2 . d\psi}{\sqrt{(R^2-z^2)^3}},$$

oder da nach dem in §. 11. für $d\psi$ gefundenen Ausdruck in Bezug auf die Kugel

$$d\psi = \frac{R . \operatorname{tg}\Theta . dz}{R^2 - z^2}$$

ist:

$$d^3x = -\frac{3R^2 z \sec\Theta^2 dz^3}{\sqrt{(R^2-z^2)^5}}\cos\psi + \frac{R^3 \operatorname{tg}\Theta . \sec\Theta^2 dz^3}{\sqrt{(R^2-z^2)^5}}\sin\psi,$$

und ebenso erhalten wir:

$$d^3y = -\frac{3R^2 z \sec\Theta^2 . dz^3}{\sqrt{(R^2-z^2)^5}}\sin\psi - \frac{R^3 \operatorname{tg}\Theta . \sec\Theta^2 . dz^3}{\sqrt{(R^2-z^2)^5}}\cos\psi.$$

Aus diesen Formeln, in Verbindung mit den in §. 20. für d^2x d^2y abgeleiteten, ergiebt sich nun:

$$dw(d^2u d^3v - d^2v d^3u) = \frac{R^5 . \operatorname{tg}\Theta . \sec\Theta^4 . dw^6}{(R^2 - w^2)^4},$$

und da wir z als die unabhängige Variable betrachten, also $d^2w = 0$ und $d^3w = 0$ zu setzen haben, so stellt dieser Ausdruck für die loxodromische Linie auf der Kugel den Zähler des im Obigen für $\frac{d\vartheta}{ds}$ entwickelten Bruches dar. Für den Nenner dieses Bruches haben wir nach den in §. 20. für X, Y, Z aufgestellten Ausdrücken:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{R^4 . \sec\Theta^4 (R^2 . \sec\Theta^2 - w^2) dw^6}{(R^2 - w^2)^4},$$

und es ergiebt sich demnach für das Maass der zweiten Krümmung der loxodromischen Linie auf der Kugel:

22) $$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{R . \operatorname{tg}\Theta}{R^2 . \sec\Theta^2 - w^2}.$$

Da dieser Ausdruck sowohl für $\Theta = 0$ als auch für $\Theta = 90^0$ verschwindet, so erhellt, dass die Curve in diesen beiden Fällen eine ebene wird, was auch an sich klar ist, denn im ersten Falle fällt die loxodromische Linie mit dem Meridiane und im zweiten mit einem Parallelkreise zusammen. Für jeden anderen Werth von Θ wird der gefundene Ausdruck offenbar um so grösser, je grösser w wird, und es nimmt daher die zweite Krümmung der

loxodromischen Linie von dem Aequator nach den Polen hin zu. Für $w=0$ erhalten wir

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{\sin\Theta.\cos\Theta}{R}=\frac{\sin 2\Theta}{2R},$$

und für $w=R$ würde

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{1}{R.\mathrm{tg}\Theta}=\frac{\mathrm{cotg}\,\Theta}{R}$$

werden, welchem Werthe sich also dass Maass der zweiten Krümmung nach den Polen hin ohne Ende nähert.

§. 22.

Wir haben §. 15. gesehen, dass die Tangenten der loxodromischen Linie alle auf einer abwickelbaren Fläche liegen, und es lässt sich nachweisen, dass dasselbe auch für die graden Durchschnittslinien der einander unendlich nahe liegenden Normalebenen stattfindet. Wir haben schon bemerkt, dass die Fläche, welche durch eine sich im Raume auf beliebige Weise bewegende grade Linie erzeugt wird, im Allgemeinen nicht eine abwickelbare ist, sondern dass dieses nur dann der Fall ist, wenn immer zwei einander unendlich nahe liegende Erzeugungslinien sich treffen, oder wenn es für alle graden Erzeugungslinien eine Umhüllungslinie giebt, welche sie nach einander in verschiedenen Punkten berühren. Dass eine sich auf beliebige Weise im Raume bebewegende Linie im Allgemeinen nicht eine solche Umhüllungslinie hat, lässt sich leicht auf analytischem Wege nachweisen.

Werden nämlich die Gleichungen einer beliebigen Linie dargestellt durch

$$(\alpha)\qquad f_1(x, y, z, \alpha)=0,\quad f_2(x, y, z, \alpha)=0,$$

worin x, y, z die veränderlichen Coordinaten und α einen willkürlichen Parameter bezeichnet, dessen stetige Veränderung die stetigen Veränderungen bestimmt, welche die Linie in ihrer Form und Lage erfahren kann: so werden die Gleichungen der Umhüllungslinie zwischen x, y, z, wenn sie existirt, durch die Elimination von α zwischen den beiden vorhergehenden Gleichungen und ihren Ableitungen in Beziehung auf α, nämlich

$$(\alpha')\qquad \frac{df_1}{d\alpha}=0,\quad \frac{df_2}{d\alpha}=0$$

gegeben. Man hat aber auf diese Weise mehr Gleichungen, als zur Bestimmung der beiden Gleichungen der Umhüllungslinie erforderlich sind, wenn nicht zwei von den drei Gleichungen, die sich durch die Elimination von α aus den vier Gleichungen (α) und (α') ergeben, identisch werden, und es wird daher nur in diesem Falle der gegebenen Linie eine Umhüllungslinie zukommen.

Für die Normalebene in einem Punkte (u, v, w) hat man nun nach §. 11. die Gleichung:

$$(b) \qquad (x-u)du+(y-v)dv+(z-w)dw=0,$$

und für die Durchschnittslinie der beiden einander unendlich nahe liegenden Normalebenen in den Punkten

$$(u,\ v,\ w) \text{ und } (u+du,\ v+dv,\ w+dw)$$

hat man ausser dieser Gleichung (b) noch die nach §. 11. sich durch Differenzirung daraus ergebende Gleichung:

$$(b') \qquad (x-u)d^2u+(y-v)d^2v+(z-w)d^2w-ds^2=0.$$

Als den vorhin mit α bezeichneten Parameter können wir hier die unabhängige Variable betrachten, wovon, wie schon früher erwähnt ist, u, v, w als Functionen anzusehen sind, und da die Gleichung (b') aus der Gleichung (b) bereits durch eine Differenzirung nach dieser unabhängigen Veränderlichen abgeleitet ist, so kömmt durch eine Differenzirung der beiden Gleichungen (b) und (b') nach α nur noch eine Gleichung hinzu, nämlich die Gleichung:

$$(b'')$$

$$(x-u)d^3u+(y-v)d^3v+(z-w)d^3w-3(du\,.\,d^2u+dv\,.\,d^2v+dw\,.\,d^2w)=0.$$

Wir kommen also für die Durchschnittslinien der auf einander folgenden Normalebenen allerdings auf den Ausnahmefall der Existenz einer Umhüllungslinie, und die Fläche, welche durch die Aufeinanderfolge jener Durchschnittslinien erzeugt wird, ist demnach eine abwickelbare, welche diese Umhüllungslinie zur sogenannten Rückkehrkannte oder Wendungscurve hat. Die Gleichung dieser Fläche erhält man offenbar, wenn man aus den Gleichungen (b) und (b') vermittelst der Gleichungen der gegebenen Curve und ihrer Ableitungen die Grössen u, v, w und ihre Differentiale eliminirt.

§. 23.

Für die loxodromische Linie auf der Kugel hätten wir des

Beweises, dass die Durchschnittslinien der auf einander folgenden Normalebenen alle auf einer abwickelbaren Fläche liegen, nicht bedurft; denn da für diese die Normalebenen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, was überhaupt für alle auf der Kugelfläche liegende doppelt gekrümmte Curven gilt, so erhellt von selbst, dass für diese die Fläche, welche die Durchschnittslinie zweier auf einander folgenden Normalebenen zur Erzeugungslinie hat, eine abwickelbare, nämlich eine Kegelfläche ist, deren Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt. Was die Gleichung dieser Fläche betrifft, so haben wir nach §. 17. für die Normalebene der loxodromischen Linie in einem Punkte (u, v, w), dessen geographische Breite und Länge respective φ und ψ sind, die Gleichung:

16)

$$z.\sec\psi.\cos\varphi + y(\operatorname{tg}\Theta - \operatorname{tg}\psi.\sin\varphi) - x(\operatorname{tg}\Theta.\operatorname{tg}\psi + \sin\varphi) = 0.$$

Für die Gleichung (b') erhalten wir nach den in §. 20. für d^2x, d^2y und ds gefundenen Formeln in Bezug auf unsere Curve die Gleichung:

$$(x-u)\cos\psi + (y-v)\sin\psi + \sqrt{R^2-w^2} = 0;$$

da aber der Punkt (u, v, w) auf der Oberfläche der Kugel liegt, so ist:

$$u = R.\cos\psi.\cos\varphi,\quad v = R.\sin\psi.\cos\varphi,\quad w = R.\sin\varphi;$$

also:

$$u.\cos\psi + v.\sin\psi = R.\cos\varphi = \sqrt{R^2-w^2},$$

und wir erhalten daher für die Gleichung (b') die folgende:

23) $$x.\cos\psi + y.\sin\psi = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{x}{y},\quad \sec\psi = \pm\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

Da nun ferner nach der Gleichung der loxodromischen Linie, wi wir schon §. 15. gesehen haben:

$$\sin\varphi = \frac{e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}} - e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}}{e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}} + e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}},\quad \cos\varphi = \frac{2}{e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}} + e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}}$$

ist: so erhalten wir, wenn wir diese Werthe von $\operatorname{tg}\psi$, $\sec\psi$, $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ in die Gleichung der Normalebene 16) substituiren, die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}\pm\dfrac{2z\sqrt{x^2+y^2}}{y}+y\{\operatorname{tg}\Theta(e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}+e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}})+\dfrac{x}{y}(e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}-e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}})\}\\ \qquad +x\{\dfrac{x}{y}\operatorname{tg}\Theta(e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}+e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}})-(e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}-e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}})\}\end{array}\right\}=0,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\pm 2z+\operatorname{tg}\Theta\sqrt{x^2+y^2}(e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}+e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}})=0$$

oder:

$$24)\qquad \frac{\operatorname{tg}\Theta}{2}(e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}+e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}})=\pm\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Wenn wir in dieser Gleichung

$$\psi=\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(-\frac{x}{y})$$

setzen, so haben wir in Bezug auf das System der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z die Gleichung der abwickelbaren Fläche, welche die grade Durchschnittsline zweier einander unendlich nahe liegenden Normalebenen zur Erzeugungslinie hat. Da diese Fläche in unserem Falle, wie wir schon oben erwähnt haben, und wie auch aus der gefundenen Gleichung derselben hervorgeht, eine Kegelfläche ist, deren Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt, so reducirt sich hier die Umhüllungslinie, von der wir oben gehandelt, auf einen Punkt, nämlich auf den Mittelpunkt der Kugel.

Der für die Fläche gefundenen Gleichung 24) können wir noch eine andere Form geben, indem wir statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z wieder Polarcoordinaten einführen. Bezeichnen wir den Radius Vector vom Mittelpunkte der Kugel aus mit r, den Winkel, um welchen derselbe gegen die Ebene der xy oder gegen die Ebene des Aequators geneigt ist, d. h. die geographische Breite, wieder mit φ, und führen wir statt unserer früheren Länge ψ einen Winkel ψ' ein, der um einen Quadranten von derselben verschieden ist, setzen wir nämlich:

$$\psi'=\frac{\pi}{2}+\psi,$$

so dass wir haben:

$$x = -r.\cos\varphi.\sin\psi', \quad y = r.\cos\varphi.\cos\psi', \quad z = r.\sin\varphi;$$

dann wird offenbar:

$$-\frac{x}{y} = \mathrm{tg}\,\psi', \quad \text{also} \quad \psi' = \mathrm{Arc\,tg}\left(-\frac{x}{y}\right)$$

und

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \mathrm{tg}\,\varphi,$$

und wir bekommen für die Kegelfläche, auf welcher alle Durchschnittslinien der auf einander folgenden Normalebenen liegen, statt der Gleichung 24) die Gleichung:

$$25) \qquad \frac{\mathrm{tg}\,\Theta}{2}\left(e^{\frac{\psi'}{\mathrm{tg}\,\Theta}} + e^{-\frac{\psi'}{\mathrm{tg}\,\Theta}}\right) = \pm\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Der Durchschnitt dieser Fläche mit der Oberfläche der Kugel ist daher nicht die loxodromische Linie selbst, wie man es wohl in Lehrbüchern der Geometrie (vgl. Brandes, Lehrbuch der höheren Geometrie, Th. II., §. 372.) angegeben findet, sondern die gefundene Gleichung ist die einer anderen, oder wegen des doppelten Vorzeichens vielmehr zweier zu beiden Seiten des Aequators symmetrisch liegender Curven auf der Oberfläche der Kugel, nämlich von zwei sphärischen Kettenlinien mit dem Parameter Θ, deren Scheitel auf dem durch den Anfangspunkt der ψ' gelegten Meridian liegen. Von dieser sogenannten sphärischen Kettenlinie, welche in Bezug auf die Kugel ganz ähnliche Eigenschaften besitzt, wie die ebene Kettenlinie in Bezug auf die Ebene, hat schon Gudermann gezeigt, dass sie mit der loxodromischen Linie in einem besonderen Zusammenhange steht (vgl. Crelle's Journal für Mathematik, Bd. XI., S. 395.); dieser von Gudermann aufgestellte Zusammenhang würde sich auch aus dem, was wir in diesem Paragraphen ermittelt haben, leicht nachweisen lassen.

§. 24.

Wir haben §. 11. gesehen, dass der Krümmungsmittelpunkt der Durchschnittspunkt zweier auf einander folgender Normalebenen und der entsprechenden Krümmungsebene ist. Wenn wir daher die Coordinaten dieses Punktes mit x, y, z bezeichnen, so haben wir zur Bestimmung derselben ausser den beiden Glei-

chungen 16) und 23) des vorigen Paragraphen noch die Gleichung der Krümmungsebene, welche nach §. 18. die Form hat:

$$26)\qquad \operatorname{tg}\Theta(z-R.\sin\varphi)=\cos\varphi(y.\cos\psi-x.\sin\psi).$$

Wir erhalten daher die beiden Gleichungen der Linie, auf welcher alle Krümmungsmittelpunkte liegen, wenn wir aus diesen drei Gleichungen vermittelst der Gleichung der loxodromischen Linie die beiden Grössen φ und ψ eliminiren. Die eine dieser beiden Gleichungen wird offenbar die im vorigen Paragraphen gefundene Gleichung 24) oder 25) sein, und es liegt daher die Curve, welche den Ort der Krümmungsmittelpunkte bildet, auf der Kegelfläche, welche die grade Durchschnittslinie zweier einander unendlich nahe liegenden Normalebenen zur Erzeugungslinie hat.

Wenden wir daher statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z wieder die im vorigen Paragraphen eingeführten Polarcoordinaten r, φ und ψ' an, so werden wir für die Bestimmung der Linie, auf welcher alle Krümmungsmittelpunkte liegen, ausser der Gleichung 25) nur noch eine Relation aufzustellen haben, welche die Abhängigkeit des Radius Vector r von φ oder ψ' ausdrückt. Für die Coordinaten x, y, z des Krümmungsmittelpunktes in Bezug auf einen Punkt (u, v, w) haben wir, wenn wir, wie wir schon in §. 20. gethan haben, die Winkel, welche der Krümmungshalbmesser ϱ mit den Axen der x, y, z bildet, respective mit λ, μ, ν bezeichnen:

$$x-u=\varrho.\cos\lambda,\quad y-v=\varrho.\cos\mu,\quad z-w=\varrho.\cos\nu;$$

und wir erhalten, wenn wir für ϱ, $\cos\lambda$, $\cos\mu$ und $\cos\nu$ die in §. 19. und §. 20. unter den Formeln 19) und 20) dafür gefundenen Werthe einführen:

$$x-u=\frac{R.\sec\Theta.w\sqrt{R^2-w^2}}{R.\sec\Theta^2-w^2}\sin\Theta.\sin\psi-\sqrt{R^2-w^2}.\cos\psi,$$

$$y-v=-\frac{R.\sec\Theta.w\sqrt{R^2-w^2}}{R^2.\sec\Theta^2-w^2}\sin\Theta.\cos\psi-\sqrt{R^2-w^2}.\sin\psi,$$

$$z-w=-\frac{\sec\Theta.w(R^2-w^2)}{R^2.\sec\Theta^2-w^2}\cos\Theta;$$

da aber

$$u=R.\cos\varphi.\cos\psi=\sqrt{R^2-w^2}.\cos\psi,$$

$$v=R.\cos\varphi.\sin\psi=\sqrt{R^2-w^2}.\sin\psi$$

ist, so ergeben sich hieraus die Gleichungen:

$$27)\quad \begin{cases} x = \dfrac{R.\operatorname{tg}\Theta.w\sqrt{R^2-w^2}}{R^2.\sec\Theta^2-w^2}\sin\psi, \\[2ex] y = -\dfrac{R.\operatorname{tg}\Theta.w\sqrt{R^2-w^2}}{R^2.\sec\Theta^2-w^2}\cos\psi, \\[2ex] z = \dfrac{R^2.\operatorname{tg}\Theta^2.w}{R^2.\sec\Theta^2-w^2}. \end{cases}$$

Wir erhalten daher, da

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

zu setzen ist:

$$r^2=\frac{R^2\operatorname{tg}\Theta^2.w^2(R^2-w^2+R^2\operatorname{tg}\Theta^2)}{(R^2.\sec\Theta^2-w^2)^2}$$

$$=\frac{R^2\operatorname{tg}\Theta^2w^2}{R^2.\sec\Theta^2-w^2},$$

und vergleichen wir diesen Werth von r^2 mit dem unter 27) gefundenen Werthe von z, so bekommen wir die Gleichung:

$$28)\qquad r^2=z.w.$$

Vermöge der Gleichung der loxodromischen Linie ist nun:

$$w=R.\sin\varphi=R.\frac{e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}-e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}}{e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}+e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}},$$

und da nach der Gleichung 24)

$$e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}+e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}=\pm\frac{2z\operatorname{cotg}\Theta}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

also

$$e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}-e^{-\frac{\psi}{\operatorname{tg}\Theta}}=\pm\frac{2\sqrt{z^2.\operatorname{cotg}\Theta^2-(x^2+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ist, so verwandelt sich die Gleichung 28), mit Rücksicht darauf, dass r^2 nur einen positiven Werth haben kann, in die folgende:

$$r^2=\sqrt{z^2-\operatorname{tg}\Theta^2.(x^2+y^2)},$$

und es ergiebt sich daher, da nach den im vorigen Paragraphen

zwischen den rechtwinkligen und den neu eingeführten Polar-Coordinaten aufgestellten Relationen

$$z^2 = r^2 . \sin\varphi^2, \quad x^2 + y^2 = r^2 . \cos\varphi^2,$$

ist, als zweite Gleichung der Linie, auf welcher alle Krümmungsmittelpunkte liegen:

29) $$r = R\sqrt{\sin\varphi^2 - \operatorname{tg}\Theta^2 . \cos\varphi^2},$$

wofür wir auch schreiben können:

29ᵃ) $$r = R . \cos\varphi\sqrt{\operatorname{tg}\varphi^2 - \operatorname{tg}\Theta^2}$$

oder

29ᵇ) $$r = R . \sec\Theta\sqrt{\sin\varphi^2 - \sin\Theta^2}.$$

Diese Gleichungen 29) hätten wir einfacher aus der Gleichung 26) mit Hülfe der Gleichungen 16) und 23) herleiten können, aber wir haben die obige Ableitung vorgezogen, weil wir auf diese Weise zugleich die Abhängigkeit der Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes von den Grössen w und ψ in den Formeln 27) dargestellt haben. Aus diesen geht auch hervor, was schon an sich ersichtlich ist, dass für $\Theta = 0$, d. h. wenn die loxodromische Linie in einen Meridian übergeht, der Ort der Krümmungsmittelpunkte sich auf den Mittelpunkt der Kugel, und für $\Theta = 90^0$, d. h. wenn die loxodromische Linie ein Parallelkreis des Aequators wird, auf den Mittelpunkt dieses Parallelkreises reducirt; in diesem letzteren Falle liefern nämlich die Formeln 27) die Werthe:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = w.$$

In jedem anderen Falle wird der Ort der Krümmungsmittelpunkte ausgedrückt durch die beiden Gleichungen 25) und 29).

Aus den Gleichungen 29ᵃ) und 29ᵇ) ist ersichtlich, dass der numerische Werth von φ nicht kleiner sein darf als der von Θ, wenn r einen reellen Werth erhalten soll; und in der That hat auch, wie aus der Gleichung 25) hervorgeht, für alle Punkte der Linie, welche den Ort der Krümmungsmittelpunkte bildet, φ einen Werth, der numerisch nicht kleiner ist als der von Θ, denn der in der erwähnten Gleichung vorkommende Ausdruck

$$e^{\frac{\psi'}{\operatorname{tg}\Theta}} + e^{-\frac{\psi'}{\operatorname{tg}\Theta}}$$

bekömmt, wie aus den Elementen der Analysis bekannt ist, für jeden Werth von ψ' einen Werth, welcher nicht kleiner wird als

die Zahl 2. Es bildet also der Radius Vector der Linie, auf welcher alle Krümmungsmittelpunkte liegen, mit der Ebene des Aequators einen Winkel, der nicht kleiner wird als Θ, was wir auch schon daraus hätten schliessen können, dass die Durchschnittslinie der Kegelfläche, auf welcher jene Linie sich befindet, mit der Oberfläche der Kugel eine spärische Kettenlinie mit dem Parameter Θ ist; denn der Scheitel einer solchen Linie, d. h. der Punkt derselben, welcher der Ebene der xy am nächsten kömmt, hat von dieser Ebene die sphärische Entfernung Θ.

(Man vergleiche wieder die Abhandlung von Gudermann in Crelle's Journal, Bd. XI., S. 394.)

§. 25.

Da bei einer ebenen Curve die zu den verschiedenen Punkten der Curve gehörigen Krümmungshalbmesser alle in der Ebene der Curve liegen, so schneiden sie sich nach einander, und bilden durch ihre Durchschnittspunkte eine Curve, an welcher sie alle Tangenten sind, und welche daher die Umhüllungslinie der verschiedenen Krümmungshalbmesser ist. Diese Curve hat offenbar die Eigenschaft, dass, wenn man um dieselbe einen Faden gelegt denkt, dessen einer Endpunkt, während der Faden gespannt ist, auf einen Punkt der gegebenen Curve fällt, durch diesen Punkt, wenn der Faden unter fortwährender Spannung von der Curve abgewickelt wird, die ursprüngliche Curve beschrieben wird. Daher nennt man auch diese Curve die Evolute der gegebenen und die gegebene Curve in Beziehung auf dieselbe umgekehrt ihre Evolvente.

Da bei den ebenen Curven der Krümmungsmittelpunkt durch den Durchschnitt zweier auf einander folgender Krümmungshalbmesser bestimmt wird, so fällt nach dem Dargelegten bei ihnen die Evolute offenbar mit dem geometrischen Orte der Krümmungsmittelpunkte zusammen. Dies ist aber bei den Curven doppelter Krümmung nicht mehr der Fall; bei ihnen giebt es überhaupt für das System der Krümmungshalbmesser keine Umhüllungslinie, und es wird daher hier die Linie, welche den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte bildet, auch keine Evolute der gegebenen Curve sein.

Dass, wenn die Curve keine ebene ist, die Krümmungshalbmesser derselben keine Umhüllungslinie haben, können wir mit Hülfe des in §. 22. über die Bestimmung der Umhüllungslinien Gesagten leicht nachweisen.

Die Richtung des Krümmungshalbmessers wird offenbar durch den Durchschnitt der Krümmungsebene und der Normalebene bestimmt, und es sind daher die Gleichungen der Linie, auf welcher sich der Krümmungshalbmesser ϱ für einen Punkt (u, v, w) befindet, die schon früher aufgestellten Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad X(x-u)+Y(y-v)+Z(z-w)=0,$$

$$\text{(b)} \qquad (x-u)du+(y-v)dv+(z-w)dw=0.$$

Um daher die Gleichungen der Umhüllungscurve der graden Linien ϱ, wenn sie existirt, zu erhalten, muss man mit diesen Gleichungen ihre Ableitungen in Beziehung auf eine unabhängige Veränderliche, von welcher u, v, w als Functionen betrachtet werden, verbinden. Auf diese Weise erhält man, da nach §. 10. die Gleichung

$$\text{(a')} \qquad Xdu+Ydv+Zdw=0$$

stattfindet, für die in Rede stehende Umhüllungscurve noch die beiden Gleichungen:

$$\text{(a}_1'\text{)} \qquad (x-u)dX+(y-v)dY+(z-w)dZ=0,$$

$$\text{(b')} \qquad (x-u)d^2u+(y-v)d^2v+(z-w)d^2w-ds^2=0.$$

Aus den vier Gleichungen (a), (b), (a_1') und (b') ergiebt sich durch Elimination der Binome $x-u$, $y-v$, $z-w$ eine Bedingungsgleichung, welcher die Coördinaten u, v, w und ihre Differentiale genügen müssen, damit die graden Linien ϱ eine Umhüllungslinie haben können. Die Gleichungen (a), (b) und (b') geben für die drei Binome die schon in §. 11. gefundenen Werthe:

$$x-u=\frac{ds^2(Ydw-Zdv)}{X^2+Y^2+Z^2},$$

$$y-v=\frac{ds^2(Zdu-Xdw)}{X^2+Y^2+Z^2},$$

$$z-w=\frac{ds^2(Xdv-Ydu)}{X^2+Y^2+Z^2};$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung (a_1') substituirt, so erhält man mit Rücksicht auf die in §. 21. für $X, Y, Z; dX, dY, dZ$ aufgestellten Formeln die Gleichung:

$$dw(d^2ud^3v-d^2vd^3u)+dv(d^2wd^3u-d^2ud^3w)+du(d^2vd^3w-d^2wd^3v)=0.$$

Wenn aber diese Gleichung stattfindet, so erhält der in §. 21. für

$\frac{d\vartheta}{ds}$ gefundene Ausdruck den Werth Null, d. h. es verschwindet die zweite Krümmung der Curve, oder die Curve ist eine ebene, und es ist damit nachgewiesen, dass für eine Curve doppelter Krümmung die auf einander folgenden Krümmungshalbmesser keine Umhüllungslinie haben, deren Tangenten sie alle sind, dass also für eine solche der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte keine Evolute der gegebenen Curve ist.

§. 26.

Daraus, dass die Linie der *Krümmungsmittelpunkte* keine Evolute mehr ist, wenn die gegebene Curve keine ebene ist, darf man jedoch nicht schliessen, dass die Linien von doppelter Krümmung keine Evoluten haben können, sondern es kommen denselben sogar, wie Monge zuerst gezeigt hat, unendlich viele Evoluten zu. Um uns dies deutlich zu machen, müssen wir uns einer geometrischen Construction bedienen.

Es seien (Taf. I. Fig. 2) K, K', K'', ... die Mitten der verschiedenen unter sich als gleich angenommenen Elemente der Curve $MM'M''$...., ferner seien P, P', P'', ... die durch diese Mitten gelegten Normalebenen, welche sich zu zweien in den Geraden AB, $A'B'$, ... schneiden, so dass diese Geraden in ihrer Aufeinanderfolge eine abwickelbare Fläche bilden, welche alle Ebenen P umhüllt. Zieht man dann in der ersten Normalebene P eine Gerade KD beliebig, welche stets normal auf der gegebenen Curve sein wird; zieht man ferner durch den Durchschnittspunkt D dieser Geraden mit der Linie AB und durch den Punkt K' eine andere Gerade $K'DD'$, welche in der zweiten Normalebene P' liegen wird, und hierauf auf dieselbe Weise eine dritte Gerade $K''D'D''$, die in die Ebene P'' fällt, und so fort, so erhält man durch die auf einander folgenden Durchschnitte dieser in den verschiedenen Normalebenen liegenden Linien eine Curve $DD'D''$...., an welcher eben diese Linien Tangenten sind, und man würde daher durch Abwickelung eines um $DD'D''$.... geschlungenen Fadens die Linie $MM'M''$.... beschreiben können, wenn die Theile zweier auf einander folgenden Tangenten an $DD'D''$.... von ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte bis zur Curve $MM'M''$...., z. B. die Stücke DK und DK', einander gleich wären, oder wenn die Punkte D, D', D'', ... von je drei auf einander folgenden Punkten der Curve $MM'M''$.... gleich weit entfernt wären. Dass dies aber der Fall ist, ergiebt sich leicht. Dass z. B. der Punkt D von den Punkten M, M', M'' gleich weit

entfernt ist, folgt daraus, dass die Gerade AB als der Durchschnitt der beiden Ebenen P und P', welche senkrecht auf den Mitten der gleichen Elemente MM' und $M'M''$ stehen, in allen ihren Punkten gleich weit von M, M', M'' entfernt ist, weshalb sie auch die Pollinie des ganzen Bogens $MM'M''$ heisst. Man wird also allerdings die Linie $MM'M''$.... ebenso durch die Abwickelung der Curve $DD'D''$.... erzeugen können, wie man eine ebene Curve durch die Abwickelung ihrer Evolute erzeugen kann, und es wird daher die Curve $DD'D''$.... als eine Evolute der gegebenen Curve $MM'M''$.... zu betrachten sein.

Da aber die erste Normale KD ganz willkürlich in der Ebene P gezogen wurde, so erhält man, wenn man die Richtung dieser Normale ändert, unendlich viele Evoluten der gegebenen Curve, die alle in der abwickelbaren Fläche liegen, welche die Durchschnittslinie zweier auf einander folgenden Normalebenen zur Erzeugungslinie hat, welche Fläche man daher auch wohl die Polfläche nennt. Es haben alle diese Evoluten, ebenso wie es für die Evoluten der ebenen Curven der Fall ist, offenbar die Eigenschaft, dass ihre Tangenten die Tangenten der gegebenen Curve in den entsprechenden Punkten rechtwinklig durchschneiden.

§. 27.

Was die Gleichungen dieser Evoluten betrifft, so hat man zur Bestimmung derselben ausser der Bedingung, dass jede Evolute auf der Polfläche liegt, diejenige, dass der von einem Punkte (x, y, z) der Evolute nach dem entsprechenden Punkte (u, v, w) der gegebenen Curve gezogene Radius die Evolute berührt, welche Bedingung ausgedrückt wird durch das System der beiden Gleichungen:

$$x-u=\frac{dx}{dz}(z-w),$$

$$y-v=\frac{dy}{dz}(z-w).$$

Da für die loxodromische Linie auf der Kugel nach den früheren Bezeichnungen

$$u = R.\cos\varphi.\cos\psi = \frac{2R}{e^{\frac{\psi}{tg\Theta}} + e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}}\cos\psi,$$

$$v = R.\cos\varphi.\sin\psi = \frac{2R}{e^{\frac{\psi}{tg\Theta}} + e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}}\sin\psi,$$

$$w = R.\sin\varphi = R\frac{e^{\frac{\psi}{tg\Theta}} - e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}}{e^{\frac{\psi}{tg\Theta}} + e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}}$$

ist, so erhalten wir für die Evoluten dieser Curve in Bezug auf das rechtwinklige Coordinatensystem der xyz ausser der in §. 23. gefundenen Gleichung der Polfläche 24) die beiden gleichzeitigen Differentialgleichungen:

$$x(e^{\frac{\psi}{tg\Theta}} + e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}) - 2R.\cos\psi$$

$$= \frac{dx}{dz}\{z(e^{\frac{\psi}{tg\Theta}} + e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}) - R(e^{\frac{\psi}{tg\Theta}} - e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}})\},$$

$$y(e^{\frac{\psi}{tg\Theta}} + e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}) - 2R.\sin\psi$$

$$= \frac{dy}{dz}\{z(e^{\frac{\psi}{tg\Theta}} + e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}) - R(e^{\frac{\psi}{tg\Theta}} - e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}})\},$$

welche beiden Gleichungen sich aber auf Eine Differentialgleichung mit nur zwei veränderlichen Grössen reduciren lassen. Multipliciren wir nämlich die erste der beiden Gleichungen mit x, die zweite mit y, so erhalten wir, da nach der für alle Punkte der Polfläche geltenden Gleichung 23)

$$x.\cos\psi + y.\sin\psi = 0$$

ist, durch Addition jener Gleichungen:

$$(x^2 + y^2)(e^{\frac{\psi}{tg\Theta}} + e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}})$$

$$= (x\frac{dx}{dz} + y\frac{dy}{dz})\{z(e^{\frac{\psi}{tg\Theta}} + e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}) - R(e^{\frac{\psi}{tg\Theta}} - e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}})\};$$

und wenn wir

$$x^2 + y^2 = \xi^2$$

setzen, so dass

$$x\frac{dx}{dz}+y\frac{dy}{dz}=\xi\frac{d\xi}{dz}$$

wird, so verwandelt sich die gefundene Gleichung in die folgende:

$$\xi^2(e^{\frac{\psi}{tg\Theta}}+e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}})=\xi\frac{d\xi}{dz}\{z(e^{\frac{\psi}{tg\Theta}}+e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}})-R(e^{\frac{\psi}{tg\Theta}}-e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}})\},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\xi=\frac{d\xi}{dz}(z-R\frac{e^{\frac{\psi}{tg\Theta}}-e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}}{e^{\frac{\psi}{tg\Theta}}+e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}}).$$

Da nun nach der Gleichung der Polfläche 24)

$$e^{\frac{\psi}{tg\Theta}}+e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}=\pm\frac{2z.\mathrm{cotg}\,\Theta}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\pm\frac{2z.\mathrm{cotg}\,\Theta}{\xi},$$

also

$$e^{\frac{\psi}{tg\Theta}}-e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}=\pm\frac{2\sqrt{z^2.\mathrm{cotg}\,\Theta^2-\xi^2}}{\xi}$$

ist, so haben wir:

$$\frac{e^{\frac{\psi}{tg\Theta}}-e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}}{e^{\frac{\psi}{tg\Theta}}+e^{-\frac{\psi}{tg\Theta}}}=\pm\frac{\sqrt{z^2.\mathrm{cotg}\,\Theta^2-\xi^2}}{z.\mathrm{cotg}\,\Theta}=\pm\frac{\sqrt{z^2-\xi^2.\mathrm{tg}\Theta^2}}{z},$$

und es ergiebt sich aus der gefundenen Gleichung die folgende nur zwei veränderliche Grössen enthaltende Differentialgleichung:

$$\xi=\frac{d\xi}{dz}(z\mp R\frac{\sqrt{z^2-\xi^2.\mathrm{tg}\,\Theta^2}}{z}).$$

Setzen wir, um diese Gleichung zu integriren:

$$\frac{\xi\,\mathrm{tg}\Theta}{z}=\eta,$$

so dass

$$\xi=\mathrm{cotg}\,\Theta.z\eta,$$

$$\frac{d\xi}{dz}=\mathrm{cotg}\,\Theta(\eta+\frac{dz}{d\eta})$$

wird, so erhalten wir die Gleichung:

$$z\eta = (\eta + z\frac{d\eta}{dz})(z \mp R\sqrt{1-\eta^2})$$

oder:

$$\frac{d\eta}{dz}(z^2 \mp Rz\sqrt{1-\eta^2}) = \pm R\eta\sqrt{1-\eta^2},$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{dz}{d\eta} = -\frac{z}{\eta} \pm \frac{z^2}{R\eta\sqrt{1-\eta^2}}.$$

Setzen wir nun ferner:

$$\frac{1}{z\eta} = \zeta,$$

so dass

$$z = \frac{1}{\eta\zeta},$$

$$\frac{dz}{d\eta} = -\frac{1}{\eta^2\zeta} - \frac{1}{\eta\zeta^2} \cdot \frac{d\zeta}{d\eta}$$

wird, so verwandelt sich die erhaltene Gleichung in die folgende:

$$-\frac{1}{\eta\zeta^2} \cdot \frac{d\zeta}{d\eta} = \pm \frac{1}{R\eta^3\zeta^2\sqrt{1-\eta^2}}$$

oder:

$$d\zeta = \mp \frac{d\eta}{R\eta^2\sqrt{1-\eta^2}},$$

und wenn wir endlich

$$\eta = \sin\omega$$

setzen, so dass

$$d\eta = \cos\omega d\omega$$
$$= \sqrt{1-\eta^2} \, . \, d\omega$$

wird, so erhalten wir aus der zuletzt gefundenen Gleichung:

$$d\zeta = \mp \frac{d\omega}{R \, . \sin\omega^2},$$

und wir bekommen daher, wenn wir integriren, die Gleichung:

$$\zeta = \pm \frac{1}{R} \operatorname{cotg} \omega + c,$$

wenn c eine willkürliche Constante bezeichnet.

Da nach dem Obigen

$$\operatorname{cotg} \omega = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}$$

ist, so ergiebt sich aus der gefundenen Gleichung:

$$\zeta = \pm \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{R\eta} + c,$$

und wenn wir für ζ und η nach einander wieder die mit diesen Buchstaben bezeichneten Ausdrücke einführen, so erhalten wir hieraus nach einander die beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{z} = \pm \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{R} + c\eta$$

und

$$\frac{R}{z} = \pm \frac{\sqrt{z^2 - \xi^2 \operatorname{tg} \Theta^2}}{z} + \frac{C\xi \operatorname{tg} \Theta}{z},$$

wenn wir $R.c = C$ setzen, so dass C wieder eine willkürliche Constante bezeichnet.

Da diese Gleichung auch für $C = 0$ gelten muss, so ist ersichtlich, dass von den doppelten Vorzeichen nur das Zeichen $+$ zu nehmen ist, und wir haben daher, da

$$\xi = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist, für die Evoluten der loxodromischen Linie auf der Kugel ausser der Gleichung der Polfläche 24) noch die Gleichung:

$$30) \qquad C.\operatorname{tg} \Theta \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{z^2 - \operatorname{tg} \Theta^2 (x^2+y^2)} = R.$$

Da die Constante C einen willkürlichen Werth erhalten kann, so drückt die Verbindung dieser beiden Gleichungen allerdings aus, dass es unendlich viele Evoluten unserer Curve giebt, die alle auf der Kegelfläche liegen, welche die Durchschnittslinie zweier auf einander folgenden Normalebenen zur Erzeugungslinie hat.

Führen wir statt der rechtwinkligen Coordinaten wieder das System der Polarcoordinaten r, φ, ψ' ein, wornach

$$x^2+y^2=r^2.\cos\varphi^2,\quad z^2=r^2.\sin\varphi^2$$

zu setzen ist, so haben wir für die Evoluten unserer Curve ausser der für die Polfläche aufgestellten Gleichung 25) die Gleichung:

31) $$r=\frac{R}{C.\operatorname{tg}\Theta\cos\varphi+\sqrt{\sin\varphi^2-\operatorname{tg}\Theta^2.\cos\varphi^2}},$$

wofür wir auch schreiben können:

31ª) $$r=\frac{R.\sec\varphi}{C\operatorname{tg}\Theta+\sqrt{\operatorname{tg}\varphi^2-\operatorname{tg}\Theta^2}}$$

oder:

31ᵇ) $$r=\frac{R.\cos\Theta}{C.\sin\Theta.\cos\varphi+\sqrt{\sin\varphi^2-\sin\Theta^2}}.$$

Es liefern diese drei Formeln 31) wieder immer einen reellen Werth für r, weil für alle auf der Polfläche liegende Punkte der numerische Werth von φ nicht kleiner wird als der von Θ.

Aus der Vergleichung dieser Formeln mit den für die Linie der Krümmungsmittelpunkte gefundenen Formeln 29) geht hervor, dass der Radius Vector der Linie, welche den Ort der Krümmungsmittelpunkte bildet, zu dem Radius Vector einer bestimmten Evolute, nämlich derjenigen, welche man erhält, wenn man in den Gleichungen 31) $C=0$ setzt, in einem sehr einfachen Verhältnisse steht. Bezeichnen wir nämlich den Radius Vector dieser Evolute mit r_0, den Radius Vector der Linie, auf welcher alle Krümmungsmittelpunkte liegen, mit r', so haben wir für jeden beliebigen Werth von φ:

32) $$r_0.r'=R^2,$$

aus welcher Gleichung hervorgeht, dass der Halbmesser der Kugel immer die mittlere Proportionale ist zwischen den sich auf dieselben Richtungen beziehenden Radien Vectoren jener beiden Curven.

II.

Ueber die Relation zwischen der Entfernung der Mittelpunkte und den Halbmessern zweier Kreise, von denen der eine um und der andere in dasselbe Vieleck beschrieben ist.

Von
dem Herausgeber.

Die Relation zwischen der Entfernung der Mittelpunkte und den Halbmessern zweier Kreise, von denen der eine um und der andere in dasselbe Dreieck beschrieben ist, ist neuerlich in dem Archiv wieder mehrfach in lehrreicher Weise zur Sprache gebracht worden. Die allgemeinere Frage nach der Relation zwischen der Entfernung der Mittelpunkte und den Halbmessern zweier Kreise, von denen der eine um, der andere in ein Vieleck von beliebiger Seitenzahl beschrieben ist, haben früher Nicolaus Fuss, Steiner und C. G. J. Jacobi zu beantworten gesucht. Die Analyse von Fuss scheint nicht allgemein genug zu sein; Steiner hat nur die Resultate seiner, wenn er sie ausführlich mitgetheilt hätte, gewiss sehr lehrreichen Untersuchung gegeben; Jacobi hat das Problem mit der Theorie der elliptischen Transcendenten in Verbindung gebracht*), wie späterhin auch Chasles in seiner trefflichen Géométrie supérieure. Paris. 1852. p. 580. Die Analyse von Jacobi ist allgemein; die von ihm aufgestellten Formeln enthalten aber eine Ungenauigkeit, indem bei den Gleichungen auf S. 381 a. a. O. nicht darauf aufmerksam gemacht ist, dass auch

---

*) Crelle's Journal. Thl. III. S. 376.

Fälle vorkommen können, in denen man den Halbmesser r des umschlossenen Kreises mit dem negativen Zeichen versehen muss, wenn man nämlich, wie doch wohl jedenfalls angenommen werden muss, die eingeführten Winkel in stetiger Folge von 0 bis 360° wachsen lässt. Und wenn man diesen Umstand nicht berücksichtigt, so kann man, wie sich dies späterhin zeigen wird, bei der Auflösung unsers Problems leicht in Fehler verfallen. Auch liegt das Kriterium, nach welchem man zu beurtheilen hat, ob der in Rede stehende Halbmesser mit dem positiven oder negativen Zeichen genommen werden muss, nicht ganz unmittelbar auf der Hand, und erfordert eine eingehendere Discussion. Eine neue Bearbeitung des in Rede stehenden, mehrfach interessanten geometrischen Problems scheint daher keineswegs überflüssig zu sein, die ich deshalb im Folgenden ihrem wesentlichen Inhalte nach geben werde.

Wir denken uns zwei Kreise und eine Gerade, welche den einen dieser beiden Kreise berührt, den anderen schneidet. Den Mittelpunkt des berührten Kreises nehmen wir als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an und legen die Axe der x durch den Mittelpunkt des geschnittenen Kreises, so dass wir also die Coordinaten des Mittelpunkts dieses Kreises durch a, 0 bezeichnen können. Die polaren Coordinaten des Berührungspunkts der Geraden mit dem um den Anfang der Coordinaten beschriebenen Kreise, dessen Halbmesser wir durch r bezeichnen wollen, seien φ, r; so ist in völliger Allgemeinheit die Gleichung der Berührenden:

$$y-r\sin\varphi=-(x-r\cos\varphi)\cot\varphi.$$

Wenn R den Halbmesser des geschnittenen Kreises bezeichnet, so ist dessen Gleichung:

$$(x-a)^2+y^2=R^2;$$

und bezeichnen nun x, y die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Geraden mit diesem letzteren Kreise, so hat man zu deren Bestimmung die beiden Gleichungen:

$$y-r\cos\varphi=-(x-r\cos\varphi)\cot\varphi,$$

$$(x-a)^2+y^2=R^2;$$

welche man leicht auf die einfachere Form:

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi=r,\ (x-a)^2+y^2=R^2$$

bringt.

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$y = r\operatorname{cosec}\varphi - x\cot\varphi,$$

also vermöge der zweiten Gleichung:

$$(x-a)^2 + (r\operatorname{cosec}\varphi - x\cot\varphi)^2 = R^2,$$

folglich, wie man leicht findet:

$$x^2\operatorname{cosec}\varphi^2 - 2(a\sin\varphi + r\cot\varphi).x\operatorname{cosec}\varphi = R^2 - a^2 - r^2\operatorname{cosec}\varphi^2.$$

Bestimmt man durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung $x\operatorname{cosec}\varphi$, demzufolge auch x und dann y mittelst der Formel

$$y = r\operatorname{cosec}\varphi - x\cot\varphi,$$

so erhält man mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$x = r\cos\varphi + \sin\varphi\{a\sin\varphi \pm \sqrt{R^2-(r-a\cos\varphi)^2}\},$$

$$y = r\sin\varphi - \cos\varphi\{a\sin\varphi \pm \sqrt{R^2-(r-a\cos\varphi)^2}\}.$$

Bezeichnen wir jetzt die Winkel, welche die von dem Mittelpunkte des geschnittenen Kreises, dessen Halbmesser R ist, nach den Durchschnittspunkten der Geraden mit diesem Kreise gezogenen Halbmesser desselben mit der Richtung der positiven x einschliessen, indem wir diese Winkel von der Richtung der positiven x an nach der Richtung der positiven y hin von 0 bis 360° zählen, durch ω und ω'; so sind nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die primitiven Coordinaten dieser beiden Durchschnittspunkte:

$$a + R\cos\omega,\ R\sin\omega \text{ und } a + R\cos\omega',\ R\sin\omega'.$$

Also können wir nach dem Obigen

$$a + R\cos\omega = r\cos\varphi + \sin\varphi\{a\sin\varphi + \sqrt{R^2-(r-a\cos\varphi)^2}\},$$

$$R\sin\omega = r\sin\varphi - \cos\varphi\{a\sin\varphi + \sqrt{R^2-(r-a\cos\varphi)^2}\}$$

und

$$a + R\cos\omega' = r\cos\varphi + \sin\varphi\{a\sin\varphi - \sqrt{R^2-(r-a\cos\varphi)^2}\},$$

$$R\sin\omega' = r\sin\varphi - \cos\varphi\{a\sin\varphi - \sqrt{R^2-(r-a\cos\varphi)^2}\}$$

setzen; woraus wir leicht die folgenden Gleichungen erhalten:

$$(a + R\cos\omega)\cos\varphi + R\sin\omega\sin\varphi = r,$$

$$(a + R\cos\omega')\cos\varphi + R\sin\omega'\sin\varphi = r;$$

folglich, wenn man zuerst $\sin\varphi$, dann $\cos\varphi$ eliminirt:

$$\{a(\sin\omega-\sin\omega')+R\sin(\omega-\omega')\}\cos\varphi=\quad r(\sin\omega-\sin\omega'),$$

$$\{a(\sin\omega-\sin\omega')+R\sin(\omega-\omega')\}\sin\varphi=-r(\cos\omega-\cos\omega');$$

oder, weil

$$\sin(\omega-\omega')=\quad 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega'),$$

$$\sin\omega-\sin\omega'=\quad 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega'),$$

$$\cos\omega-\cos\omega'=-2\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')$$

ist:

$$\{a\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')+R\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\}\cos\varphi=r\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega'),$$

$$\{a\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')+R\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\}\sin\varphi=r\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega');$$

woraus

$$\tan\varphi=\tan\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')$$

und

$$\{a\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')+R\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\}^2=r^2$$

folgt. Auch ist offenbar:

$$\{(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega'+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega'\}\cos\varphi=r\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega'),$$

$$\{(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega'+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega'\}\sin\varphi=r\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')$$

und

$$(\{R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega'+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega'\}^2=r^2.$$

Nimmt man jetzt den Mittelpunkt des geschnittenen Kreises als Anfang eines dem primitiven Coordinatensysteme parallelen Coordinatensystems an, so sind die Coordinaten der Durchschnittspunkte unserer Geraden mit diesem Kreise in dem in Rede stehenden neuen Systeme offenbar

$$R\cos\omega,\ R\sin\omega \text{ und } R\cos\omega',\ R\sin\omega';$$

also sind die Coordinaten des Mittelpunkts der diese Durchschnittspunkte verbindenden Sehne des geschnittenen Kreises in demselben Systeme:

$$\tfrac{1}{2}R(\cos\omega+\cos\omega'),\ \tfrac{1}{2}R(\sin\omega+\sin\omega').$$

Ist nun aber ϱ die Entfernung der Sehne von dem Mittelpunkte

des geschnittenen Kreises, so erhellet mittelst einer ganz einfachen Betrachtung, dass diese Coordinaten in völliger Allgemeinheit auch

$$\pm\varrho\cos\varphi,\ \pm\varrho\sin\varphi$$

sind, wenn man nur die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem die Mittelpunkte der beiden Kreise auf einer Seite oder auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen. Also ist mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen nach dem Obigen:

$$\varrho\cos\varphi=\pm\tfrac{1}{2}R(\cos\omega+\cos\omega'),$$

$$\varrho\sin\varphi=\pm\tfrac{1}{2}R(\sin\omega+\sin\omega');$$

oder:

$$\varrho\cos\varphi=\pm R\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega'),$$

$$\varrho\sin\varphi=\pm R\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega');$$

also, wegen der aus dem Obigen bekannten Gleichungen:

$$\{a\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')+R\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\}\cos\varphi=r\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega'),$$

$$\{a\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')+R\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\}\sin\varphi=r\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega'),$$

wie sogleich erhellet:

$$a\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')+R\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')=\pm\frac{r\varrho}{R\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')}$$

oder

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega'+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega'=\pm\frac{r\varrho}{R\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')}.$$

Wenn also die Mittelpunkte der beiden Kreise auf einer Seite der Geraden liegen, so ist

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega'+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega'=\frac{r\varrho}{R\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')},$$

und

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega'+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega'$$

ist also positiv oder negativ, jenachdem $\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')$ positiv oder negativ ist.

Wenn dagegen die Mittelpunkte der beiden Kreise auf entgegengesetzten Seiten der Geraden liegen, so ist

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega'+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega'=-\frac{r\varrho}{R\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')},$$

und

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega'+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega'$$

ist also positiv oder negativ, jenachdem $\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')$ negativ oder positiv ist.

Weil nun nach dem Obigen allgemein

$$\{(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega'+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega'\}^2=r^2$$

oder

$$\{a\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')+R\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\}^2=r^2,$$

also

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega'+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega'=\pm r$$

oder

$$a\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')+R\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')=\pm r$$

ist; so ergeben sich jetzt die folgenden Regeln, wie man in diesen Formeln die Zeichen zu nehmen hat:

Wenn die Mittelpunkte der beiden Kreise auf einer Seite der dieselben berührenden und schneidenden Geraden liegen, so muss man in den Gleichungen

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega'+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega'=\pm r$$

und

$$a\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')+R\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')=\pm r$$

die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem $\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')$ positiv oder negativ ist.

Wenn dagegen die Mittelpunkte der beiden Kreise auf verschiedenen Seiten der dieselben berührenden und schneidenden Geraden liegen, so muss man in den Gleichungen

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega'+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega'=\pm r$$

und

$$a\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')+R\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')=\pm r$$

die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem $\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')$ negativ oder positiv ist.

Wir wollen nun annehmen, dass ein geschlossenes $n$eck, dessen Ecken

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-1}$$

sein mögen, um den Kreis mit dem Halbmesser r, in den Kreis mit dem Halbmesser R beschrieben sei. Lässt man alle Berührungspunkte auf dem ersteren Kreise nach derselben Seite hin um gleiche Bogen fortrücken, so ist ohne Weiteres klar, dass sich durch diese neuen Berührungspunkte um den mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreis ein dem ersteren $n$eck rücksichtlich seiner Seiten und Winkel ganz gleiches $n$eck legen lässt, und eben so klar ist es, dass nun auch dieses neue $n$eck eben so wie das erstere in den mit dem Halbmesser R beschriebenen Kreis beschrieben sein wird. Ueberhaupt geht aus dieser einfachen Betrachtung ganz unzweideutig hervor, dass man sich das um und in die beiden Kreise beschriebene $n$eck immer so stetig gedreht denken kann, dass es fortwährend um den Kreis mit dem Halbmesser r, in den Kreis mit dem Halbmesser R beschrieben ist, wobei weder die Entfernung der Mittelpunkte der beiden Kreise von einander, noch die Halbmesser derselben die geringste Veränderung erleiden. Hieraus geht aber ferner ganz unzweideutig hervor, dass die Allgemeinheit der Betrachtung, rücksichtlich der zwischen den Grössen a, R, r Statt findenden Relation, welche wir zu suchen beabsichtigen, nicht die geringste Beeinträchtigung erleiden kann, wenn wir uns das um und in die beiden Kreise beschriebene $n$eck so gedreht denken, dass eine seiner Ecken, etwa die Ecke A_0, in die durch die Mittelpunkte der beiden Kreise gehende Gerade fällt, und wir werden demzufolge fernerhin das $n$eck auch nur in dieser Lage betrachten.

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun die Richtung der positiven x von dem Mittelpunkte des einen oder des anderen Kreises an durch den Punkt A_0 gehen lassen, und den positiven Theil der Axe der y so annehmen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach derselben Richtung bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem Punkte A_0 an die Punkte

$$A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$$

der Reihe nach zu durchlaufen. Die, auf die aus dem Obigen bekannte Weise genommenen Winkel, welche die von dem Mittelpunkte des mit dem Halbmesser R beschriebenen Kreises nach den Punkten

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-1}$$

gezogenen Halbmesser dieses Kreises mit der Richtung der positiven x einschliessen, mögen respective durch

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_{n-1}$$

bezeichnet werden.

Zuerst erhellet nun auf der Stelle, dass im vorliegenden Falle, wo das $n$eck um den einen, in den anderen Kreis beschrieben ist, der im Obigen hervorgehobene Umstand, dass die Mittelpunkte der beiden Kreise auf verschiedenen Seiten einer der n, das Vieleck einschliessenden Seiten läge, gar nicht vorkommen kann, indem vielmehr die Mittelpunkte der beiden Kreise auf einer Seite jeder der n, das Vieleck einschliessenden Seiten liegen müssen, weil ja unter den gemachten Voraussetzungen die Mittelpunkte beider Kreise nothwendig innerhalb des Vielecks liegen.

Ferner erhellet, dass die Winkel

$$\omega_1-\omega_0, \omega_2-\omega_1, \omega_3-\omega_2, \ldots, \omega_{n-1}-\omega_{n-2}$$

unter den gemachten Voraussetzungen sämmtlich positiv und kleiner als 180°, also die Winkel

$$\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_0), \tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_1), \tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_2), \ldots, \tfrac{1}{2}(\omega_{n-1}-\omega_{n-2})$$

sämmtlich positiv und kleiner als 90°, deren Cosinus also sämmtlich positiv sind; der Winkel $\omega_0-\omega_{n-1}$ ist aber negativ und, absolut genommen, offenbar grösser als 180°, also $\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_{n-1})$ negativ, und, absolut genommen, grösser als 90° und kleiner als 180°, daher der Cosinus dieses Winkels negativ. Weil man nun nach dem, was oben bewiesen worden ist, im vorliegenden Falle in der Gleichung

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega'+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega'=\pm r$$

das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem $\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')$ positiv oder negativ ist; so wird nach den vorher gemachten Bemerkungen jetzt die allgemeine Gültigkeit der folgenden Gleichungen auf der Stelle erhellen:

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_0\cos\tfrac{1}{2}\omega_1+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_0\sin\tfrac{1}{2}\omega_1=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1\cos\tfrac{1}{2}\omega_2+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_1\sin\tfrac{1}{2}\omega_2=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_2\cos\tfrac{1}{2}\omega_3+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_2\sin\tfrac{1}{2}\omega_3=r,$$

u. s. w.

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_{n-2}\cos\tfrac{1}{2}\omega_{n-1}+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_{n-2}\sin\tfrac{1}{2}\omega_{n-1}=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_{n-1}\cos\tfrac{1}{2}\omega_0+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_{n-1}\sin\tfrac{1}{2}\omega_0=-r;$$

also weil unter den gemachten Voraussetzungen $\omega_0=0$ ist:

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1 = r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1\cos\tfrac{1}{2}\omega_2+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_1\sin\tfrac{1}{2}\omega_2=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_2\cos\tfrac{1}{2}\omega_3+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_2\sin\tfrac{1}{2}\omega_3=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_3\cos\tfrac{1}{2}\omega_4+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_3\sin\tfrac{1}{2}\omega_4=r,$$

u. s. w.

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_{n-2}\cos\tfrac{1}{2}\omega_{n-1}+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_{n-2}\sin\tfrac{1}{2}\omega_{n-1}=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_{n-1} = -r.$$

Man sieht hieraus, wie nothwendig es ist, wenn man Fehlern und Irrthümern nicht ausgesetzt sein will, ein bestimmtes Kriterium zu haben, nach welchem man beurtheilen kann, ob man in der allgemeinen Gleichung

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega'+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega'=\pm r$$

das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat.

Das vorstehende System von Gleichungen enthält n Gleichungen und $n-1$ ist die Anzahl der darin enthaltenen Winkel

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \ldots.\ \omega_{n-1};$$

welche man also aus diesen n Gleichungen in allen Fällen sämmtlich eliminiren, und dadurch die gesuchte Relation zwischen den Grössen a, R, r für jedes n erhalten kann, welche jedoch, wie aus der Form der vorstehenden Gleichungen von selbst erhellet, eigentlich, wenigstens ursprünglich, eine Relation zwischen den drei Grössen r, $R+a$, $R-a$ sein wird.

Weil für das Dreieck $n=3$ ist, so hat man in diesem Falle die folgenden Gleichungen:

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1 = r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1\cos\tfrac{1}{2}\omega_2+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_1\sin\tfrac{1}{2}\omega_2=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_2 = -r.$$

Also ist

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega_1=\frac{r}{R+a},\quad \cos\tfrac{1}{2}\omega_2=-\frac{r}{R+a};$$

und folglich, weil $\sin\tfrac{1}{2}\omega_1$, $\sin\tfrac{1}{2}\omega_2$ und $R+a$, $R-a$ offenbar stets positiv sind:

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega_1=\frac{\sqrt{(R+a)^2-r^2}}{R+a},\quad \sin\tfrac{1}{2}\omega_2=\frac{\sqrt{(R+a)^2-r^2}}{R+a}.$$

Führt man nun die Werthe von $\cos\tfrac{1}{2}\omega_1$, $\cos\tfrac{1}{2}\omega_2$ und $\sin\tfrac{1}{2}\omega_1$, $\sin\tfrac{1}{2}\omega_2$ in die zweite der drei obigen Gleichungen ein, so erhält man die folgende Relation:

$$-(R+a)\cdot\frac{r^2}{(R+a)^2}+(R-a)\cdot\frac{(R+a)^2-r^2}{(R+a)^2}=r$$

oder

$$(R-a)\{(R+a)^2-r^2\}=r(R+a)(R+a+r),$$

oder

$$(R-a)(R+a+r)(R+a-r)=r(R+a)(R+a+r),$$

$$(R-a)(R+a-r)=r(R+a);$$

woraus sogleich

$$(R-a)(R+a)=2Rr$$

oder

$$R^2-a^2=2Rr,\quad a^2=R^2-2Rr=R(R-2r)$$

folgt, welches eine längst bekannte Relation ist. Setzt man

$$R+a=p,\quad R-a=q;$$

so ist

$$pq=2Rr.$$

Zu bemerken ist der vorhergehenden Schlüsse wegen noch, dass nicht

$$R+a+r=0,\quad R+a=-r$$

sein kann, weil sonst nach dem Obigen $\cos\tfrac{1}{2}\omega_2=1$, also $\tfrac{1}{2}\omega_2=0$, $\omega_2=0$ sein würde, was offenbar ungereimt ist.

Für das Viereck ist $n=4$, und man hat daher die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1 &&=r,\\
&(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1\cos\tfrac{1}{2}\omega_2+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_1\sin\tfrac{1}{2}\omega_2 &&=r,\\
&(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_2\cos\tfrac{1}{2}\omega_3+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_2\sin\tfrac{1}{2}\omega_3 &&=r,\\
&(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_3 &&=-r.
\end{aligned}$$

also weil unter den gemachten Voraussetzungen $\omega_0=0$ ist:

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1 = r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1\cos\tfrac{1}{2}\omega_2+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_1\sin\tfrac{1}{2}\omega_2=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_2\cos\tfrac{1}{2}\omega_3+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_2\sin\tfrac{1}{2}\omega_3=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_3\cos\tfrac{1}{2}\omega_4+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_3\sin\tfrac{1}{2}\omega_4=r,$$

u. s. w.

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_{n-2}\cos\tfrac{1}{2}\omega_{n-1}+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_{n-2}\sin\tfrac{1}{2}\omega_{n-1}=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_{n-1} = -r.$$

Man sieht hieraus, wie nothwendig es ist, wenn man Fehlern und Irrthümern nicht ausgesetzt sein will, ein bestimmtes Kriterium zu haben, nach welchem man beurtheilen kann, ob man in der allgemeinen Gleichung

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega'+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega'=\pm r$$

das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat.

Das vorstehende System von Gleichungen enthält n Gleichungen und $n-1$ ist die Anzahl der darin enthaltenen Winkel

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \ldots.\ \omega_{n-1};$$

welche man also aus diesen n Gleichungen in allen Fällen sämmtlich eliminiren, und dadurch die gesuchte Relation zwischen den Grössen a, R, r für jedes n erhalten kann, welche jedoch, wie aus der Form der vorstehenden Gleichungen von selbst erhellet, eigentlich, wenigstens ursprünglich, eine Relation zwischen den drei Grössen r, $R+a$, $R-a$ sein wird.

Weil für das Dreieck $n=3$ ist, so hat man in diesem Falle die folgenden Gleichungen:

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1 = r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1\cos\tfrac{1}{2}\omega_2+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_1\sin\tfrac{1}{2}\omega_2=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_2 = -r.$$

Also ist

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega_1=\frac{r}{R+a},\quad \cos\tfrac{1}{2}\omega_2=-\frac{r}{R+a};$$

und folglich, weil $\sin\tfrac{1}{2}\omega_1$, $\sin\tfrac{1}{2}\omega_2$ und $R+a$, $R-a$ offenbar stets positiv sind:

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega_1=\frac{\sqrt{(R+a)^2-r^2}}{R+a},\quad \sin\tfrac{1}{2}\omega_2=\frac{\sqrt{(R+a)^2-r^2}}{R+a}.$$

Führt man nun die Werthe von $\cos\frac{1}{2}\omega_1$, $\cos\frac{1}{2}\omega_2$ und $\sin\frac{1}{2}\omega_1$, $\sin\frac{1}{2}\omega_2$ in die zweite der drei obigen Gleichungen ein, so erhält man die folgende Relation:

$$-(R+a)\cdot\frac{r^2}{(R+a)^2}+(R-a)\cdot\frac{(R+a)^2-r^2}{(R+a)^2}=r$$

oder

$$(R-a)\{(R+a)^2-r^2\}=r(R+a)(R+a+r),$$

oder

$$(R-a)(R+a+r)(R+a-r)=r(R+a)(R+a+r),$$

$$(R-a)(R+a-r)=r(R+a);$$

woraus sogleich

$$(R-a)(R+a)=2Rr$$

oder

$$R^2-a^2=2Rr,\ a^2=R^2-2Rr=R(R-2r)$$

folgt, welches eine längst bekannte Relation ist. Setzt man

$$R+a=p,\ R-a=q;$$

so ist

$$pq=2Rr.$$

Zu bemerken ist der vorhergehenden Schlüsse wegen noch, dass nicht

$$R+a+r=0,\ R+a=-r$$

sein kann, weil sonst nach dem Obigen $\cos\frac{1}{2}\omega_2=1$, also $\frac{1}{2}\omega_2=0$, $\omega_2=0$ sein würde, was offenbar ungereimt ist.

Für das Viereck ist $n=4$, und man hat daher die folgenden Gleichungen:

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1\cos\tfrac{1}{2}\omega_2+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_1\sin\tfrac{1}{2}\omega_2=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_2\cos\tfrac{1}{2}\omega_3+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_2\sin\tfrac{1}{2}\omega_3=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_3=-r.$$

Auf ganz ähnliche Art wie im vorhergehenden Falle ist:

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega_1=\frac{r}{R+a},\quad \cos\tfrac{1}{2}\omega_3=-\frac{r}{R+a};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega_1=\frac{\sqrt{(R+a)^2-r^2}}{R+a},\quad \sin\tfrac{1}{2}\omega_3=\frac{\sqrt{(R+a)^2-r^2}}{R+a}$$

also:

$$r\cos\tfrac{1}{2}\omega_2+\frac{R-a}{R+a}\sqrt{(R+a)^2-r^2}.\sin\tfrac{1}{2}\omega_2=r,$$

$$-r\cos\tfrac{1}{2}\omega_2+\frac{R-a}{R+a}\sqrt{(R+a)^2-r^2}.\sin\tfrac{1}{2}\omega_2=r.$$

Hieraus folgt durch Subtraction $2r\cos\tfrac{1}{2}\omega_2=0$, $\cos\tfrac{1}{2}\omega_2=0$, also

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega_2=\sqrt{1-\cos\tfrac{1}{2}\omega_2{}^2}=1,$$

und folglich:

$$\frac{R-a}{R+a}\sqrt{(R+a)^2-r^2}=r,$$

$$(R-a)\sqrt{(R+a)^2-r^2}=(R+a)r;$$

also, wenn man quadrirt, nach leichter Reduction:

$$(R^2-a^2)^2=r^2\{(R+a)^2+(R-a)^2\}=2r^2(R^2+a^2)$$

oder

$$p^2q^2=r^2(p^2+q^2),$$

welches eine gleichfalls längst bekannte Relation ist.

Für das Fünfeck ist $n=5$, und wir haben daher in diesem Falle die folgenden Gleichungen:

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1\cos\tfrac{1}{2}\omega_2+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_1\sin\tfrac{1}{2}\omega_2=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_2\cos\tfrac{1}{2}\omega_3+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_2\sin\tfrac{1}{2}\omega_3=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_3\cos\tfrac{1}{2}\omega_4+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_3\sin\tfrac{1}{2}\omega_4=r,$$

$$(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_4=-r;$$

oder

$$p\cos\tfrac{1}{2}\omega_1 \qquad\qquad = r,$$

$$p\cos\tfrac{1}{2}\omega_1\cos\tfrac{1}{2}\omega_2+q\sin\tfrac{1}{2}\omega_1\sin\tfrac{1}{2}\omega_2=r,$$

$$p\cos\tfrac{1}{2}\omega_2\cos\tfrac{1}{2}\omega_3+q\sin\tfrac{1}{2}\omega_2\sin\tfrac{1}{2}\omega_3=r,$$

$$p\cos\tfrac{1}{2}\omega_3\cos\tfrac{1}{2}\omega_4+q\sin\tfrac{1}{2}\omega_3\sin\tfrac{1}{2}\omega_4=r,$$

$$p\cos\tfrac{1}{2}\omega_4 \qquad\qquad = -r.$$

Weil aber ganz auf ähnliche Art wie oben

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega_1=\frac{r}{p},\quad \cos\tfrac{1}{2}\omega_4=-\frac{r}{p};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega_1=\frac{\sqrt{p^2-r^2}}{p},\quad \sin\tfrac{1}{2}\omega_4=\frac{\sqrt{p^2-r^2}}{p}$$

ist; so werden die vorstehenden Gleichungen:

$$r\cos\tfrac{1}{2}\omega_2+\frac{q}{p}\sqrt{p^2-r^2}\,.\sin\tfrac{1}{2}\omega_2=r,$$

$$p\cos\tfrac{1}{2}\omega_2\cos\tfrac{1}{2}\omega_3+q\sin\tfrac{1}{2}\omega_2\sin\tfrac{1}{2}\omega_3=r,$$

$$-r\cos\tfrac{1}{2}\omega_4+\frac{q}{p}\sqrt{p^2-r^2}\,.\sin\tfrac{1}{2}\omega_3=-r.$$

Aus der ersten und dritten Gleichung ergeben sich leicht die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{q}{p}\sqrt{p^2-r^2}\,.\sin\tfrac{1}{4}\omega_2\cos\tfrac{1}{4}\omega_2=r\sin\tfrac{1}{4}\omega_2{}^2,$$

$$\frac{q}{p}\sqrt{p^2-r^2}\,.\sin\tfrac{1}{4}\omega_3\cos\tfrac{1}{4}\omega_3=r\cos\tfrac{1}{4}\omega_3{}^2;$$

also:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\omega_2=\frac{q\sqrt{p^2-r^2}}{pr},\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\omega_3=\frac{pr}{q\sqrt{p^2-r^2}}.$$

Folglich ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega_2=\frac{2\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\omega_2}{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\omega_2{}^2}=\frac{2pqr\sqrt{p^2-r^2}}{p^2r^2+q^2(p^2-r^2)},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega_2=\frac{1-\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\omega_2{}^2}{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\omega_2{}^2}=\frac{p^2r^2-q^2(p^2-r^2)}{p^2r^2+q^2(p^2-r^2)}$$

und

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega_3=\frac{2\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{4}\omega_3}{1+\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{4}\omega_3^{\,2}}=\frac{2pqr\sqrt{p^2-r^2}}{p^2r^2+q^2(p^2-r^2)},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega_3=\frac{1-\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{4}\omega_3^{\,2}}{1+\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{4}\omega_3^{\,2}}=-\frac{p^2r^2-q^2(p^2-r^2)}{p^2r^2+q^2(p^2-r^2)}.$$

Folglich liefert uns die zweite der drei obigen Hauptgleichungen unmittelbar die folgende Relation:

$$4p^2q^3r^2(p^2-r^2)=p\{p^2r^2-q^2(p^2-r^2)\}^2+r\{p^2r^2+q^2(p^2-r^2)\}^2,$$

welche man auch auf folgende Art ausdrücken kann:

$$4p^2q^3r^2(p^2-r^2)=p\{p^2q^2-(p^2+q^2)r^2\}^2+r\{p^2q^2+(p^2-q^2)r^2\}^2.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$-4p^2q^3r^2(p^2-r^2)=q\{p^2q^2-(p^2+q^2)r^2\}^2-q\{p^2q^2+(p^2-q^2)r^2\}^2;$$

also, wenn man diese Gleichung zu der vorhergehenden addirt:

$$(p+q)\{p^2q^2-(p^2+q^2)r^2\}^2-(q-r)\{p^2q^2+(p^2-q^2)r^2\}^2=0,$$

folglich

$$\left\{\frac{p^2q^2-(p^2+q^2)r^2}{p^2q^2+(p^2-q^2)r^2}\right\}^2=\frac{q-r}{p+q}.$$

Unsere erste Gleichung bringt man leicht auf die Form:

$$p^4r^4(p+r)-2p^2q^2r^2(p+2q-r)(p^2-r^2)+q^4(p+r)(p^2-r^2)^2=0,$$

also auf die Form:

$$(p+r)\{p^4r^4-2p^2q^2r^2(p+2q-r)(p-r)+q^4(p^2-r^2)^2\}=0.$$

Wäre $p+r=0$, $p=-r$, so wäre nach dem Obigen $\cos\tfrac{1}{2}\omega_4=1$, also $\tfrac{1}{2}\omega_4=0$, $\omega_4=0$, was offenbar ungereimt ist; daher ist nicht $p+r=0$, und folglich

$$p^4r^4-2p^2q^2r^2(p+2q-r)(p-r)+q^4(p^2-r^2)^2=0$$

oder, wie man leicht findet:

$$q^4r^4-2p^2q^2r^2(q+2p-r)(q-r)+p^4(q^2-r^2)^2=0.$$

Addirt man diese beiden Gleichungen zu einander, so erhält man die Gleichung:

$$(p^4+q^4)r^4-2p^2q^2r^2(p+q-r)^2+p^4q^4=0,$$

und findet dann ferner, dass diese Gleichung sich auch auf die Form

$$\{pq-(p+q)r\}\{p^3q^3+p^2q^2(p+q)r-pq(p+q)^2r^2-(p+q)(p-q)^2r^3\}=0$$

bringen lässt. Die Gleichung

$$pq-(p+q)r=0$$

gäbe

$$(R+a)(R-a)=2Rr,$$

welches nach dem Obigen die Relation für das Dreieck ist. Also kann für das Fünfeck nur

$$p^3q^3+p^2q^2(p+q)r-pq(p+q)^2r^2-(p+q)(p-q)^2r^3=0$$

sein, welche Relation schon Fuss angegeben hat.

Für das Sechseck ist $n=6$, folglich:

$$\begin{aligned}
&(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1 &&=r,\\
&(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_1\cos\tfrac{1}{2}\omega_2+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_1\sin\tfrac{1}{2}\omega_2 &&=r,\\
&(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_2\cos\tfrac{1}{2}\omega_3+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_2\sin\tfrac{1}{2}\omega_3 &&=r,\\
&(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_3\cos\tfrac{1}{2}\omega_4+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_3\sin\tfrac{1}{2}\omega_4 &&=r,\\
&(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_4\cos\tfrac{1}{2}\omega_5+(R-a)\sin\tfrac{1}{2}\omega_4\sin\tfrac{1}{2}\omega_5 &&=r,\\
&(R+a)\cos\tfrac{1}{2}\omega_5 &&=-r;
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
&p\cos\tfrac{1}{2}\omega_1 &&=r,\\
&p\cos\tfrac{1}{2}\omega_1\cos\tfrac{1}{2}\omega_2+q\sin\tfrac{1}{2}\omega_1\sin\tfrac{1}{2}\omega_2 &&=r,\\
&p\cos\tfrac{1}{2}\omega_2\cos\tfrac{1}{2}\omega_3+q\sin\tfrac{1}{2}\omega_2\sin\tfrac{1}{2}\omega_3 &&=r,\\
&p\cos\tfrac{1}{2}\omega_3\cos\tfrac{1}{2}\omega_4+q\sin\tfrac{1}{2}\omega_3\sin\tfrac{1}{2}\omega_4 &&=r,\\
&p\cos\tfrac{1}{2}\omega_4\cos\tfrac{1}{2}\omega_5+q\sin\tfrac{1}{2}\omega_4\sin\tfrac{1}{2}\omega_5 &&=r,\\
&p\cos\tfrac{1}{2}\omega_5 &&=-r;
\end{aligned}$$

und man findet nun ganz auf ähnliche Art wie vorher beim Fünfeck:

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega_1=\frac{r}{p},\quad \cos\tfrac{1}{2}\omega_5=-\frac{r}{p};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega_1=\frac{\sqrt{p^2-r^2}}{p},\quad \sin\tfrac{1}{2}\omega_5=\frac{\sqrt{p^2-r^2}}{p}$$

und

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega_3 = \frac{2pqr\sqrt{p^2-r^2}}{p^2r^2+q^2(p^2-r^2)},\quad \cos\tfrac{1}{2}\omega_3 = \frac{p^2r^2-q^2(p^2-r^2)}{p^2r^2+q^2(p^2-r^2)};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega_4 = \frac{2pqr\sqrt{p^2-r^2}}{p^2r^2+q^2(p^2-r^2)},\quad \cos\tfrac{1}{2}\omega_4 = -\frac{p^2r^2-q^2(p^2-r^2)}{p^2r^2+q^2(p^2-r^2)}.$$

Also ist nach der dritten und vierten der sechs obigen Gleichungen:

$$p\,\frac{p^2r^2-q^2(p^2-r^2)}{p^2r^2+q^2(p^2-r^2)}\cos\tfrac{1}{2}\omega_3 + \frac{2pq^2r\sqrt{p^2-r^2}}{p^2r^2+q^2(p^2-r^2)}\sin\tfrac{1}{2}\omega_3 = r;$$

$$-p\,\frac{p^2r^2-q^2(p^2-r^2)}{p^2r^2+q^2(p^2-r^2)}\cos\tfrac{1}{2}\omega_3 + \frac{2pq^2r\sqrt{p^2-r^2}}{p^2r^2+q^2(p^2-r^2)}\sin\tfrac{1}{2}\omega_3 = r.$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen ergiebt sich $\cos\frac{1}{2}\omega_3=0$, also $\sin\frac{1}{2}\omega_3=1$. Durch Addition der vorstehenden Gleichungen erhält man aber:

$$\frac{2pq^2\sqrt{p^2-r^2}}{p^2r^2+q^2(p^2-r^2)}\sin\tfrac{1}{2}\omega_3 = 1,$$

also:

$$\frac{2pq^2\sqrt{p^2-r^2}}{p^2r^2+q^2(p^2-r^2)} = 1,$$

und folglich:

$$p^2r^2+q^2(p^2-r^2) = 2pq^2\sqrt{p^2-r^2}.$$

Macht man diese Gleichung rational, so erhält man nach einigen ganz leichten Reductionen die Gleichung

$$3p^4q^4-2p^2q^2r^2(p^2+q^2)-(p^2-q^2)^2r^4=0,$$

welche gleichfalls schon Fuss gegeben hat.

Ich will diese Rechnungen jetzt nicht weiter fortsetzen, sondern begnüge mich, die allgemeine Methode sorgfältig entwickelt zu haben, nach welcher alle Aufgaben dieser Art zu behandeln sind, deren Lösung nach dieser Methode zu vielen zweckmässigen Uebungen im allgemeinen analytischen Calcul Veranlassung geben kann, weshalb vorzüglich dieser Gegenstand von Neuem von mir in Anregung gebracht worden ist.

III.

Ueber drei geometrische Transformationen.

Von
Herrn *Otto Böklen*
zu Sulz a. N. in Würtemberg.

I. Transformationen durch reciproke Radien vektoren.

Von einem festen Punkt O ziehe man nach allen Punkten M einer Fläche F oder Curve C Radien und bestimme auf ihnen die Punkte m, so dass $OM.Om = \text{const.}$, so liegen diese Punkte auf der transformirten Fläche f oder Curve c. Die schon mehrfach erörterten Haupteigenschaften dieser Transformation sind folgende: Die Flächen F und f sind zugleich Kugeln oder die Eine ist eine Ebene und die Andere eine durch O gehende Kugel. C und c sind zugleich Kreise, welche dann auf einer Kugel liegen und mithin auch auf zwei Kegeln, wovon Einer seine Spitze in O hat, oder von den Curven C und c ist Eine eine Gerade und dann ist die Andere ein durch O gehender Kreis. Schneiden sich zwei Curven unter einem gewissen Winkel in M, so bilden die transformirten Curven in dem entsprechenden Punkte m denselben Winkel. Bildet man auf F ein Netz von unendlich kleinen Dreiecken, so entspricht demselben auf f ein Netz von unendlich kleinen ähnlichen Dreiecken.

Mit Hülfe dieser Sätze lässt sich folgende Aufgabe einfach lösen: Zwei Kreise K und K' sind gegeben, die weder in einer Ebene noch auf einer Kugel liegen; es soll ein dritter Kreis gefunden werden, der beide je in zwei Punkten rechtwinklig schneidet. Man klappe K' um die gemeinsame Schnittline der Ebenen beider Kreise um, bis K' und K in einer Ebene liegen,

ziehe nun die Potenzlinie, welche jene Schnittlinie in μ trifft, und bringe K' in die vorige Lage zurück, so ist μ der Mittelpunkt derjenigen Kugel, welche K und K' rechtwinklig schneidet und zwar in A, B; A', B'. Man nehme nun Einen dieser 4 Punkte, z. B. A, als Centralpunkt der Transformation, von welchem aus die Radien vektoren gezogen werden, an, und transformire. Die Kugel verwandelt sich in eine Ebene, K in eine Gerade, k, welche jene Ebene in b, und K' in einen Kreis k', welcher jene Ebene in a' und b' rechtwinklig schneidet. Die Aufgabe ist jetzt auf die einfachere reduzirt, einen Kreis k'' zu ziehen, welcher k und k' rechtwinklig schneidet, was keinen Anstand hat. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist in b; ferner schneidet er k' in den Endpunkten einer Sehne, die senkrecht auf der Ebene steht und sie in s schneidet, so dass bs den Winkel $a'bb'$ halbirt. Nachdem diess geschehen, wende man eine zweite Transformation an, welche der ersten entgegengesetzt Alles auf den früheren Stand zurückführt. Hierdurch erhält man einen k'' entsprechenden Kreis K'', welcher die Kreise K und K' rechtwinklig je in 2 Punkten schneidet. Aus Vorstehendem geht hervor, dass es nur Einen solchen Kreis giebt. Auch lassen sich aus der mitgetheilten Construktion noch weitere Consequenzen ziehen, z. B. einen Kreis zu konstruiren, welcher K rechtwinklig schneidet und K' berührt oder in 2 Punkten unter einem gegebenen Winkel schneidet. Der letzteren Bedingung genügen 2 Kreise, welche man erhält, wenn man durch b zwei Linien zieht, die mit bs gleiche Winkel bilden; die Punkte, wo sie $a'b'$ treffen, sind die Durchschnittspunkte der betreffenden Sehnen des Kreises k'.

Die oben angegebenen Sätze geben ein Mittel an die Hand, um planimetrische Sätze auf die Kugel zu übertragen. Alle Gerade in der Ebene verwandeln sich in Kugelkreise, welche durch einen Punkt O gehen, und sich unter demselben Winkel schneiden, wie jene Gerade. Hier folgen einige Beispiele, welche sich leicht vervielfältigen lassen: Drei Kugelkreise, welche durch O gehen, bilden ein Dreieck abc, in dem die Summe der Winkel 180° beträgt. Drei weitere Kreise durch O, welche durch a, b, c gehen und die gegenüberliegenden Bögen bc, ac, ab rechtwinklig schneiden in d, e, f, haben einen gemeinsamen Schnittpunkt h, und halbiren die Winkel des Kreisbogen-Dreiecks def. Wenn man 4 Kreise durch O legt, die sich in $abcd$ schneiden, und 2 Gegenwinkel in dem Kreisbogenviereck zusammen $= 180°$ sind, so liegen die 4 Punkte $abcd$ auf einem Kreis; nimmt man sie als fest an und den Punkt O als beweglich auf der Kugel, so sind immer zwei Gegenwinkel in den Kreisbogenvierecken $abcd$ gleich 180°. Legt man

durch O und zwei feste Punkte a b auf der Kugel zwei Kreise, die sich unter einem constanten Winkel in c schneiden, so liegt dieser Punkt auf einem durch a und b gehenden Kreis, und die Kugelsehne Oc beschreibt einen Kegel zweiten Grades. Einen weiteren Anhaltspunkt für solche Untersuchungen erhält man durch den von Möbius angegebenen Satz: $ABCD$ sind 4 beliebige Punkte im Raum und $abcd$ die entsprechenden, welche man durch Transformation erhält, so dass nämlich, um es zu wiederholen, letztere Punkte auf den Strahlen OA, OB, OC, OD liegen, und die Gleichungen $OA.Oa = OB.Ob = OC.Oc = OD.Od$ stattfinden; nun besteht folgende Relation zwischen den Seiten der ebenen oder windschiefen Vierecke $ABCD$ und $abcd$:

$$\frac{AB.CD}{AD.BC} = \frac{ab.cd}{ad.bc}.$$

Dieser Satz ist allgemein, wie auch die Punkte $ABCD$ liegen; es können z. B. 3 oder 4 Punkte in einer Geraden liegen. Man nehme auf den 3 Seiten oder ihren Verlängerungen eines Dreiecks 3 Punkte an, welche in gerader Richtung liegen, so ist nach dem Satz von Carnot das Produkt dreier getrennten Abschnitte gleich dem Produkt der andern drei. Durch Transformation verwandelt sich die Ebene des Dreiecks in eine Kugel, die Seiten des Dreiecks in ein Kreisbogendreieck abc, welches von drei durch O gehenden Kugelkreisen gebildet wird. Man lege durch O einen 4ten Kreis, der die 3 Kreise Oab, Oac, Obc in f, e, d schneidet, so genügen die Sehnen ae, ec, cd, db, bf, fa der Gleichung

$$\frac{ae.cd.bf}{ec.db.fa} = 1,$$

was man durch Anwendung des Möbius'schen Satzes auf die Vierecke $AECD$ und $aecd$, $ADFB$ und $adfb$, $ABDF$ und $abdf$ findet. Ganz ähnlich ist der Beweis des folgenden Satzes:

Man nehme auf den Kreisbögen ab, ac, bc 3 Punkte xyz an, so dass die Kreise Oax, Oby, Ocz einen gemeinsamen Schnittpunkt haben (ausser O), so ist

$$\frac{ax.by.cz}{xb.yc.za} = 1.$$

Die Punkte $ABCD$ sollen in gerader Linie liegen; A und B sind fest, C und D beweglich, jedoch so, dass immer die Bedingungsgleichung

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = 1$$

erfüllt ist.

In diesem Fall bilden, wie bekannt, die Punkte C, D eine involutorische Punktreihe. Von einem beliebigen Punkt X ziehe man die Strahlen XC, XD...., so ensteht ein involutorischer Strahlenbüschel, welcher irgend eine in derselben Ebene liegende Gerade in involutorischen Punkten schneidet. Durch Transformation verwandelt sich die Gerade $ABCD$ in einen Kreis $Oabcd$, auf welchem die Punkte a b ebenfalls fest sind, dagegen c und d beweglich, jedoch so, dass stets $\frac{ab \cdot cd}{ad \cdot bc} = 1$ ist, was sich aus dem Satz von Möbius sogleich ergiebt. Die Ebene $ABCDX$ verwandelt sich in eine Kugel, auf welcher x liegt, durch welchen Punkt die Kreise Oxc, Oxd.... gehen, welche den Geraden XC, XD.... entsprechen. Der Kürze halber nenne ich die Punkte c, d...., obgleich sie auf einem Kreis liegen, involutorisch und die Kreise Oxc, Oxd.... einen involutorischen Kreisbüschel. Diess vorausgesetzt, ergibt sich der Satz: Ein involutorischer Kreisbüschel schneidet jeden durch O gehenden Kreis der Kugel in einer involutorischen Punktreihe.

Wir wollen nun annehmen, $ABCDX$ seien Punkte eines ebenen Kegelschnitts, und XA, XB, XC, XD.... ein involutorischer Strahlenbüschel; verbindet man irgend einen zweiten Punkt X' des Kegelschnitts mit $ABCD$, so bilden $X'A$, $X'B$, $X'C$, $X'D$...., gleichfalls einen involutorischen Strahlenbüschel. Hieraus ergibt sich durch Transformation: Man lege durch die Spitze O eines Kegels vom 2ten Grade eine Kugel, so ist die Durchschnittskurve eine Art sphärischen Kegelschnitts, welcher die Eigenschaft hat, dass wenn die Punkte $abcdx$ desselben einen involutorischen Kreisbüschel Oxa, Oxb, Oxc, Oxd.... bilden, durch einen beliebigen Punkt x' desselben sich ebenfalls ein involutorischer Kreisbüschel $Ox'a$, $Ox'b$, $Ox'c$, $Ox'd$.... legen lässt. Wenn von 2 festen Tangenten eines ebenen Kegelschnitts die Eine von allen übrigen Tangenten in einer involutorischen Punktreihe geschnitten wird, so ist diess auch bei der andern der Fall. Durch Transformation erhalten wir den Satz: Wenn von 2 festen Tangential-Kreisen durch O des genannten sphärischen Kegelschnitts der Eine von allen übrigen durch O gehenden Tangential-Kreisen in involutorischen Punkten geschnitten wird, so ist diess auch bei den andern der Fall. Hier reiht sich die Uebertragung der Pascal'schen und Brianchon'schen Sätze über die Sechsecke und Sechsseite ebener Kegelschnitte an.

Die Sätze über Pol, Polaren, konjungirte Polaren ebener Kegelschnitte erscheinen bei solchen sphärischen Kegelschnitten in folgender Form: Wenn man durch O und einen zweiten Punkt p der Kugel Kreise legt, welche den sphärischen Kegelschnitt in cc', dd'...., treffen, so liegen die Durchschnitte der Tangential-Kreise Oc und Oc' oder Od und Od'.... auf einem durch O gehenden Kreis, welchen ich der Kürze halber die Polare von p nenne, während p der Pol ist. Konjugirte Polaren sind solche, wovon jede den Pol der andern enthält. Sämmtliche konjugirte Polaren, welche durch einen Punkt x der Kugel gehen, bilden einen involutorischen Kreisbüschel, wie oben die Kreise Oxc und Oxd, oder Oxc' und Oxd'.... Man lege an die Kugel in O eine Tangential-Ebene und ziehe eine Parallel-Ebene, welche den Kegel, dessen Spitze ebenfalls O, in einer Ellipse oder Hyperbel schneiden soll, deren Mittelpunkt M und Brennpunkte F und F' heissen sollen. Die Radien OM, OF, OF' schneiden die Kugel in den Punkten m, f und f', welche man der Analogie wegen ebenfalls Mittelpunkt und Brennpunkte des sphärischen Kegelschnitts nennen kann, der mit jener Ellipse oder Hyperbel in derjenigen Verwandtschaft steht, welche durch Transformation mittelst reciproker Radien vektoren begründet ist. Wir bringen nun den Punkt x oder die Spitze des involutorischen Kreisbüschels, welchen die konjugirten Polaren von x bilden, nach m, so entsprechen den durch Om gehenden Kugelkreisen bei der Ellipse oder Hyperbel-Durchmesser, woraus sich sogleich ergibt, dass die Pole aller Polaren durch m in O vereinigt sind. Unter den konjugirten Polaren von m, welche den involutorischen Kreisbüschel Om bilden, gibt es immer und nur Ein Paar rechtwinklige, wovon Eine durch die Brennpunkte f und f' geht. Wenn durch O und durch die 4 Punkte, in welchen 2 konjugirte Polaren den sphärischen Kegelschnitt treffen, Tangential-Kreise an denselben gelegt werden, so berühren sich je 2 dieser 4 Tangential Kreise in O; im Uebrigen schneiden sie sich noch in 4 Punkten, welche auf einem zweiten sphärischen Kegelschnitt liegen, dessen Mttelpunkt ebenfalls m ist.

Wird aber die Spitze des von konjugirten Polaren gebildeten involutorischen Kreisbüschels Ox nach f oder f' versetzt, so sind je zwei konjugirte Polaren, z. B. Ofc und Ofd, oder Ofc' und Ofd', zu einander rechtwinklig. Hier lassen sich nun eine Menge von Eigenschaften ebener Kegelschnitte auf unsere spärischen übertragen (man vergleiche z. B. die Abhandlung von Seydewitz im 4. Bd. des Archivs); doch will ich nur einige erwähnen. Zwei durch Of und Of' gelegte Kreise, welche sich auf dem sphärischen Kegelschnitt in s schneiden, bilden mit ihm gleiche Winkel.

Zieht man durch O den Tangential-Kreis von s, und legt durch Of und Of' 2 Kreise, welche ihn rechtwinklig schneiden, so liegen die Durchschnittspunkte auf Einem Kreis. Wenn durch O zwei Kreise gelegt werden, welche den sphärischen Kegelschnitt berühren und sich rechtwinklig schneiden, so liegt dieser Durchschnittspunkt gleichfalls auf einem Kreis.

Die hier betrachteten sphärischen Kegelschnitte erscheinen unter vier Formen, je nachdem die durch O an die Kugel gelegte Berührungs-Ebene einem Kreisschnitt, einem elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Schnitt des Kegels parallel ist. Im ersten Fall ist der sphärische Kegelschnitt wieder ein Kreis; in den beiden letzten Fällen hat er in O eine oder zwei Erzeugende des Kegels zu Tangenten. Für die einer Parabel entsprechenden sphärischen Kegelschnitte will ich Beispielsweise einen Satz erwähnen. Die Brennpunkte sämmtlicher Parabeln, welche die Seiten eines ebenen Dreiecks ABC oder deren Verlängerungen berühren, liegen, wie bekannt, auf dem durch ABC bestimmten Kreis. Alle Direktricen dieser Berührungsparabeln schneiden sich im Höhen Durchschnitt H des Dreiecks. Durch Transformation ergibt sich Folgendes: Man lege durch einen Punkt O einer Kugel 4 Ebenen, wovon die erste die Kugel berührt, und die 3 andern sich und die Kugel in abc schneiden. Alle Kegel zweiten Grades, welche jene 4 Ebenen berühren, bestimmen auf der Kugel sphärische Kegelschnitte, deren Brennpunkte auf dem Kreis abc liegen. Auf der Kugel gibt es einen Punkt h, der die Eigenschaft hat, dass sich durch O und h an jeden dieser sphärischen Kegelschnitte zwei sich rechtwinklig schneidende Tangential-Kreise legen lassen.

Aus dem Angeführten lässt sich nun Vieles über die Natur derjenigen Flächen sagen, welche man durch Transformation aus den Flächen zweiten Grades ableiten kann.

Besonders interessant sind die Gesetze der Transformation durch reciproke Radien vektoren, wenn man die Krümmungsverhältnisse berücksichtigt. Liouville hat zuerst nachgewiesen, dass der Kegel, dessen Spitze O und dessen Basis eine Krümmungslinie der gegebenen Fläche F ist, auch die transformirte f in einer Krümmungslinie schneidet. Hieran schliesst sich noch Manches an; z. B. der Kegel, dessen Spitze O und Basis eine Linie sphärischer Krümmungen von F ist, schneidet auch f in einer solchen Linie. Man nehme 4 Punkte auf einer Curve C an, und lege durch sie eine Kugel K, durch die entsprechenden 4 Punkte der transformirten Curve c geht die Kugel k; aus den am Anfang mit-

getheilten Sätzen folgt sogleich, dass O der Aehnlichkeitspunkt von K und k ist, mithin liegen die Mittelpunkte beider Kugeln mit O in grader Linie. Bei unendlicher Annäherung jener 4 Punkte auf C und auf c verwandeln sich K und k in Schmiegkugeln, woraus folgt: Der Kegel, dessen Spitze O und Basis die Linie der Schmiegkugeln-Mittelpunkte von C ist, enthält auch die Linie der Schmiegkugeln-Mittelpunkte von c. Bilden aber jene 4 Punkte auf C ein Kreisviereck bei unendlicher Annäherung, so findet eine Suroskulation statt; dasselbe ist dann auch in dem entsprechenden Punkte von c der Fall. Wenn man auf C und c je drei Punkte annimmt, so liegen die zwei Kreise, welche hierdurch bestimmt sind, auf einem Kegel, dessen Spitze O ist. Bei unendlicher Annäherung der 3 Punkte auf C und auf c verwandeln sich die Kreise in Krümmungskreise. Also liegen je zwei Krümmungskreise von zwei entsprechenden Punkten einer Curve und ihrer Transformirten auf einem Kegel, dessen Spitze O ist (mithin auch noch auf einem zweiten Kegel und auf einer Kugel); ist der Eine dieser Kreise ein Suroskulationskreis, so ist es auch der Andere. Im 20. Band von Liouville's Journal S. 145 hat de la Gournerie bewiesen, dass die Gleichung vom dritten Grade ist, welche die Anzahl derjenigen Normalkreise in irgend einem Punkt einer Fläche angibt, die suroskuliren; also gibt es in jedem Flächenpunkt wenigstens Einen Suroskulations-Normalkreis; bei den Flächen zweiten Grades existirt in jedem Punkt nur Ein solcher Kreis. Diesem ist aber noch hinzuzufügen, dass in den Endpunkten der Axen zwei Normalkreise suroskuliren, welche in den Hauptebenen liegen, weil hier die betreffenden Krümmungslinien symmetrisch sind, und bekanntlich in jedem Symmetralpunkt einer ebenen Curve eine Suroskulation stattfindet. Die Linien, welche auf dem Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ auf einander folgende Suroskulations-Normalkreise berühren, haben die Gleichung

$$(1-\frac{c^2}{a^2})\frac{x^2}{a^2}+(1-\frac{c^2}{b^2})\frac{y^2}{b^2}=\text{const.},$$

wo der Werth der Constante von einer Linie zur andern wechselt. In jedem Punkt irgend einer Drehungsfläche schneiden sich zwei Berührungslinien auf einander folgender Suroskulations-Normalkreise, und bilden mit dem Meridian dieses Punktes gleiche Winkel. Aus diesen Sätzen lässt sich durch Transformation mittelst reciproker Radien vektoren Einiges ableiten. Dem Suroskulations-Normalkreis in einem Punkte von F entspricht auf f gleichfalls ein Suroskulations-Kreis, welcher aber nicht normal ist, und den ich daher zur Unterscheidung Nebenkreis nenne. Da aber

die transformirte Fläche f in jedem Punkte wenigstens Einen suroskulirenden Normalkreis hat, welchem auf F ein Nebenkreis entspricht, so folgt daraus, dass jede Fläche in jedem Punkte wenigstens Einen suroskulirenden Nebenkreis besitzt. Der Linie, welche auf dem Ellipsoid auf einander folgende Suroskulations-Normalkreise berührt, entspricht auf dem transformirten Ellipsoid eine andere Linie, welche auf einander folgende Suroskulations-Nebenkreise berührt, und deren Gleichung aus dem Obigen sich leicht ableiten lässt. Die transformirten Drehungsflächen haben ein System von Kreisschnitten; in jedem Punkt eines solchen Kreises kreuzen sich zwei Linien, welche auf einander folgende Suroskulations-Nebenkreise berühren, so dass sie mit dem Kreis gleiche Winkel bilden.

Wenn eine Fläche ebene Krümmungslinien enthält, so schneiden die Ebenen, worin sie liegen, die Fläche überall unter demselben Winkel; zufolge eines Theorems von Joachimsthal. Hieraus lässt sich durch Transformation mittelst reciproker Radien vektoren schliessen, dass wenn eine Fläche sphärische Krümmungslinien enthält, die Kugeln, worauf sie liegen, die Fläche auch überall unter gleichem Winkel treffen (Journal von Liouville, Bd. 18. S. 113). Beide Sätze lassen sich umkehren.

Monge hat die Flächen, deren Normalen eine Kugel berühren, untersucht und ihre Gleichung angegeben. Aus den Eigenschaften derselben lässt sich sogleich auf diejenigen Flächen schliessen, deren Kennzeichen darin besteht, dass die Kreise, welche durch einen Punkt O gehen und sie normal schneiden, ebenfalls eine Kugel, beziehungsweise eine Ebene berühren.

II. Transformation durch proportional getheilte Coordinaten.

Es sei $f(x, y, z)$ die Gleichung einer Fläche oder Curve und a, b, c sollen beliebige Constante sein, so ist $f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$ die Gleichung der transformirten Fläche oder Curve. Der Charakter dieser Transformation besteht darin, dass der Grad der Gleichung ungeändert bleibt; es entspricht also einer Geraden, Ebene, Linie oder Fläche zweiten Grades wieder eine Gerade, Ebene, Linie oder Fläche zweiten Grades; wodurch ein Mittel an die Hand gegeben ist, viele Eigenschaften der Drehungsflächen, insbesondere der Kugel auf das Ellipsoid, zu übertragen. Zwei Kreise einer Kugel liegen immer auf 2 Kegeln, deren Spitzen A und J man sonst auch den äussern und innern Aehnlichkeitspunkt beider Kreise

nennt. Die Spitzen derjenigen zwei Kegel, welche die Kugel in den genannten Kreisen berühren, liegen mit A und J in einer Geraden. Wenn nun $f(x, y, z)$ die Gleichung der Kugel vorstellt, so lässt sich diese durch geeignete Wahl der Constanten a, b, c in ein Ellipsoid $f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{c}, \frac{c}{z}\right)$ mit beliebigem Axenverhältniss transformiren; wir haben also den Satz: Zwei elliptische Schnitte eines Ellipsoids liegen immer auf 2 Kegeln, deren Spitzen in gerader Linie liegen mit den Spitzen der beiden weiteren Kegel, welche das Ellipsoid in den genannten Ellipsen berühren. Man lege durch einen Punkt p beliebig viele Ebenen, welche eine Kugel in Kreisen schneiden; die Spitzen der Kegel, welche die Kugel in diesen Kreisen berühren, liegen in einer Ebene P, welche man die Polar-Ebene von p nennt, während dieser Punkt der Pol ist. Es müssen also auch die Aehnlichkeitspunkte von je zweien dieser Kreise in P liegen. Durch Transformation kommt man auf Folgendes: Alle diejenigen Ellipsen eines Ellipsoids, deren Ebenen durch einen Punkt gehen, liegen paarweise auf 2 Kegeln, deren Spitzen in der Polar-Ebene dieses Punkts liegen. Gehen die Ebenen mehrerer Kugelkreise durch eine Gerade, so liegen auch die Spitzen der Kegel, welche die Kugel in diesen Kreisen berühren, in einer Geraden, welche also nach dem Obigen auch die Spitzen derjenigen Kegel enthält, auf welchen je zwei solche Kreise liegen. Beide Gerade heissen konjugirte Polaren. Durch Transformation erhält man den Satz: Wenn die Ebenen von mehreren Ellipsen auf einem Ellipsoid durch eine von 2 konjugirten Polaren gehen, so liegen diese Ellipsen paarweise auf Kegeln, deren Spitzen sich auf den andern Polaren befinden. Besondere Fälle sind, wo Eine dieser Polaren durch den Mittelpunkt geht, oder eine Tangente ist. Auch können die Ellipsen unter Umständen Kreise werden.

Die Ebenen dreier Kugelkreise schneiden sich immer in einem Punkt, p. Es sei P die Polar-Ebene von p, oder die Ebene desjenigen Kreises, in welchem der Kegel, dessen Spitze p ist, die Kugel berührt. Jene drei Ebenen bilden auf diesen Kreis drei Sehnen; die Verbindungslinien von je zwei Endpunkten dieser Sehnen schneiden sich im Ganzen in 6 Punkten, von welchen 4 mal 3 in gerader Linie liegen; hieraus folgt, dass von den 6 Spitzen der Kegel, auf welchen jene drei Kugelkreise liegen, auch 4 mal 3 in gerader Linie liegen, und durch Transformation: Drei ebene Curven eines Ellipsoids (Ellipsen oder Kreise) liegen im Ganzen auf 6 Kegeln, von deren Spitzen 4 mal 3 in gerader Linie liegen. Es lassen sich überhaupt die Gesetze über die Lage der Spitzen von Kegeln, auf welchen solche Ellipsen eines

Ellipsoids liegen, deren Ebenen in einem Punkte konvergiren, ableiten aus den Gesetzen über die Lage der Durchschnittspunkte derjenigen Linien, welche die Endpunkte von Kreissehnen verbinden.

Es ist eine Kugel gegeben, deren Mittelpunkt O ist, und eine Fläche zweiten Grades F. Man schneide F durch eine Ebene, deren Pol p ist, und transformire die Schnittkurve K in einen sphärischen Kegelschnitt k nach den Gesetzen der Transformation durch reciproke Radien vektoren, indem man nämlich nach allen Punkten von K die Radien OM zieht, auf ihnen die Punkte m so bestimmt, dass $OM.Om$ = Constante = dem Quadrat des Halbmessers der Kugel, so liegen die Punkte m auf k. Man lege nun durch zwei auf einander folgende Punkte m Ebenen, senkrecht auf den Strahlen Om, so gehen sie durch p, und ihr Durchschnitt ist senkrecht auf der durch Om gehenden Tangentialebene des Kegels, dessen Spitze O und Basis k oder K ist. Jene Ebenen sind aber die Polar-Ebenen von den entsprechenden Punkten M auf K. Daraus folgt, dass alle Polar-Ebenen von K einen Kegel umhüllen, dessen Spitze p ist, und dessen Erzeugende senkrecht sind auf denjenigen des Kegels OK, welcher also kongruent ist mit dem Ergänzungskegel von OK. Die Polar-Ebenen aller ebenen Schnitte von F umhüllen also Kegel zweiten Grades, mithin umhüllen überhaupt die Polarebenen von F eine Fläche zweiten Grades. Die Transformation mit proportional getheilten Coordinaten führt sofort auf den Satz: Es ist ein Ellipsoid gegeben und eine Fläche zweiten Grades F; man betrachte jeden Punkt von F als die Spitze eines Kegels, welcher das Ellipsoid berührt, so umhüllen die Ebenen der Berührungskurven auch eine Fläche zweiten Grades, φ; da alle Polar-Ebenen einer Geraden durch ihre konjugirte Polare gehen, so folgt daraus, dass wenn F geradlinige Erzeugende hat, diess auch bei φ der Fall ist; je zwei sich entsprechende Erzeugende von F und φ sind konjugirte Polaren. Wenn F ein Ellipsoid ist, und der Mittelpunkt des ersten Ellipsoids ausserhalb, auf dem Umfang oder innerhalb von F liegt, so ist φ ein zweimantliches Hyperboloid, ein elliptisches Paraboloid oder ein Ellipsoid. Einer entwickelbaren Fläche entspricht wieder eine solche, welche aber nicht von den Polar-Ebenen der einzelnen Punkte der ersteren umhüllt wird, sondern deren Erzeugende die konjugirten Polaren der Erzeugenden der gegebenen Fläche sind.

III. Transformation durch Biegung der Flächen.

Auf einer Fläche ist ein Netz von vielen, sehr kleinen Dreiecken

gezeichnet. Wenn nun die Fläche gebogen wird, so dass in keinem Theile derselben weder eine Dehnung, noch eine Pressung stattfindet, so bleiben die Seiten jener Dreiecke ungeändert, also auch die Winkel. Wenn eine beliebige Figur auf der gegebenen Fläche gezogen ist, so bleiben während der Transformation durch Biegung alle Linien gleich lang und die Winkel ungeändert. Diese Transformation ist dieselbe, für welche Gauss nachgewiesen hat, dass auch in jedem Punkte das Krümmungsmaass $\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R'}$ nicht variirt. Namentlich ist noch zu erwähnen, dass eine geodätische (kürzeste) Linie diese Eigenschaft auf der transformirten Fläche beibehält.

Ein specieller Fall solcher Flächenbiegung ist der, wenn eine Ebene über eine entwickelbare Fläche hingelegt wird. Hier folgt eine Zusammenstellung von planimetrischen Sätzen, welche auf entwickelbare Fläche übergetragen sind mit der Modification, dass *statt* Gerade geodätische Linie gesetzt ist.

Alle Punkte der Fläche, welche die Eigenschaft haben, dass die geodätischen Linien, die man von ihnen nach 2 gegebenen Punkten der Fläche ziehen kann, gleich sind, liegen auf einer geodätischen Linie. Die Summe der Winkel in einem geodätischen Dreieck *abc* ist $=180^{0}$. Zieht man durch die Mitten der Seiten des Dreiecks geodätische Linien unter rechten Winkeln, so haben diese einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, dessen geodätische Entfernungen von den Ecken *abc* gleichlang sind. Zieht man durch diese Ecken geodätische Linien, welche die gegenüberliegenden Seiten rechtwinklig schneiden in *d*, *e*, *f*, so haben diese auch einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt, welcher gleichweit entfernt ist von den Seiten des geodätischen Dreiecks *def*. Wenn in einem geodätischen Dreieck ein Winkel $=90^{0}$ ist, so ist das Quadrat einer Seite gleich der Quadratsumme der beiden anderen. Ist in einem solchen Dreieck die Spitze *a* des rechten Winkels beweglich, während die beiden anderen Ecken *b* und *c* fest sind, so beschreibt sie eine Linie, deren Punkte alle von der Mitte von *bc* dieselbe geodätische Entfernung haben. Eine solche Linie hat ähnliche Eigenschaften wie ein Kreis, z. B. zieht man von zwei festen Punkten nach einem beweglichen Punkt *x* auf derselben geodätische Linien, so sind die Winkel bei *x* einander gleich. Alle geodätische Linien, welche sie senkrecht schneiden, haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt. Es lässt sich hier die Uebertragung der Sätze über Kegelschnitte, involutorische Strahlenbüschel, Pol und Polare anknüpfen.

Die Kugel hat bekanntlich die Eigenschaft, dass sämmtliche geodätische Linien (grösste Kreise), welche von einem beliebigen Punkte derselben aus gezogen werden, wieder in einem zweiten Punkt der Kugel konvergiren, und dass sie alle zwischen beiden Punkten gleich lang sind. Die Verbindungslinie der Halbirungspunkte dieser geodätischen Linien ist gleichfalls eine solche Linie Diese Eigenschaft der Kugel theilen alle diejenigen Flächen, welche sich durch die in der Ueberschrift genannte Transformation aus derselben ableiten lassen.

Das Ellipsoid hat 4 Punkte (Nabelpunkte), welche dadurch merkwürdig sind, dass die geodätischen Linien, die von einem derselben ausgehen, wieder in dem entgegengesetzten convergiren, und dass ihre Längen zwischen beiden Punkten constant sind. Die transformirte Fläche des Ellipsoids hat also ebenfalls diese Eigenthümlichkeit.

IV.

De problemate quodam geometrico.

Auctore

Doct. *C. F. Lindman*,

Lectore Strengnaesensi, Reg. Academiae Scient. Holm. Membro.

Distantiis laterum trianguli a centro circuli circumscripti datis, triangulum invenire.

Latera trianguli solito modo per a, b, c angulique oppositi per A, B, C et distantiae a centro circuli circumscripti resp. per α, β, γ designentur.

Primum ponatur $\gamma > \beta > \alpha$.

Sequitur, ut sit $a > b > c$, $A > B > C$. Quum vero unus tantum ex angulis obtusus esse possit, necesse est, sint B et C acuti. Angulus A potest esse obtusus aut acutus. Itaque habemus aequationes

$$a = \pm 2\alpha \operatorname{tg} A, \quad b = 2\beta \operatorname{tg} B, \quad c = 2\gamma \operatorname{tg} C,$$

ubi signum superius valet, si est $A < \frac{\pi}{2}$, inferius, si est $A > \frac{\pi}{2}$. Beneficio aequationum

$$\frac{a}{c} = \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} C}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} C}$$

aequatio prima et secunda per tertiam divisa suppeditat aequationes

$$\gamma \operatorname{Cos} A = \pm \alpha \operatorname{Cos} C, \quad \gamma \operatorname{Cos} B = \beta \operatorname{Cos} C.$$

Reductionibus quibusdam factis invenimus

$$\operatorname{Sec}^3 C - \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\gamma^2} \operatorname{Sec} C \mp \frac{2\alpha\beta}{\gamma^2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

quae aequatio aut unam habet radicem realem aut tres, prout sit

$$\frac{4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^3}{\gamma^6} < \text{aut} > 4 \cdot \frac{27\alpha^2\beta^2}{\gamma^4}$$

vel

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{3} < \text{aut} > \sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}.$$

Quum vero sit medium arithmeticum quantitatum positivarum geometrico majus (vide Klügel, Mathematisches Wörterbuch Tom. V. I. pag. 545.), necesse est, sit

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{3} > \sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

atque ideo omnes radices aequationis (1) reales. Posito

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\gamma^2} = p, \quad \frac{2\alpha\beta}{\gamma^2} = q, \quad \operatorname{Sin} 3\varphi = \frac{3q}{2p\sqrt{\frac{1}{3}p}},$$

inveniuntur radices

$$\mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p} \operatorname{Sin} \varphi; \quad \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p} \operatorname{Sin}(60^0 - \varphi); \quad \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p} \operatorname{Sin}(60^0 + \varphi).$$

Quoniam quantitas incognita est Secans anguli acuti, necesse est, sit positiva et unitate major. Prima igitur radix non est idonea, quippe quae sit unitate minor, id quod eo perspicitur, quod est

$$3\varphi < 90^0, \quad \varphi < 30^0, \quad \operatorname{Sin} \varphi < \tfrac{1}{2}, \quad p < 3.$$

Quia praeterea oportet, quantitatem incognitam esse positivam, tertia radix problemati satisfacit, si signo superiore utimur, secunda, si valet signum inferius. Habebimus igitur

$$\operatorname{Sec} C = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\,\operatorname{Sin}(60^0 \pm \varphi),$$

ubi signum superius sumendum est, si est $A < 90^0$, inferius, si est $A > 90^0$. Itaque problema duas admittit solutiones, si est $\gamma > \beta > \alpha$.

Tum ponatur $\gamma = \beta$, $\gamma > \alpha$. Aequatio (1) transit in

$$x^3 - \frac{\alpha^2 + 2\gamma^2}{\gamma^2}x \mp \frac{2\alpha}{\gamma} = 0 \quad (\text{posita } \operatorname{Sec} C = x).$$

Hanc aequationem ita quoque scribere licet:

$$x^3 - 2x - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}x \mp \frac{2\alpha}{\gamma} = 0 \quad \text{vel} \quad (x \pm \frac{\alpha}{\gamma})[x(x \mp \frac{\alpha}{\gamma}) - 2] = 0.$$

Prima radix est $\mp\frac{\alpha}{\gamma}$, cujus valor numericus est unitate minor atque ideo non idoneus. Alter factor dat

$$x = \pm\frac{\alpha}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\gamma^2} + 2}.$$

Quantitates $\sqrt{\frac{\alpha^2}{4\gamma^2} + 2} \pm \frac{\alpha}{2\gamma}$, quippe quae sint positivae et unitate majores, problemati satisfaciunt, quod nunc quoque duas habet solutiones.

Deinde sit $\gamma > \alpha$, $\beta = \alpha$. Aequatio (1) mutatur in

$$x^3 - \frac{2\alpha^2 + \gamma^2}{\gamma^2}x \mp \frac{2\alpha^2}{\gamma^2} = 0,$$

vel eodem modo ut antea, in

$$(x \pm 1)[x(x \mp 1) - \frac{2\alpha^2}{\gamma^2}] = 0.$$

Una tantum e radicibus problemati satisfacit

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \frac{2\alpha^2}{\gamma^2}} + \tfrac{1}{2}.$$

Denique ponatur $\gamma = \beta = \alpha$. Una tantum exsistit solutio $x = 2$ et triangulum est aequilaterum.

Nota. Problema illud pag. 82. Tomi XXVII. hujus Archivi propositum est a D^o. Skrivan, qui tamen unum quoque angulum datum sumsit, id quod non modo non opus est, sed problema etiam absurdum reddere potest.

V.

Weitere Untersuchungen über Gränzverhältnisse bei Curven.

Von

Herrn Doctor *Völler*

zu Saalfeld.

I.

Zieht man in einer beliebigen Curve eine Tangente parallel zu irgend einer Sehne, so ist — wenn die letztere unendlich klein wird — das Verhältniss der Bogenstücke, die zwischen den Endpunkten der Sehne und dem Berührungspunkte liegen, wie 1:1; und das Verhältniss der Perpendikel, von denen das eine von dem Durchschnittspunkt der an die Endpunkte der Sehne gezogenen Tangenten und das andere von dem Berührungspunkt der zur Sehne parallel geführten Tangente auf die Sehne gefällt, wie 2:1.

Beweis. Die Gleichung der Tangente in dem Punkte m (Taf. I. Fig. 3.), dessen Coordinaten x', y', ist:

$$y-y'=f'(x')(x-x').$$

Da aber nach der Annahme die Tangente parallel zur Sehne MN sein soll, so folgt daraus, dass sie mit der Abscissenaxe denselben Winkel bilden muss, den diese Sehne mit ihr bildet, was die Bedingungsgleichung:

$$f'(x')=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

nach sich zieht, worin x_1, x_2 und y_1, y_2 resp. die Coordinaten der Punkte M und N bedeuten.

Da wo es sich nun um eine bestimmte Curve handelte, würde es also nicht schwer sein, zugleich die Coordinaten des Punktes

m wirklich zu bestimmen; allein in dem vorliegenden Falle können wegen der Unbestimmtheit der Curve die betreffenden Werthe nicht näher angegeben werden. Sobald indess die Sehne unendlich klein angenommen wird, also die Punkte *M* und *N* unendlich nahe an einander gerückt werden, kann man den Bogen *MmN* als eine gerade Linie *), mithin die Abstände *Mm* und *mN* füglich als gleich gross ansehen (Taf. I. Fig. 4.), woraus sich dann ergiebt, dass:

$$x' = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y' = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

also x' und y' die arithmetischen Mittel zwischen den entsprechenden Coordinaten der Punkte *M* und *N* sind.

Dass wir in dem Vorstehenden nicht übereilt geschlossen, folgt auch daraus, dass die Gleichung der Berührenden die Gränze ist, der sich die Gleichung der Curve für die Nachbarschaft des Berührungspunktes ohne Ende nähert. Es muss also die Curve mit der Berührenden in der nächsten Nachbarschaft zusammenfallen, und weil die Berührende auf beiden Seiten des Berührungspunktes gleich gross angesehen werden kann, so lässt sich — wenn *MN* unendlich klein — *Mm* gleich *mN*, demnach

$$x' = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y' = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

setzen.

Hiermit ist aber auch zu gleicher Zeit im Wesentlichen das Verhältniss der Bogen *Mm* und *mN* — bei verschwindender Sehne — angedeutet. Denn da, wie erwähnt worden, die Tangente in der nächsten Nachbarschaft des Berührungspunktes mit der Curve zusammenfällt und die Tangentenelemente auf beiden Seiten des Berührungspunktes gleich gross sind, so ist das Verhältniss dieser wie 1 : 1, folglich auch das Verhältniss der unendlich kleinen Bogen wie

$$1 : 1.$$

Was den zweiten Theil der Untersuchung anbetrifft, so lässt sich das Verhältniss der Höhen *RS* und *mt* (Taf. I. Fig. 3.) auf mehrfache Weise bestimmen. Wollte man es rein a priori ermitteln, ohne auf analytische Deductionen Rücksicht zu nehmen, so würde ungefähr folgender Gedankengang einzuhalten sein.

---

*) So sagt Lacroix: „que l'arc et la corde s'évanouissent en même temps, qu'il est permis de les prendre l'un pour l'autre."

Wenn nehmlich M und N unendlich nahe an m heranrücken, so darf, wie bereits bemerkt, $Mm = mN$, demnach MmN als gleichschenkliges Dreieck angesehen werden. In diesem Falle wird man aber auch füglich Dreieck MRN als gleichschenklig betrachten und die Höhen der beiden erwähnten Dreiecke in eine Linie zusammenfallend denken können. Mit Rücksicht auf diese Annahmen dürfte sich dann der Schluss bilden lassen, dass, weil RS und mt zwar unendlich kleine, aber immerhin — wie auch schon aus der Figur erhellt — ungleich grosse Linien *), RS aus zwei und mt nur aus einem einzigen Element, mithin zwischen beiden Perpendikeln das Verhältniss

$$2:1$$

besteht.

Die analytische Herleitung dieses Gränzverhältnisses ist folgende.

Die Gleichung der Linie mt ist, weil sie durch den Punkt m geht und senkrecht auf der Sehne MN steht:

$$y - y' = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(x - x').$$

Folglich sind die Coordinaten des Punktes t:

$$x = \frac{(y' - y_1)(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)^2 x' + (y_2 - y_1)^2 x_1}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$y = \frac{(x' - x_1)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (y_2 - y_1)^2 y' + (x_2 - x_1)^2 y_1}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Nun ist:

$$mt = \sqrt{\{(x - x')^2 + (y - y')^2\}},$$

demnach nach Substitution der vorstehenden Werthe:

$$mt = \frac{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\{(y' - y_1)(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)^2 (x_1 - x')\}^2 \\ + \{(x' - x_1)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (x_2 - x_1)^2 (y_1 - y')\}^2\end{array}\right\}}}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Diese Formel reducirt sich nach gehöriger Transformation auf

$$mt = \frac{(y' - y_1)(x_1 - x_2) + (x' - x_1)(y_2 - y_1)}{\sqrt{\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\}}}.$$

Auf ganz dieselbe Weise folgt, wenn x'' und y'' die Coordinaten des Punktes R bedeuten, dass:

---

*) Siehe Drobisch: Ueber den Begriff des Stetigen und seine Beziehungen zum Calcül.

$$RS=\frac{(y''-y_1)(x_1-x_2)+(x''-x_1)(y_2-y_1)}{\sqrt{\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\}}}.$$

Mithin ist:

$$\frac{RS}{mt}=\frac{(y''-y_1)(x_1-x_2)+(x''-x_1)(y_2-y_1)}{(y'-y_1)(x_1-x_2)+(x'-x_1)(y_2-y_1)}.$$

Da aber nun, wie schon im Archiv. Thl. XXXI. Nr. XXVII. S. 450. bestimmt worden,

$$x''=\frac{y_2-y_1+f'(x_1)x_1-f'(x_2)x_2}{f'(x_1)-f'(x_2)}$$

und

$$y''=\frac{y_2f'(x_1)-y_1f'(x_2)+f'(x_1)f'(x_2)(x_1-x_2)}{f'(x_1)-f'(x_2)};$$

so ergiebt sich nach Elimination dieser Werthe:

$$\frac{RS}{mt}=\frac{\{f'(x_2)(x_2-x_1)-(y_2-y_1)\}\{f'(x_1)(x_2-x_1)-(y_2-y_1)\}}{\{f'(x_2)-f'(x_1)\}\{(y'-y_1)(x_1-x_2)+(x'-x_1)(y_2-y_1)\}}.$$

Die Voraussetzung, dass das zu bestimmende Verhältniss bei verschwindender Sehne aufgesucht werden soll, nöthigt aber bekanntlich, die Punkte M, m, N als unendlich nahe an einander liegend zu denken, wodurch es ferner möglich wird, die Coordinaten des Punktes $m(x', y')$ (Taf. I. Fig. 5.) auch durch

$$y'=y_1+\partial y_1,\quad x'=x_1+\partial x_1$$

zu bezeichnen.

Setzt man jetzt diese Werthe in die vorstehende Gleichung ein, so folgt:

$$\frac{RS}{mt}=\frac{\{f'(x_2)(x_2-x_1)-(y_2-y_1)\}\{f'(x_1)(x_2-x_1)-(y_2-y_1)\}}{\{f'(x_1)-f'(x_2)\}\{\partial y_1(x_1-x_2)+\partial x_1(y_2-y_1)\}}$$

oder:

$$\frac{RS}{mt}=-\frac{\{f'(x_2)(x_2-x_1)-(y_2-y_1)\}\{(y_2-y_1)+f'(x_1)(x_1-x_2)\}}{\{f'(x_1)-f'(x_2)\}\{y_2-y_1+\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(x_1-x_2)\}\partial x_1},$$

d. i., da $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=f'(x_1)$:

$$\frac{RS}{mt}=-\frac{f'(x_2)(x_2-x_1)-(y_2-y_1)}{\{f'(x_1)-f'(x_2)\}\partial x_1}.$$

Es ist aber nach Obigem erlaubt, so bald die Sehne MN unendlich klein, die Coordinaten des Punktes m auch als arithme-

tische Mittel zwischen denen der Punkte M und N anzusehen, woraus dann — wie aus der Figur erhellt — weiter folgt, dass

$$x_1 + \partial x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

d. i.

$$\partial x_1 = \frac{x_2 - x_1}{2}.$$

Die Substitution dieses Werthes liefert:

$$\frac{RS}{mt} = -\frac{2\{f'(x_2)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)\}}{\{f'(x_1) - f'(x_2)\}(x_2 - x_1)},$$

d. i., weil (Taf. I. Fig. 6.):

$$y_2 - y_1 : x_2 - x_1 = \partial y_1 : \partial x_1,$$

also

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = f'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ist:

$$\frac{RS}{mt} = \frac{2\{f'(x_2)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)\}}{f'(x_2)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)}.$$

Mithin:

$$RS : mt = 2 : 1,$$

w. z. b. w.

II.

1. In dem Aufsatze Thl. XXXI. Nr. XXVII. und in der vorhergehenden Nr. I. habe ich einige Gränzverhältnisse hergeleitet, die sehr leicht zu neuen, interessanten Folgerungen berechtigen.

War nehmlich (Taf. I. Fig. 7.) MN Sehne einer beliebigen Curve, an welche man die Tangenten MR, NR und endlich VW parallel zur Chorde MN gezogen, so verhielt sich bei der Voraussetzung, dass MN unendlich klein wurde:

$$\triangle MRN : \text{Seg.}\ MmN = 3 : 2, \qquad (1)$$

$$RS : mt = 2 : 1, \qquad (2)$$

$$\text{arc.}\ Mm : \text{arc.}\ Nm = 1 : 1. \qquad (3)$$

Hieraus ergiebt sich nun zunächst, da

$$\triangle MRN = \frac{MN.RS}{2}, \quad \triangle MmN = \frac{MN.mt}{2},$$

die Proportion:

$$\Delta MRN : \Delta MmN = \frac{MN \,.\, RS}{2} : \frac{MN \,.\, mt}{2} = RS : mt,$$

d. i., weil

$$RS : mt = 2 : 1$$

ist:

$$\Delta MRN : \Delta MmN = 2 : 1. \tag{4}$$

2. Aus der Proportion

$$\Delta MRN : \text{Seg. } MmN = 3 : 2$$

erhellt, dass

$$\Delta MRN = \frac{3 \,.\, \text{Seg. } MmN}{2}.$$

Setzt man diesen Werth in (4) ein, so folgt ferner:

$$\frac{3 \,.\, \text{Seg. } MmN}{2} : \Delta MmN = 2 : 1,$$

d. i.

$$\text{Seg. } MmN : \Delta MmN = 4 : 3,$$

oder:

$$\Delta MmN : \text{Seg. } MmN = 3 : 4, \tag{5}$$

ein Satz, der allerdings schon bei der Parabel bewiesen zu werden pflegt, hier aber aus viel allgemeineren Gesichtspunkten abgeleitet worden.

3. Wie aus der Figur ersichtlich, ist auch

$$\Delta MRN = \text{Seg. } MmN + \text{Fl. } MRmN \text{ *)}.$$

Demnach geht (1) über in

$$\text{Seg. } MmN + \text{Fl. } MRmN : \text{Seg. } MmN = 3 : 2.$$

Aus dieser Proportion folgt dann weiter:

$$\text{Fl. } MRmN : 3 - 2 = \Delta MRN : 3 = \text{Seg. } MmN : 2.$$

Also:

$$\Delta MRN : \text{Fl. } MRmN = 3 : 1 \tag{6}$$

---

*) Fl. bedeutet Fläche.

und

$$\text{Seg. } MmN : \text{Fl. } MRmN = 2:1. \quad (7)$$

Mithin ergiebt sich auch mit Rücksicht auf (4):

$$2.\triangle MmN : \text{Fl. } MRmN = 3:1,$$

d. i.

$$\triangle MmN : \text{Fl. } MRmN = 3:2. \quad (8)$$

4. In ähnlicher Weise lässt sich

$$\text{Seg. } MmN = \triangle MmN + \text{Seg. } Mnm + \text{Seg. } moN$$

setzen, weshalb die Proportion (5) auch die Form

$$\triangle MmN : \triangle MmN + \text{Seg. } Mnm + \text{Seg. } moN = 3:4$$

annehmen kann, woraus sich dann ergiebt:

$$\text{Seg. } Mnm + \text{Seg. } moN : 4-3 = \triangle MmN : 3 = \text{Seg. } MmN : 4.$$

Also:

$$\triangle MmN : \text{Seg. } Mnm + \text{Seg. } moN = 3:1, \quad (9)$$

und:

$$\text{Seg. } MmN : \text{Seg. } Mnm + \text{Seg. } moN = 4:1. \quad (10)$$

Mithin auch mit Bezugnahme auf (1):

$$\frac{2.\triangle MRN}{3} : \text{Seg. } Mnm + \text{Seg. } moN = 4:1$$

oder:

$$\triangle MRN : \text{Seg. } Mnm + \text{Seg. } moN = 12:2 = 6:1. \quad (11)$$

Nimmt man endlich noch auf die Proportion (7) Rücksicht, so folgt:

$$3.\text{Fl. } MRmN : \text{Seg. } Mnm + \text{Seg. } moN = 6:1,$$

d. i.

$$\text{Fl. } MRmN : \text{Seg. } Mnm + \text{Seg. } moN = 6:3 = 2:1. \quad (12)$$

5. Da sich verhält:

$$\triangle MRN : \triangle MmN = 2:1,$$

so gilt auch die Proportion:

$$\triangle MRN - \triangle MmN : 2-1 = \triangle MRN : 2 = \triangle MmN : 1,$$

d. i. einerseits:

$$\triangle MRN : \text{Viereck } MRmN = 2:1, \quad (13)$$

und andererseits:

$$\Delta\, MmN : \text{Viereck } MRmN = 1:1. \qquad (14)$$

Mit Rücksicht auf die bereits feststehenden Proportionen ergiebt sich dann weiter:

$$\text{Seg. } MmN : \text{Viereck } MRmN = 4:3, \qquad (15)$$

ferner:

$$\text{Seg. } Mnm + \text{Seg. } moN : \text{Viereck } MRmN = 1:3, \qquad (16)$$

und endlich:

$$\text{Fl. } MRmN : \text{Viereck } MRmN = 2:3. \qquad (17)$$

Vorstehende einfache und eben deshalb recht interessante Relationen, die sammt und sonders aus den Gränzverhältnissen (1) und (2) hergeleitet worden, dürften wohl zu weiteren Untersuchungen Veranlassung geben können.

VI.

Der Fermat'sche und der Wilson'sche Satz, aus einer gemeinschaftlichen Quelle abgeleitet.

Von

Herrn *Julius Toeplitz*,

Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften am Gymnasium zu Lissa.

Es sei p eine ungerade Primzahl und

$$fx = (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-p+1).$$

Wir versuchen nun, fx nach fallenden Potenzen von x zu entwickeln. Alsdann ist offenbar:

$$fx = x^{p-1} - A_1 x^{p-2} + A_2 x^{p-3} - A_3 x^{p-4} + \dots + A_{p-3} x^2 - A_{p-2} x + A_{p-1}.$$

Setzt man $x=0$, so findet man $A_{p-1}=\pm 1.2.3....(p-1)$. Um, für die übrigen Koëfficienten $A_1, A_2, ..., A_{p-2}$ ein rekurrirendes Gesetz zu finden, setzen wir $x+1$ an die Stelle des x. Alsdann erhalten wir:

$$f(x+1)=x(x-1)(x-2)....(x-p+2)=\frac{x.fx}{x-p+1}$$

oder

$$(x+1-p).f(x+1)=x.fx.$$

Setzt man für $f(x+1)$ und fx die entsprechenden Entwickelungen, so kömmt:

$$(x+1)^p-(A_1+p).(x+1)^{p-1}+(A_2+pA_1).(x+1)^{p-2}$$
$$-(A_3+pA_2).(x+1)^{p-3}+....+(A_{p-3}+pA_{p-4}).(x+1)^3$$
$$-(A_{p-2}+pA_{p-3}).(x+1)^2+(A_{p-1}+pA_{p-2}).(x+1)$$
$$=x^p-A_1x^{p-1}+A_2x^{p-2}-A_3x^{p-3}+....+A_{p-3}x^3-A_{p-2}x^2+A_{p-1}x.$$

Vergleichen wir auf beiden Seiten die Koëfficienten von x^p, x^{p-1}, x^{p-2}, u. s. w., so erhalten wir folgende Gleichungen:

$1=1$,

$\frac{p}{1}-(A_1+p)=-A_1$,

$\frac{p(p-1)}{1.2}-\frac{p-1}{1}(A_1+p)+A_2+pA_1=A_2$, woraus $A_1=\frac{p(p-1)}{1.2}$,

. . . .

allgemein:

(I)

$$\frac{p(p-1)(p-2)....(p-n+1)}{1.2.3....(n-1)n}-\frac{(p-1)(p-2)....(p-n+1)}{1.2.3....(n-1)}(A_1+p)$$
$$+\frac{(p-2)(p-3)....(p-n+1)}{1.2.3....(n-2)}(A_2+pA_1)-....\pm\frac{p-n+1}{1}(A_{n-1}+pA_{n-2})$$
$$\mp(A_n+pA_{n-1})=\mp A_n.$$

Diese Rekursionsformel (I) setzt uns in den Stand, zu beweisen, dass die Koëfficienten $A_1, A_2, ..., A_{p-2}$ durch p theilbar sind. Denn, so lange $n<p$, ist der Binomialkoëfficient $\frac{p(p-1)....(p-n+1)}{1.2.3....n}$

eine ganze Zahl und >1, und, wie bekannt, durch p theilbar. Setzen wir für die übrigen vorkommenden Binomialkoëfficienten, die offenbar ganze Zahlen sind, die Abkürzungen $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$, so erhält unsere Rekursionsformel (I) nach einer leichten Reduktion folgende Form:

(II)

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1.2.3\ldots n} - K_1(A_1+p) + K_2(A_2+pA_1) - \ldots$$
$$\ldots \pm K_{n-1}(A_{n-1}+pA_{n-2}) \mp pA_{n-1} = 0.$$

Wäre nun bewiesen, dass $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ durch p theilbar sind, so lehrt der blosse Anblick der Formel (II), dass $K_{n-1}\, A_{n-1}$ ebenfalls durch p theilbar sein muss. Es ist aber $K_{n-1} = p-n+1$ nicht durch p theilbar; folglich muss A_{n-1} durch p theilbar sein. Es ist ferner $A_1 = \frac{p(p-1)}{1.2}$ durch p theilbar; folglich sind es auch $A_2, A_3, \ldots,$ bis A_{p-2}.

Also haben wir gefunden, dass

$$(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p+1) \equiv x^{p-1} + A_{p-1} \ \{\text{mod. } p\}.$$

Da nun $A_{p-1} = 1.2.3\ldots(p-1)$, so haben wir den Lehrsatz:

„Wenn p eine ungerade Primzahl ist, so ist für jede ganze Zahl x:

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1) \equiv x^{p-1} + 1.2.3\ldots(p-1) \ \{\text{mod. } p\}.“$$

Der Wilson'sche Satz. Setzen wir $x=1$, so kömmt:

$$0 \equiv 1 + 1.2.3\ldots(p-1) \ \{\text{mod. } p\}.$$

Der Fermat'sche Satz. Durch den eben gefundenen Wilson'schen Lehrsatz bekömmt der obige folgende Form:

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1) \equiv x^{p-1} - 1 \ \{\text{mod. } p\}.$$

Ist also $x \equiv 1, 2, 3, \ldots, p-1$ {mod. p}, so wird einer der Faktoren der linken Seite $\equiv 0$ {mod. p}; also ist alsdann:

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \ \{\text{mod. } p\}.$$

VII.

Zur Theorie der dreiseitigen Pyramide. Nach einem Vortrage des Herrn Professor Joachimsthal

redigirt von

Herrn *H. Liersemann*
in Breslau *).

Lemma 1. Projicirt **) man einen Winkel lmn auf eine durch mn gelegte Ebene, so ist die Projection $l'mn$ dieses Winkels zugleich mit dem Winkel lmn ein rechter, und umgekehrt.

Da durch parallele Verschiebung alle Winkelverhältnisse zwischen Linien und Ebenen ungeändert bleiben, so ergiebt sich hieraus folgendes:

Lemma 2. Projicirt man zwei Gerade auf eine Ebene, welche der einen von ihnen parallel ist, so sind die Projectionen auf einander senkrecht, wenn die Geraden es sind, und umgekehrt.

Mittelst dieser Hilfssätze lassen sich unter andern die Beweise der in diesem Journal Theil XXXI. Seite 41. über das irreguläre Tetraeder mitgetheilten Sätze übersichtlich darstellen. Als Beispiel wählen wir den

Satz. Stehen in einem beliebigen Tetraeder zwei Paar ge-

---

*) Herr Liersemann schreibt mir: „dass die Veröffentlichung dieses Aufsatzes mit Bewilligung und auf Anregung des Herrn Professor Joachimsthal in Breslau geschehe." G.

**) Unter Projectionen werden hier immer rechtwinklige verstanden.

genüberstehender Kanten auf einander senkrecht, so steht auch das dritte Paar gegenüberstehender Kanten auf einander senkrecht.

Es sei (Taf. I. Fig. 8.) BCD die Grundfläche des Tetraeders, dessen Spitze A in a projicirt wird. Setzen wir voraus, dass $BA \perp DC$, $CA \perp DB$ stehe, so folgt mit Hilfe der obigen Lemmata, dass die Projectionen $Ba \perp DC$, $Ca \perp DB$ sind. Ba und Ca sind folglich zwei Höhen des Dreiecks BCD, und a der Höhenpunkt, d. h. der Durchschnittspunkt der Höhen des Dreiecks BCD. Die Projection der dritten Seitenkante, nämlich Da, ist folglich, weil sie durch den Höhenpunkt a geht, die dritte Höhe des Dreiecks BCD, und somit $\perp BC$. Daraus folgt aber, dass $DA \perp BC$ ist.

Zusatz. Denkt man sich in einer beliebigen Kugel Radien gezogen, welche den sechs Kanten der im vorhergehenden Satze betrachteten Pyramide resp. parallel sind, so liegen je drei von ihnen in einer Ebene, d. h. in einem grössten Kugelkreise. Die sechs Schnittpunkte der Radien in die Kugel sind also die Eckpunkte eines vollständigen Kugelvierseits (Taf. I. Fig. 9.), dessen Diagonalen Quadranten sind, weil die Schenkel ihrer Centriwinkel, als den drei Paar gegenüberstehender Kanten der Pyramide parallel, auf einander senkrecht sind. Der obige Satz ergiebt also für dieses sphärische Vierseit folgenden Satz:

Wenn in einem vollständigen sphärischen Vierseit zwei Diagonalen Quadranten sind, so ist auch die dritte ein Quadrant.

Durch Polarisation erhält man hieraus den Satz:

Wenn in einem vollständigen Kugelviereck zwei Paar Gegenseiten auf einander senkrecht sind, so ist auch das dritte Paar Gegenseiten senkrecht auf einander (Taf. I. Fig. 10.).

Drei Ecken des Vierecks, z. B. A, B, C (Taf. I. Fig. 10ª.) bilden ein Dreieck, dessen Höhen die Verbindungsbogen dieser drei Ecken mit der vierten D sind, also durch einen Punkt gehen; und man kann daher dem letzten Satze auch folgende bekannte Form geben:

Die drei Höhen eines sphärischen Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Hieraus ist ersichtlich, dass man den oben bewiesenen Lehrsatz auch dadurch hätte beweisen können, dass man, von dem Satze fürs Kugeldreieck ausgehend, durch Polarisation den Satz fürs vollständige Vierseit auf der Kugel ableitete und von diesem zu dem Satze über die dreiseitige Pyramide gelangte.

Die Anwendung der beiden Lemmata auf die übrigen am angegebenen Orte aufgestellten Sätze möge hier übergangen werden. Wichtig ist noch die Anwendung derselben auf den von Steiner angegebenen

Satz. Die vier Höhenperpendikel eines beliebigen Tetraeders liegen auf einem einfachen Hyperboloide.

Es sei (Taf. I. Fig. 11.) BCD die Grundfläche, auf welche in a die Spitze des Tetraeders projicirt sei. Alsdann projiciren sich nach unsern Lemmatis die drei Höhen, welche von B, C, D auf die gegenüberstehenden Seitenflächen gefällt werden, auf die Fläche BCD in den drei Höhen dieses Dreiecks; denn z. B. die von C auf ABD gefällte Höhe steht auf jeden Geraden der Ebene ABD, also auch auf BD senkrecht, und somit auch ihre Projection auf BD. Diese Projectionen schneiden sich folglich im Höhenpunkte a. Errichtet man daher in diesem Punkte a ein Perpendikel, so schneidet es die drei Höhen des Tetraeders, welche von B, C, D aus gefällt werden, und ist der vierten von A aus gefällten parallel, schneidet sie also ebenfalls, indem man unter Schneiden zweier Linien im Allgemeinen versteht, dass sie nicht windschief sind, sondern in einer Ebene liegen. Das Perpendikel, im Höhenpunkt des Dreiecks BCD auf dem Dreieck errichtet, schneidet folglich alle vier Höhenperpendikel des Tetraeders. Dasselbe gilt natürlich auch von den Perpendikeln, welche auf den Seitenflächen des Tetraeders in deren Höhepunkten errichtet werden, und wir haben somit zwei solche Systeme von vier Linien, dass jede Linie des einen Systems alle vier des andern schneidet. Diese beiden Quaternionen von Linien liegen somit auf einem einfachen Hyperboloide: und zwar gehört die eine Quaternion dem einen Systeme der Geraden, die andere dem andern Systeme der Geraden des Hyperboloids an.

Anmerkung. Dieser Satz findet sich von Steiner im zweiten Bande des Crelle'schen Journals und in seiner „Abhängigkeit geometrischer Gestalten etc. (Berlin 1832)" auf Seite 316 ausgesprochen; an der zweiten Stelle verbessert zugleich Steiner die von ihm an der ersten gemachte irrige Angabe betreffs der Modificationen dieses Satzes für den Fall, dass zwei oder drei Höhenperpendikel des Tetraeders sich in einem Punkte schneiden. Der vier in den Höhenpunkten der Tetraederflächen auf diese errichteten Lothe thut der Steiner'sche Satz keine Erwähnung.

Hieran schliesst sich ein Satz, welchen Prof. Joachimsthal über die Lage folgender drei Punkte gefunden hat: des Mittel-

punktes der dem Tetraeder umschriebenen Kugel, des Schwerpunktes des Tetraeders und seines hyperboloidischen Mittelpunktes (d. h. des Mittelpunktes desjenigen einfachen Hyperboloides, auf welchem die Höhen des Tetraeders liegen). Dieser Satz lautet:

Der Mittelpunkt der dem Tetraeder umschriebenen Kugel, der Schwerpunkt und der hyperboloidische Mittelpunkt desselben liegen in einer Geraden, und zwar der Schwerpunkt in der Mitte zwischen den beiden andern.

Bezeichnet man den Mittelpunkt der Kugel mit K, den Schwerpunkt des irregulären Tetraeders mit S, und seinen hyperboloidischen Mittelpunkt mit P, und die Projectionen dieser Punkte auf eine der Seitenflächen des Tetraeders, z. B. auf BCD (Taf. I. Fig. 12.) mit k, s, p, so ist zunächst p der Mittelpunkt der Geraden, welche die Projection der Spitze A auf BCD mit dem Höhenpunkte α dieses Dreiecks verbindet*). Ferner ist k der Mittelpunkt des dem Dreieck BCD umschriebenen Kreises. Um endlich die Lage von s zu finden, bestimme man den Schwerpunkt σ des Dreiecks BCD (welcher nach dem Eulerschen Satze über die merkwürdigen Punkte des Dreiecks in einer Geraden mit α und k und so zwischen ihnen liegt, dass $\alpha\sigma = 2.\sigma k$ ist), verbinde diesen Punkt mit der Projection a der Spitze A auf BCD und theile diese Gerade so, dass $as = 3.s\sigma$ ist. Dann ist s die gesuchte Projection des Schwerpunktes S auf BCD, weil S auf der Geraden σA liegt, so dass $AS = 3.S\sigma$ ist. Man hat nun im Dreieck $\alpha\sigma a$, wenn man nach der Theorie von Möbius die Vorzeichen berücksichtigt:

$$\frac{\alpha k}{\sigma k} = 3, \quad \frac{\sigma s}{as} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{ap}{\alpha p} = -1,$$

und folglich durch Multiplication dieser Gleichungen:

---

*) Denn das Höhenperpendikel Aa des Tetraeders ist parallel der in α auf BCD errichteten Senkrechten, und liegt mit ihr auf dem bekannten Hyperboloide. Legt man daher in der Mitte zwischen diesen beiden Geraden eine Parallele zu beiden hindurch, so liegt diese auf dem Asymptotenkegel des einfachen Hyperboloides, welches die Höhen des Tetraeders enthält, worüber man Steiners „Abhängigkeit geometrischer Gestalten etc." Seite 198. Anmerkung. vergleiche. Der Punkt, in welchem diese Seite des Asymptotenkegels die Fläche BCD trifft, ist folglich die Projection des Mittelpunktes dieses Kegels, d. h. des hyperboloidischen Mittelpunktes des Tetraeders auf diese Fläche BCD.

$$\frac{ak.\sigma s.ap}{\sigma k.as.ap}=+1.$$

Nach der Umkehrung des Ptolemäischen Lehrsatzes weiss man folglich, dass psk eine Gerade ist. Man hat somit ferner im Dreieck apk nach dem Ptolemäischen Lehrsatze die Gleichung:

$$\frac{a\sigma.pa.ks}{\alpha a.ps.k\sigma}=+1,$$

und folglich:

$$\frac{ps}{ks}=-1.$$

Es liegen folglich die Projectionen der drei Punkte K, S, P auf diese Seitenfläche des Tetraeders in einer Geraden und zwar die Projection von S mitten zwischen den beiden andern. Dieselbe Beziehung gilt selbstverständlich auch für die Projectionen dieser drei Punkte auf die andern Seitenflächen und somit auch für die drei genannten Punkte selbst.

VIII.

Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Durège in Theil XXX. No. XIX. dieses Archivs.

Von

Herrn Doctor *Lottner*,

Oberlehrer an der Realschule zu Lippstadt.

In dem genannten Aufsatze hat Herr Durège den Legendre'schen Satz:

$$n^n-\frac{n}{1}(n-1)^n+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n-\ldots=1.2.3\ldots.n$$

(n eine ganze positive Zahl)

auf eine Art bewiesen, bei welcher sich ergiebt, dass die Reihe verschwindet, wenn die Exponenten der Grössen n, $n-1$, $n-2$.... kleiner als n sind. Dabei findet der Herr Verfasser auch die Summe der Reihe, wenn der gedachte Exponent die Zahl n um 1 oder 2 übertrifft, fügt aber hinzu, dass für höhere Potenzen dieselbe sich nicht einfach aussprechen lasse. Ich will deshalb kurz angeben, wie man zu einer gesetzmässigen Darstellung gelangen kann.

Es ist

$$1)\qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} n_s \cos s\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Differenziation:

$$2)\quad \begin{cases} (-1)^p \sum_{s=1}^{s=\infty} n_s s^{2p} \cos s\alpha = 2^n \dfrac{d^{2p}.(\cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2})}{d\alpha^{2p}}, \\ (-1)^{p+1} \sum_{s=1}^{s=\infty} n_s s^{2p+1} \sin s\alpha = 2^n \dfrac{d^{2p+1}.(\cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2})}{d\alpha^{2p+1}}. \end{cases}$$

Die angedeuteten Differenziationen lassen sich sehr leicht ausführen, wenn man bedenkt, dass

$$2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}[(1+e^{i\alpha})^n + (1-e^{-i\alpha})^n].$$

Es seien nun $\beta_1^{(k)}$, $\beta_2^{(k)}$.... $\beta_m^{(k)}$.... Coefficienten, die den Gleichungen

$$3)\quad \begin{cases} \beta_1^{(k+1)} = k + \beta_1^{(k)}, \\ \beta_2^{(k+1)} = (k-1)\beta_1^{(k)} + \beta_2^{(k)}, \\ \beta_3^{(k+1)} = (k-2)\beta_2^{(k)} + \beta_3^{(k)}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{(k-1)}^{(k+1)} = 2\beta_{k-2}^{(k)} + \beta_{k-1}^{(k)}, \\ \beta_k^{(k+1)} = \beta_{k-1}^{(k)}, \end{cases}$$

und folglich der Gleichung

$$4)\quad (k-1)!\,\beta_1^{(k+1)} - (k-2)!\,\beta_2^{(k+1)} + (k-3)!\,\beta_3^{(k+1)} + \ldots \\ \ldots \pm \beta_k^{(k+1)} = k!$$

genügen, wobei zu bemerken, dass $\beta_0^{(k)} = 1$, $\beta_k^{(k)} = 0$; so wird:

5)

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} n_s s^{2p} \cos s\alpha = n(n-1)\ldots(n-2p+1)2^{n-2p}\cos^{n-2p}\frac{\alpha}{2}\cos(n+2p)\frac{\alpha}{2}$$

$$+\beta_1{}^{(2p)}n(n-1)\ldots(n-2p+2)2^{n-2p+1}\cos^{n-2p+1}\frac{\alpha}{2}\cos(n+2p-1)\frac{\alpha}{2}$$

$$+\ldots+\beta_{2p-2}{}^{(2p)}n(n-1)2^{n-2}\cos^{n-2}\frac{\alpha}{2}\cos(n+2)\frac{\alpha}{2}$$

$$+\beta_{2p-1}{}^{(2p)}n2^{n-1}\cos^{n-1}\frac{\alpha}{2}\cos(n+1)\frac{\alpha}{2},$$

6)

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} n_s s^{2p+1}\sin s\alpha = n(n-1)\ldots(n-2p)2^{n-2p-1}\cos^{n-2p+1}\frac{\alpha}{2}\sin(n+2p+1)\frac{\alpha}{2}$$

$$+\beta_1{}^{(2p+1)}n(n-1)\ldots(n-2p+1)2^{n-2p}\cos^{n-2p}\frac{\alpha}{2}\sin(n+2p)\frac{\alpha}{2}$$

$$+\ldots+\beta_{2p}{}^{(2p+1)}n2^{n-1}\cos^{n-1}\frac{\alpha}{2}\sin(n+1)\frac{\alpha}{2}.$$

Diese Formeln können jedoch nur gebraucht werden, wenn $2p$ und $2p+1$ die Zahl n nicht übertrifft. Im andern Falle hat man:

1) $n+m$ eine gerade Zahl.

$$7)\left\{\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{s=\infty} n_s s^{n+m}\cos s\alpha = n(n-1)\ldots 1\beta_m{}^{(n+m)}\cos 2n\frac{\alpha}{2}\\
&+2.n(n-1)\ldots 2.\beta_{m+1}{}^{(n+m)}\cos(2n-1)\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\\
&+2^2n(n-1)\ldots 3\beta_{m+2}{}^{(n+m)}\cos(2n-2)\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}+\ldots\\
&\ldots+2^{n-2}\beta_{m+n-2}{}^{(n+m)}n(n-1)\cos(n+2)\frac{\alpha}{2}\cos^{n-2}\frac{\alpha}{2}\\
&+\beta_{n+m-1}{}^{(n+m)}2^{n-1}\cos(n+1)\frac{\alpha}{2}\cos^{n-1}\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}\right.$$

2) $n+m$ eine ungerade Zahl.

$$8)\left\{\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{s=\infty} n_s s^{n+m}\sin s\alpha = n(n-1)\ldots 1\beta_m{}^{(n+m)}\sin 2n\frac{\alpha}{2}\\
&+2.n(n-1)\ldots 2.\beta_{m+1}{}^{(n+m)}\sin(2n-1)\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\\
&+2^2n(n-1)\ldots 3\beta_{m+2}{}^{(n+m)}\sin(2n-2)\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\\
&+\ldots 2^{n-2}\beta_{n+m-2}{}^{(m+n)}n(n-1)\sin(n+2)\frac{\alpha}{2}\cos^{n-2}\frac{\alpha}{2}\\
&+2^{n-1}n.\beta_{m+n-1}{}^{(m+n)}\sin(n+1)\frac{\alpha}{2}\cos^{n-1}\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}\right.$$

Um nun die verlangte Summe zu finden, setze man:

a) wenn $k<n$

in 5) $\alpha=\pi$, und erhält, weil alle Glieder auf der rechten Seite mit $\cos\frac{\alpha}{2}$ behaftet sind:

$$9)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s+1}s^k n_s=0;$$

b) wenn $k=n$,

so ergiebt sich aus (7):

$$10)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s+1}s^n n_s=(-1)^{n+1}1.2.3\ldots.n,$$

welches der Legendre'sche Satz ist;

c) wenn $k>n$:

$$11)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s+1}n_s s^{n+m}=(-1)^{n+1}1.2.3\ldots.n.\beta_m{}^{(n+m)},$$

welches die verlangte allgemeine Relation ist.

Zur successiven Berechnung der β genügen die Gleichungen 3) und 4) vollständig.

Nebenbei erhält man auch, wenn $k<n$:

$$12)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty}n_s s^k=n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)2^{n-k}$$

$$+n(n-1)\ldots.(n-k+2)2^{n-k+1}\beta_1{}^{(k)}+n(n-1)\ldots.(n-k+3)2^{n-k+2}\beta_2{}^{(k)}$$

$$+\ldots.+n(n-1)2^{n-2}\beta_{k-2}{}^{(k)}+n2^n\beta_{k-1}{}^{(k)},$$

$$13)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty}n_s s^{n+m}=n(n-1)\ldots.\beta_{(m+n)}{}^m+2n(n-1)\ldots.2\beta_{m+1}{}^{(m+n)}$$

$$+2^2n(n-1)\ldots.3\beta_{m+2}{}^{(m+n)}+\ldots.+n2^{n-1}\beta_{m+n-1}{}^{(m+n)}.$$

Käme es bloss darauf an, die Legendre'sche Relation und das Verschwinden der Summe, falls die Exponenten kleiner als n sind, zu beweisen, so liesse sich dies leicht aus der Eigenschaft des Binomial-Coefficienten ableiten. Es ist stets

$$(n+1)_s=\frac{n+1}{s}n_{s-1}=\frac{n+1}{s}\{(n+1)_s-n_s\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit s^p und lässt s alle Werthe von 1 bis ∞ annehmen, addirt und setzt für $n+1$ einfach n, so ist

14)

$$\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s+1}n_s s^p = n\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s+1}n_s s^{p-1} - n\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s+1}(n-1)_s s^{p-1}.$$

Wenn $p=1$, so folgt daraus:

$$\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s+1}n_s s = n\left(n-\frac{n(n-1)}{1.2}+....\right)-n\left(n-1-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}+....\right)$$

$$=n\{1-(1-1)^n-1+(1-1)^{n-1}\}=0.$$

Ebenso schliesst man:

$$\Sigma(-1)^{s+1}n_s s^2 = n\Sigma(-1)^{s+1}n_s s - n\Sigma(-1)^{s+1}(n-1)_s s = 0.$$

Wenn man auf diese Weise fortschreitet, so sieht man, dass die fraglichen Reihen immer Null werden, so lange der Exponent p kleiner als die Zahl n ist. Wird $n=p$, so folgt mit Berücksichtigung dieser Eigenschaft aus 13):

$$f(n)=\Sigma(-1)^{s+1}n_s s^n = -n\Sigma(-1)^{s+1}(n-1)_s s^{n-1} = -nf(n-1).$$

Daraus schliesst man

$$f(n)=(-1)^2 n(n-1)f(n-2),$$

und allgemein

$$f(n)=(-1)^{n+1}.1.2.3....nf(1).$$

Da $f(1)=1$ ist, so ist auch hierdurch der Legendre'sche Satz bewiesen.

Nachschrift des Herausgebers zu der vorhergehenden Abhandlung.

Die vorhergehende Abhandlung des Herrn Doctor Lottner und die Abhandlung des Herrn Doctor Durège in Thl. XXX. Nr. XIX. veranlassen mich, an eine von mir schon vor sechs und dreissig Jahren in meinen „Mathematischen Abhandlungen. Erste Sammlung. Altona. 1822. 4°. S. 67—S. 93." veröffentlichte Abhandlung zu erinnern, in welcher ich die Reihen von der Form

$$n^m-\frac{n}{1}(n-1)^m+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^m-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^m+....,$$

deren nähere Betrachtung schon Euler in der Abhandlung: De curva hypergeometrica (Novi Comment. Petrop. T. XIII.) den Mathematikern empfohlen hat, einer ausführlichen Untersuchung unterzogen habe.

In dieser Abhandlung, in welcher ich die obige Reihe durch $\overset{m}{N}$ bezeichne, habe ich auf verschiedene Arten bewiesen, dass

$$\overset{m}{N}=0 \text{ für } m<n;$$

ferner, dass

$$\overset{m}{N}=1.2.3\ldots n \text{ für } m=1;$$

und habe dann auch eine allgemeine Methode, die obigen Reihen in den Fällen, wo $m>n$ ist, zu summiren, entwickelt. Nach dieser Methode habe ich eine grössere Anzahl von Summen berechnet, welche ich im Folgenden angeben will, indem ich dabei, wie jetzt gewöhnlich,

$$n_k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$$

setzen werde, wogegen ich in meiner oben angeführten Abhandlung noch die ältere Hindenburg'sche Bezeichnung der Binomial-Coefficienten gebraucht habe, wie es in damaliger Zeit noch gewöhnlich war.

Es ist

$$\overset{n+1}{N}=1.2.3\ldots n.(n+1)_2,$$

oder

$$\overset{n+1}{N}=1.2.3\ldots n.\frac{n(n+1)}{1.2}.$$

Ferner ist

$$\overset{n+2}{N}=1.2.3\ldots n.\{3.(n+3)_4-2.(n+2)_3\}$$

oder

$$\overset{n+2}{N}=1.2.3\ldots n.\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.\frac{3n+1}{4}.$$

Ferner ist

$$\overset{n+3}{N}=1.2.3\ldots n\{15.(n+5)_6-20.(n+4)_5+6.(n+3)_4\}$$

oder

$$\overset{n+3}{N}=1.2.3\ldots n.\frac{n(n+1)}{1.2}.\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit s^p und lässt s alle Werthe von 1 bis ∞ annehmen, addirt und setzt für $n+1$ einfach n, so ist

14)

$$\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s+1}n_s s^p = n\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s+1}n_s s^{p-1} - n\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s+1}(n-1)_s s^{p-1}.$$

Wenn $p=1$, so folgt daraus:

$$\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s+1}n_s s = n\left(n-\frac{n(n-1)}{1.2}+\ldots\right)-n\left(n-1-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}+\ldots\right)$$

$$= n\{1-(1-1)^n-1+(1-1)^{n-1}\} = 0.$$

Ebenso schliesst man:

$$\Sigma(-1)^{s+1}n_s s^2 = n\Sigma(-1)^{s+1}n_s s - n\Sigma(-1)^{s+1}(n-1)_s s = 0.$$

Wenn man auf diese Weise fortschreitet, so sieht man, dass die fraglichen Reihen immer Null werden, so lange der Exponent p kleiner als die Zahl n ist. Wird $n=p$, so folgt mit Berücksichtigung dieser Eigenschaft aus 13):

$$f(n) = \Sigma(-1)^{s+1}n_s s^n = -n\Sigma(-1)^{s+1}(n-1)_s s^{n-1} = -nf(n-1).$$

Daraus schliesst man

$$f(n) = (-1)^2 n(n-1)f(n-2),$$

und allgemein

$$f(n) = (-1)^{n+1}.1.2.3\ldots.nf(1).$$

Da $f(1)=1$ ist, so ist auch hierdurch der Legendre'sche Satz bewiesen.

Nachschrift des Herausgebers zu der vorhergehenden Abhandlung.

Die vorhergehende Abhandlung des Herrn Doctor Lottner und die Abhandlung des Herrn Doctor Durège in Thl. XXX. Nr. XIX. veranlassen mich, an eine von mir schon vor sechs und dreissig Jahren in meinen „Mathematischen Abhandlungen. Erste Sammlung. Altona. 1822. 4°. S. 67—S. 93.“ veröffentlichte Abhandlung zu erinnern, in welcher ich die Reihen von der Form

$$n^m - \frac{n}{1}(n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^m + \ldots,$$

Endlich ist die in dieser Abhandlung gegebene ausführliche Theorie der Reihen $\overset{m}{N}$, in Verbindung mit anderen analytischen Sätzen, zur Entwickelung einer grösseren Anzahl independenter Formeln für die Bernoulli'schen Zahlen benutzt worden, woraus sich dann zugleich wieder neue Relationen zwischen den Reihen $\overset{m}{N}$, und auch zwischen den Reihen von der Form

$$m^n-(n+1)_1.(m-1)^n+(n+1)_2.(m-2)^n....\pm(n+1)_{m-1}.1^n,$$

die durch $\overset{m}{[n]}$ bezeichnet worden sind, ergeben haben. So ist z. B., um nur einen Satz anzuführen, immer

$$\overset{1}{[2n]}-\overset{2}{[2n]}+\overset{3}{[2n]}-\overset{4}{[2n]}+....+\overset{2n-1}{[2n]}-\overset{2n}{[2n]}=0.$$

IX.

Miscellen.

Von dem Herausgeber.

In der „Ebenen Trigonometrie und elementaren Stereometrie von Dr. B. Féaux, Oberlehrer am Gymnasium zu Paderborn. Paderborn. 1857. S. 136." findet sich für den, der Berechnung des Flächeninhalts des sphärischen Dreiecks zu Grunde liegenden Satz: dass ein sphärisches Dreieck und sein symmetrisch liegendes Scheiteldreieck gleiche Flächenräume haben, der folgende Beweis, welcher in dieser, für den unmittelbaren Gebrauch zu der erwähnten Flächen-Bestimmung des sphärischen Dreiecks zweckmässigen Form wenigstens mir noch nicht bekannt gewesen ist, womit aber keineswegs gesagt sein soll, dass er sich nicht vielleicht schon in anderen Büchern findet. Weil ich aber glaube, dass er verdient, bei'm Unterrichte vorzugsweise benutzt zu werden, so theile ich ihn im Folgenden in der Kürze mit, indem ich ein Paar mir eigenthümliche Betrachtungen vorausschicke.

I. Zwei gleiche Seiten habende sphärische Dreiecke ABC und $A'B'C'$, in denen die gleichen Seiten $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CA=C'A'$ in gleicher Ordnung und Folge liegen, können jederzeit zur Deckung gebracht werden und haben daher jederzeit gleiche Flächenräume.

Der Mittelpunkt der Kugel sei O. Weil nach der Voraussetzung

$$AB=A'B',\quad BC=B'C',\quad CA=C'A'$$

ist, so ist

$$\angle AOB=\angle A'OB',\quad \angle BOC=\angle B'OC',\quad \angle COA=\angle C'OA'.$$

Nun lege man $OABC$ und $OA'B'C'$ so auf einander, dass die gleichen Winkel AOB und $A'OB'$ sich decken, so dass A und A', B und B' auf einander fallen, und C und C' auf einer und derselben Seite der gemeinschaftlichen Ebene der Winkel AOB und $A'OB'$ zu liegen kommen, was offenbar möglich ist. Dann lege man durch in gleichem Sinne vorgenommene Drehungen um OA oder OA' und OB oder OB' die gleichen Winkel AOC und $A'OC'$, BOC und $B'OC'$ in die gemeinschaftliche Ebene der Winkel AOB und $A'OB'$ nieder, so müssen offenbar die Winkel AOC und $A'OC'$, BOC und $B'OC'$ in dieser Ebene sich decken. Reconstruirt man nun aber durch rückgängige Drehungen der vorstehenden Winkel die den gegebenen sphärischen Dreiecken am Mittelpunkte der Kugel entsprechenden dreiseitigen körperlichen Ecken wieder, so ist ganz klar, dass diese Ecken auf ganz gleiche Weise entstehen oder dass eigentlich nur eine einzige Ecke entsteht, woraus sich der zu beweisende Satz ganz unmittelbar und ganz von selbst ergiebt.

II. Zwei gleichschenklige sphärische Dreiecke, die zugleich gleiche Seiten haben, können jederzeit zur Deckung gebracht werden, und haben daher gleiche Flächenräume.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem vorhergehenden Satze.

III. Ein sphärisches Dreieck und sein symmetrisch liegendes Scheiteldreieck haben gleiche Flächenräume.

In Taf. I. Fig. 13. seien ABC und $A'B'C'$ ein sphärisches Dreieck und sein symmetrisch liegendes Scheiteldreieck auf der um den Mittelpunkt O beschriebenen Kugel. Denkt man sich die Sehnen AB, BC, CA und $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ gezogen, so sind offenbar AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CA und $C'A'$, folglich

auch die Ebenen der ebenen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ einander parallel. Man kann sich daher durch den Mittelpunkt O der Kugel eine Gerade gezogen denken, welche auf diesen beiden Ebenen zugleich senkrecht steht, und dieselben respective in den Punkten P und P', verlängert aber die Kugelfläche in den Punkten Q und Q' schneiden mag. Denkt man sich dann die Geraden AP, BP, CP und $A'P'$, $B'P'$, $C'P'$, so wie die entsprechenden Bogen AQ, BQ, CQ und $A'Q'$, $B'Q'$, $C'Q'$ grösster Kreise auf der Kugelfläche gezogen; so erhellet zuerst auf der Stelle die Congruenz der sechs ebenen rechtwinkligen Dreiecke AOP, BOP, COP; $A'OP'$, $B'OP'$, $C'OP'$ *); woraus die Gleichheit der sechs eben so bezeichneten Winkel, oder, was Dasselbe ist, die Gleichheit der sechs Winkel AOQ, BOQ, COQ; $A'OQ'$, $B'OQ'$, $C'OQ'$; und hieraus endlich die Gleichheit der sechs Bogen AQ, BQ, CQ; $A'Q'$, $B'Q'$, $C'Q'$ folgt. Weil nun offenbar auch die Bogen AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CA und $C'A'$ einander gleich sind; so sind AQB und $A'Q'B'$, BQC und $B'Q'C'$, CQA und $C'Q'A'$ gleichschenklige und zugleich gleiche Seiten habende sphärische Dreiecke, welche also paarweise nach II. gleiche Flächenräume haben, woraus ferner die zu beweisende Gleichflächigkeit der beiden sphärischen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ unmittelbar folgt.

*) Die drei ersten haben die Kathete OP gemein, und ihre Hypotenusen sind als Halbmesser der Kugel gleich; eben so haben die drei letzten die Kathete OP' gemein, und ihre Hypotenusen sind als Halbmesser der Kugel gleich; also sind sowohl die drei ersten, als auch die drei letzten einander congruent; weil nun aber je zwei einander gegenüberliegende dieser sechs rechtwinkligen Dreiecke bei O gleiche Scheitelwinkel und gleiche Hypotenusen haben, so sind auch je zwei solche einander gegenüberliegende Dreiecke congruent, woraus, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, die Congruenz aller sechs Dreiecke folgt.

Berichtigungen.

Thl. XXVIII. S. 189. Z. 3. v. u. statt

$$\frac{\cos\omega\dfrac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\dfrac{\partial u}{\partial z}}{2\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2\Omega}{\partial\theta^2}$$

setze man:

$$\frac{\cos\overline{\omega}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\dfrac{\partial u}{\partial z}}{2\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2\Omega}{\partial\theta^2}.$$

Thl. XXVIII. S. 193. Z. 5 v. u. statt b_1c setze man b_2c und Z. 4. v. u. statt b_2u setze man b_1u.

X.

Schreiben des Herrn Professor R. Lobatto zu Delft an den Herausgeber.

J'ai lu avec interêt la démonstration analytique que vous venez de donner dans votre Journal (Tom. 30. pag 296.) de la construction du rayon de courbure dans les sections coniques, telle que Mr. Lamarle l'a déduite de sa théorie géométrique des rayons et centres de courbure publiée dans les Bulletins de l'Académie Royale de Belgique pour l'année 1857.

Permettez moi de vous communiquer l'analyse suivante qui, à ce que me semble, mène d'un manière assez simple à la construction dont il s'agit. Commençons par l'ellipse.

Soit P (Tab. II. Fig. 1.) un point quelconque de cette courbe. Menons les rayons vecteurs PF, PF' aux deux foyers F, F', ainsi que la normale PN. Nommons x, y les coordonnées du point P, par rapport aux deux axes rectangulaires de l'ellipse. L'équation entre x et y étant $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, on a, en désignant l'angle NPM par φ, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b^2x}{a^2y}$. Faisons l'angle $MPF=\psi$ et l'angle $NPF=NPF'=\vartheta$, on aura encore $\operatorname{tg}\psi=\frac{e-x}{y}$, $\operatorname{tg}\vartheta=\operatorname{tg}(\varphi+\psi)=\frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\psi}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}$, ou bien, en y substituant les valeurs précédentes de $\operatorname{tg}\varphi$ et $\operatorname{tg}\psi$:

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{\frac{b^2x}{a^2y}+\frac{e-x}{y}}{1-\frac{b^2x(e-x)}{a^2y^2}}=y\,\frac{(b^2-a^2)x+a^2e}{a^2b^2-b^2ex}=y\,\frac{(a^2-ex)e}{b^2(a^2-ex)}=\frac{ey}{b^2},$$

d'où l'on tire:

$$\sec\vartheta = \sqrt{\left\{1+\frac{e^2y^2}{b^4}\right\}} = \sqrt{\left\{1+\frac{e^2(a^2-x^2)}{a^2b^2}\right\}} = \frac{\sqrt{(a^4-e^2x^2)}}{ab}.$$

D'ailleurs en nommant N et R la normale et le rayon de courbure du point P, on a, comme l'on sait:

$$N=\frac{b\sqrt{(a^4-e^2x^2)}}{a^2},\quad R=\frac{(a^4-e^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b}.$$

Donc $R=N\sec^2\vartheta$, ce qui prouve qu'en menant les perpendiculaires NS, SO sur les droites PN et PS, on aura

$$PO=PS.\sec\vartheta=N\sec^2\vartheta=R.$$

Soient r, r' les rayons vecteurs PF, PF', on aura:

$$r=a-\frac{ex}{a},\quad r'=a+\frac{ex}{a};$$

donc

$$rr'=\frac{a^4-e^2x^2}{a^2},\quad R=\frac{rr'\sec\vartheta}{a}=\frac{2rr'}{r+r'}\sec\vartheta,$$

ou bien $\frac{1}{R}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right\}\cos\vartheta$, ainsi qu'il a été trouvé par Mr. Lamarle.

Pour l'hyperbole les valeurs de $\sec\vartheta$, N et R se changeront en

$$\sec\vartheta=\frac{\sqrt{(e^2x^2-a^4)}}{ab},\quad N=\frac{b}{a^2}\sqrt{(e^2x^2-a^4)},\quad R=\frac{(e^2x^2-a^4)^{\frac{3}{2}}}{a^4b},$$

ce qui donne également $R=N\sec^2\vartheta$ et fournit la même construction que pour l'ellipse.

Passons à la parabole. Soit P (Tab. II. Fig. 2.) un point de cette courbe, PT la tangente, MN la normale en ce point, et F le foyer. En nommant p le paramètre, on aura $MN=\frac{1}{2}p$, et d'après une proprieté de la parabole l'angle $FPN=$ l'angle MNP, d'où résulte

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{2y}{p}=2\sqrt{\frac{x}{p}},\quad \sec\vartheta=\sqrt{\frac{4x+p}{p}}.$$

On a d'ailleurs

$$N=\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})}=\frac{1}{2}\sqrt{p(4x+p)}$$

et $R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(4x+p)^3}{p}}$. Donc $R=N\sec^2\vartheta$, ce qui fournit la même

construction que pour les deux autres courbes. En désignant le rayon vecteur FP par r, on a encore $r = x + \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}N \sec\vartheta$, ou bien $N \sec\vartheta = 2r$, d'où l'on conclut, que la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur égale le double de cette dernière longueur.

Tout en rendant justice à la belle théorie de Mr. **Lamarle**, je crois néanmoins devoir rappeler ici, que la construction qu'il en a déduite pour les rayons de courbure des sections coniques, avait déjà été indiqueé par Mr. **Paucker** dans votre Journal (Tom. 26. pag. 113).

Je terminerai la présente note en vous soumettant encore une démonstration plus simple du théoréme de géométrie énoncé et démontré dans votre Journal (Tom. 30. pag. 355), ainsi que vous avez desiré l'obtenir. J'aime a croire qu'elle pourra vous satisfaire quoique n'étant pas appuyée sur la proposition de **Ptolemeé**.

La droite AE (Tab. II. Fig. 3.) étant meneé perpendiculairement à la base BC, on a en vertu d'un théorème connu:

$$\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + 2BD.DE, \qquad (1)$$

$$\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{DC}^2 - 2DC.DE; \qquad (2)$$

d'où l'on déduit facilement:

$$CD.(\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2) + BD.(\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2) = \overline{BD}^2.CD + \overline{DC}^2.BD$$

ou bien

$$CD.\overline{AB}^2 + BD.\overline{AC}^2 - BC.\overline{AD}^2 = BD.DC.(BD + DC)$$
$$= BC.BD.DC, \quad C.Q.F.D.$$

Si l'angle BDA est aigu, on n'aura qu'a changer le signe de DE dans les équations (1), (2), ce qui ne change rien à la démonstration précédente qui est d'ailleurs également applicable si l'angle BCA est obtu.

Remarquons encore qu'en prenant le point D tel qu'on ait $AD = AC$, la rélation que nous venons de prouver se change en

$$CD.\overline{AB}^2 + (BD - BC).\overline{AC}^2 = BC.BD.DC,$$

ou bien

$$CD.\overline{AB}^2 - CD.\overline{AC}^2 = BC.BD.DC,$$

donc

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + BC.BD,$$

ce qui rentre dans le théorème demontré par **Pappus**.

XI.

Zwei Beweise des geometrischen Satzes Theil XXX. S. 355. und des Fermat'schen geometrischen Lehrsatzes.

Von

Herrn Oberlehrer Dr. *Blindow*

an der Realschule zu Fraustadt.

Lehrsatz.

Wenn in dem Dreiecke ABC (Taf. II. Fig. 4.) die Linie AD beliebig gezogen ist, so ist immer

$$AB^2.CD + AC^2.BD - AD^2.BC \doteq BC.BD.CD.$$

Beweis.

Zum Beweise fälle man von A aus das Loth AE auf BC und schlage von A aus mit AD einen Bogen, der BC in F schneidet.

Nun ist

$$BC = BF \pm FC.$$

Ferner ist

$$BF = BE + EF = BE + ED = \frac{(BE+ED)(BE-ED)}{BE-ED}$$

$$= \frac{(AB+AD)(AB-AD)}{BD}$$

und

$$FC = EC \mp EF = EC \mp ED = \frac{(EC \mp ED)(\pm EC + ED)}{(\pm EC + ED)}$$

$$= \frac{(AC+AD)(\pm AC \mp AD)}{CD};$$

daher ist

$$\frac{AB^2 - AD^2}{BD} + \frac{AC^2 - AD^2}{CD} = BC,$$

oder

$$AB^2.CD + AC^2.BD - AD^2.BC = BC.BD.CD,$$

w. z. b. w.

Lehrsatz.

Wenn man über dem Durchmesser AB (Taf. II. Fig. 5. und Taf. II. Fig. 6.) eines Halbkreises AEB als Grundlinie ein Rechteck $ABCD$ beschreibt, dessen Höhe AC der Sehne des Quadranten des Kreises, zu welchem der Halbkreis gehört, gleich ist, und von den beiden Punkten C und D nach dem beliebigen Punkte E des Halbkreises die Linien CE und DE zieht, welche den Durchmesser AB in F und G schneiden, so ist immer

$$AG^2 + BF^2 = AB^2.$$

Beweis.

Zum Beweise verbinde man A und B mit E, fälle von E ein Loth EH auf FG, schlage über FG einen Halbkreis, der das Loth EH in J schneidet, und verbinde J mit F und G.

Da $\Delta AFC \backsim \Delta EHF$ und $\Delta GDB \backsim \Delta EHG$, so verhält sich

1. $$AF:FH = AC:EH = BG:GH,$$

also auch

2. $$AH:FH = BH:GH.$$

Ferner ist:

3. $$AE^2:BE^2 = AH:BH = FH:GH = FJ^2:GJ^2,$$

und also auch

4. $$AE:BE = FJ:GJ.$$

Hiernach ist $\Delta AEB \backsim \Delta FJG$, und daher:

5. $$EH:AB = JH:FG,$$

und

6. $$EH^2:AB^2 = JH^2:FG^2,$$

so dass

7. $$FG^2 = \frac{AB^2.JH^2}{EH^2} = \frac{4r^2.FH.GH}{EH^2}.$$

Nach 1. ist

$$FH = \frac{EH.AF}{AC}, \quad GH = \frac{EH.BG}{AC};$$

mithin

$$FH.GH = \frac{EH^2.AF.BG}{AC^2} = \frac{EH^2.AF.BG}{2r^2},$$

woraus sich in Verbindung mit 7. ergiebt:

8. $$FG^2 = 2.AF.BG,$$

oder

9. $$2.BG : GF = GF : AF;$$

hieraus:

10. $$2.BG \pm GF : GF = GF \pm AF : AF,$$

11. $$BG + BF : GF = AG : AF,$$

12. $$BG + BF : AG = GF : AF,$$

13. $$BG + BF \pm AG : AG = GF \pm AF : AF,$$

14. $$AB + BF : AG = AG : AB - BF,$$

15. $$AG^2 = AB^2 - BF^2,$$

16. $$AG^2 + BF^2 = AB^2,$$

q. e. d.

Anmerkung. Von den doppelten Vorzeichen in den Gleichungen 10. und 13. bezieht sich das obere auf den Fall, wo sich der Halbkreis ausserhalb (Taf. II. Fig. 5.), das untere auf den Fall, wo er sich innerhalb des gegebenen Rechtecks (Taf. II. Fig. 6.) befindet.

XII.

Note über Differentialgleichungen.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie zu Wien.

Unter denjenigen linearen Differentialgleichungen, welche *bloss* aus zwei Gliedern bestehen, dürfte die Gleichung

$$(1)\qquad x^{2m}\frac{d^m y}{dx^m}=\alpha^m y$$

von besonderem Werthe sein, da ihr Integral so äusserst einfach ist. Ich fand nämlich hiefür:

$$(2)\qquad y=x^{m-1}\{C_1 e^{-\frac{\mu\alpha}{x}}+C_2 e^{-\frac{\mu^2\alpha}{x}}+\ldots . C_m e^{-\frac{\mu^m\alpha}{x}}\},$$

in welcher Gleichung μ eine primitive $m$te Wurzel der Einheit ist und $C_1, C_2, C_3, \ldots . C_m$ willkührliche Constanten sind, und diess lässt sich am Einfachsten auf die Weise verificiren, dass man statt der Exponentiellen ihre unendlichen Reihen setzt; diese mit x^{m-1} multiplicirt und alsdann die so erhaltenen Reihen einer $m$fachen Differentiation unterwirft.

Eben so ist für die partielle Differentialgleichung

$$x^{2m}\frac{d^m y}{dx^m}=\alpha^m\frac{d^m y}{dt^m}$$

das Integral:

$$y=x^{m-1}\{\varphi_1(t-\frac{\mu\alpha}{x})+\varphi_2(t-\frac{\mu^2\alpha}{x})+\ldots .+\varphi_m(t-\frac{\mu^m\alpha}{x})\},$$

wie ich diess im Archiv. Theil XXX. Nr. XXXV. S. 335. nachwies.

Ich behaupte nun, dass die Gleichung

$$(3) \qquad x^{2m}\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{2m}\frac{d^m y}{dx^m}\right]=\alpha^{2m}y$$

folgendes Integral habe:

$$(4) \qquad y=x^{m-1}\{C_1 e^{-\frac{\lambda\alpha}{x}}+C_2 e^{-\frac{\lambda^2\alpha}{x}}+\ldots+C_{2m}e^{-\frac{\lambda^{2m}\alpha}{x}}\},$$

unter λ eine primitive $2m$te Wurzel der Einheit und unter $C_1, C_2, \ldots$ .... C_{2m} willkührliche Constanten verstanden; ferner dass die partielle Differentialgleichung.

$$(5) \qquad x^{2m}\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{2m}\frac{d^m y}{dx^m}\right]=\alpha^{2m}\frac{d^{2m}y}{dt^{2m}}$$

zum Integral hat:

$$(6) \quad y=x^{m-1}\{\varphi_1\left(t-\frac{\lambda\alpha}{x}\right)+\varphi_2\left(t-\frac{\lambda^2\alpha}{x}\right)+\ldots+\varphi_{2m}\left(t-\frac{\lambda^{2m}\alpha}{x}\right)\}.$$

Der Beweis ist höchst einfach. Denn setzt man in (3)

$$y=x^{m-1}e^{-\frac{\varrho\alpha}{x}},$$

so erhält man, da

$$x^{2m}y^{(m)}=\varrho^m\alpha^m y$$

ist, folgende Gleichung:

$$x^{2m}\frac{d^m}{dx^m}[\varrho^m\alpha^m y]=\alpha^{2m}y.$$

Setzt man $\varrho^m\alpha^m$ vor das Differentialzeichen und benützt abermals den Satz

$$x^{2m}y^{(m)}=\varrho^m\alpha^m y,$$

so hat man

$$\varrho^m\alpha^m.\varrho^m\alpha^m y=\alpha^{2m}y,$$

was wahr ist, sobald ϱ eine Wurzel der Gleichung

$$\varrho^{2m}=1$$

ist. Nun sind aber

$$\lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^3,\ldots,\ \lambda^{2m}$$

die $2m$ Wurzeln der Gleichung $\varrho^{2m}=1$, folglich ist die Gleichung (4) das vollständige Integral der Gleichung (3).

Ebenso ist leicht zu beweisen, dass der Ausdruck (6) mit den

3m willkührlichen Functionen der Gleichung (6) genügt; endlich lassen sich diese Sätze noch weiter ausdehnen. So ist z. B. für die Gleichung

$$x^{3m}\frac{d^m}{dx^m}\{x^{2m}\frac{d^m}{dx^m}[x^{2m}\frac{d^m y}{dx^m}]\}=a^{3m}y$$

das vollständige Integral folgendes:

$$y=x^{m-1}\{C_1e^{-\frac{ra}{x}}+C_2e^{-\frac{r^2a}{x}}+\ldots\ldots+C_{3m}e^{-\frac{r^{3m}a}{x}}\},$$

unter r eine primitive $3m$te Wurzel der Einheit und unter $C_1, C_2, \ldots., C_{3m}$ willkührliche Constanten verstanden.

XIII.

Ueber die Normalen der Kegelschnitte.

Von

dem Herausgeber.

Ueber die Normalen der Kegelschnitte hat bekanntlich schon Apollonius in dem fünften Buche seines berühmten Werks über diese Curven eine sehr sinnreiche Untersuchung angestellt, und durch mehrere in dieser Zeitschrift mitgetheilte Arbeiten neuerer Geometer ist diese Theorie wesentlich gefördert und weiter geführt worden. Aber man hat sich seit Apollonius weit mehr mit der Ermittelung der Anzahl der Normalen, welche sich durch einen gegebenen Punkt an einen Kegelschnitt ziehen lassen, als mit der Bestimmung oder Construction dieser Normalen selbst beschäftigt, weshalb die folgenden Bemerkungen über diesen letzteren Gegenstand wohl nicht ohne Interesse sein dürften.

Wenn wir die Axe und die Directrix des Kegelschnitts als die Axen der x und y eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy annehmen, und die erste Coordinate des Brennpunkts in diesem Systeme durch f, die Charakteristik des Kegelschnitts durch n bezeichnen; so ist nach N. T. d. K. *) I. 1) die Gleichung des Kegelschnitts:

$$1) \quad \ldots \ldots \quad n^2x^2=(x-f)^2+y^2.$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung

$$n^2(Ax+By+C)^2=(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\}$$

der Kegelschnitte, so ist offenbar $n=n$, $A=1$, $B=0$, $C=0$, $f=f$, $g=0$ zu setzen.

Ist nun (x_1y_1) ein beliebiger gegebener Punkt und jetzt (xy) der Durchschnittspunkt einer durch den Punkt (x_1y_1) an den Kegelschnitt gezogenen Normale mit dem Kegelschnitte, so haben wir nach N. T. d. K. VIII. 2) im Allgemeinen die Gleichung:

$$y-y_1=\frac{n^2B(Ax+By+C)-(A^2+B^2)(y-g)}{n^2A(Ax+By+C)-(A^2+B^2)(x-f)}(x-x_1),$$

also, wenn wir für A, B, C, g ihre obigen Werthe setzen, die Gleichung:

$$y-y_1=-\frac{y}{n^2x-(x-f)}(x-x_1)=-\frac{y}{f+(n^2-1)x}(x-x_1)$$

oder

$$y(x-x_1)+\{f+(n^2-1)x\}(y-y_1)=0,$$

oder, wie sich hieraus leicht ergiebt:

$$2) \quad . \; . \quad n^2xy-(n^2-1)y_1x+(f-x_1)y-fy_1=0;$$

und die Coordinaten x, y sind also aus den beiden Gleichungen:

$$3) \ldots \left\{\begin{array}{l} n^2x^2=(x-f)^2+y^2, \\ n^2xy-(n^2-1)y_1x+(f-x_1)y-fy_1=0 \end{array}\right.$$

zu bestimmen, welche Bestimmung jetzt aber nicht in unserer Absicht liegt.

Vielmehr begnügen wir uns hier mit der Bemerkung, dass die Punkte, in denen der Kegelschnitt von den durch den Punkt

*) N. T. d. K., d. h. Neue Theorie der Kegelschnitte, bezeichnet meine Abhandlung in Thl. XXXI. Nr. XIII.

(x_1y_1) an ihn gezogenen Normalen geschnitten wird, die Durchschnittspunkte des Kegelschnitts mit der durch die Gleichung

$$4) \quad . \quad . \quad n^2xy-(n^2-1)y_1x+(f-x_1)y-fy_1=0$$

charakterisirten Curve sind, so dass es also, um die Durchschnittspunkte der Normalen mit dem Kegelschnitte zu bestimmen, bloss auf die Construction dieser Curve ankommt, weshalb wir jetzt die Natur derselben genauer untersuchen wollen.

Zu dem Ende legen wir durch einen gewissen neuen Anfangspunkt, dessen primitive Coordinaten durch u, v bezeichnet werden mögen, ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem der XY. Der von dem positiven Theile der Axe der X mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossene Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe der y hin von 0 bis 360° zählen, sei φ, und der positive Theil der Axe der Y werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der X durch den rechten Winkel (XY) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der Y zu gelangen, ganz nach derselben Seite hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen. Dann hat man nach den allgemeinen Formeln der Theorie der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} x=u+X\cos\varphi-Y\sin\varphi, \\ y=v+X\sin\varphi+Y\cos\varphi. \end{array} \right.$$

Führen wir diese Ausdrücke von x, y in die Gleichung 4) ein und ordnen dieselbe gehörig, so erhalten wir die Gleichung:

6)

$$\left. \begin{array}{l} n^2\sin\varphi\cos\varphi . X^2 \\ -n^2\sin\varphi\cos\varphi . Y^2 \\ +n^2(\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)XY \\ +\{n^2u\sin\varphi+n^2v\cos\varphi-(n^2-1)y_1\cos\varphi+(f-x_1)\sin\varphi\}X \\ +\{n^2u\cos\varphi-n^2v\sin\varphi+(n^2-1)y_1\sin\varphi+(f-x_1)\cos\varphi\}Y \\ +n^2uv-(n^2-1)y_1u+(f-x_1)v-fy_1 \end{array} \right\} =0$$

oder:

7)

$$\left.\begin{array}{l} n^2\sin 2\varphi.(X^2-Y^2) \\ +2n^2\cos 2\varphi.XY \\ +2\{n^2u\sin\varphi+n^2v\cos\varphi-(n^2-1)y_1\cos\varphi-(x_1-f)\sin\varphi\}X \\ +2\{n^2u\cos\varphi-n^2v\sin\varphi+(n^2-1)y_1\sin\varphi-(x_1-f)\cos\varphi\}Y \\ +2\{n^2uv-(n^2-1)y_1u-(x_1-f)v-fy_1\} \end{array}\right\}=0.$$

Wir wollen nun φ, u, v so zu bestimmen suchen, dass den Gleichungen

$$\sin 2\varphi=0;$$

$$n^2u\sin\varphi+n^2v\cos\varphi=(x_1-f)\sin\varphi+(n^2-1)y_1\cos\varphi,$$

$$n^2u\cos\varphi-n^2v\sin\varphi=(x_1-f)\cos\varphi-(n^2-1)y_1\sin\varphi$$

genügt wird. Den beiden letzten Gleichungen wird aber offenbar allgemein, nämlich für jedes φ, genügt, wenn man

8) . . . . $n^2u=x_1-f,\quad n^2v=(n^2-1)y_1;$

also

9) . . . . . $u=\dfrac{x_1-f}{n^2},\quad v=\dfrac{(n^2-1)y_1}{n^2}$

setzt; und die erste Gleichung wird, wenn μ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, erfüllt für

10) . . . . $2\varphi=\mu\pi,$

woraus

11) . . . . $\cos 2\varphi=(-1)^\mu$

folgt. Da nun für die obigen Werthe von u und v, wie man leicht findet:

$$n^2uv-(n^2-1)y_1u-(x_1-f)v-fy_1=-\frac{\{n^2f+(n^2-1)(x_1-f)\}y_1}{n^2}$$

ist, so wird die Gleichung unserer Curve in dem Systeme der XY nach 7) offenbar:

12) . . . $XY-(-1)^\mu.\dfrac{\{n^2f+(n^2-1)(x_1-f)\}y_1}{n^4}=0$

oder

13) . . . $XY=(-1)^\mu.\dfrac{\{n^2f+(n^2-1)(x_1-f)\}y_1}{n^4}.$

Augenscheinlich ist es verstattet, $\mu=0$, also nach dem Obigen $\varphi=0$ zu setzen; dann wird vorstehende Gleichung unserer Curve:

$$14) \quad . \; . \; . \quad XY=\frac{\{n^2f+(n^2-1)(x_1-f)\}y_1}{n^4},$$

oder auch:

$$15) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad XY=\frac{\{f+(n^2-1)x_1\}y_1}{n^4}.$$

Wir können φ, u, v auch so bestimmen, dass

$$\cos 2\varphi=0;$$

$$n^2u\sin\varphi+n^2v\cos\varphi=(x_1-f)\sin\varphi+(n^2-1)y_1\cos\varphi,$$

$$n^2u\cos\varphi-n^2v\sin\varphi=(x_1-f)\cos\varphi-(n^2-1)y_1\sin\varphi$$

ist; dann ist wie oben wieder:

$$16) \quad . \; . \; . \; . \quad u=\frac{x_1-f}{n^2}, \quad v=\frac{(n^2-1)y_1}{n^2};$$

aber, wenn μ wieder eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$17) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2\varphi=\frac{2\mu-1}{2}\pi,$$

woraus

$$\sin 2\varphi=\sin\mu\pi\cos\tfrac{1}{2}\pi-\cos\mu\pi\sin\tfrac{1}{2}\pi,$$

also

$$18) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \sin 2\varphi=-(-1)^\mu$$

folgt, so dass folglich unsere Curve in dem Systeme der XY nach 7) jetzt durch die Gleichung

$$19) \quad X^2-Y^2+(-1)^\mu.\frac{2\{n^2f+(n^2-1)(x_1-f)\}y_1}{n^4}=0$$

oder

$$20) \quad . \; . \quad X^2-Y^2=-(-1)^\mu.\frac{2\{n^2f+(n^2-1)(x_1-f)\}y_1}{n^4}$$

charakterisirt wird.

Augenscheinlich kann man $\mu=1$ setzen, wodurch nach 17)

$$21) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \varphi=\tfrac{1}{4}\pi,$$

und nach 20) die Gleichung der Curve

$$22) \ldots X^2 - Y^2 = \frac{2\{n^2f + (n^2-1)(x_1-f)\}y_1}{n^4}$$

oder

$$23) \ldots X^2 - Y^2 = \frac{2\{f + (n^2-1)x_1\}y_1}{n^4}$$

wird.

Sowohl die Gleichungen 14), 15), als auch die Gleichungen 22), 23) zeigen, dass unsere Curve eine gleichseitige Hyperbel ist, und also die Charakteristik $\sqrt{2}$ hat.

Die Coordinaten des Mittelpunkts dieser gleichseitigen Hyperbel in dem Coordinatensysteme, dessen Axen die Axe und die Directrix des gegebenen Kegelschnitts sind, sind nach 9) und 16):

$$u = \frac{x_1 - f}{n^2}, \quad v = \frac{(n^2-1)y_1}{n^2}.$$

Ist der gegebene Kegelschnitt eine Parabel, so ist $n=1$, also $u=x_1-f$, $v=0$, und der Mittelpunkt unserer gleichseitigen Hyperbel liegt also immer in der Axe der Parabel. Ist der gegebene Kegelschnitt selbst eine gleichseitige Hyperbel, so ist $n=\sqrt{2}$, also $u=\frac{1}{2}(x_1-f)$, $v=\frac{1}{2}y_1$.

Die Gleichung 14) oder 15) ist offenbar die Gleichung zwischen den Asymptoten für unsere, die Normalen des gegebenen Kegelschnitts bestimmende gleichseitige Hyperbel; und da in diesem Falle $\varphi=0$ ist, so ist klar, dass die Asymptoten dieser gleichseitigen Hyperbel immer der Axe und der Directrix des gegebenen Kegelschnitts parallel sind.

Bezeichnen wir die halbe Hauptaxe und die derselben gleiche Nebenaxe unserer gleichseitigen Hyperbel durch a_1, so ist nach 22) und 23) offenbar:

24)

$$a_1{}^2 = \text{val. abs.} \frac{2\{n^2f+(n^2-1)(x_1-f)\}y_1}{n^4} = \text{val. abs.} \frac{2\{f+(n^2-1)x_1\}y_1}{n^4}.$$

Wenn die Grösse

$$\{n^2f + (n^2-1)(x_1-f)\}y_1 \quad \text{oder} \quad \{f + (n^2-1)x_1\}y_1$$

positiv ist, so ist in dem obigen Systeme der XY, für welches nach 21) $\varphi=\frac{1}{4}\pi$ ist, die Axe der X die Hauptaxe, die Axe der Y die Nebenaxe der die Normalen des gegebenen Kegelschnitts bestimmenden gleichseitigen Hyperbel; wenn dagegen die Grösse

$$\{n^2f+(n^2-1)(x_1-f)\}y_1 \text{ oder } \{f+(n^2-1)x_1\}y_1$$

negativ ist, so ist in diesem Systeme der XY die Axe der X die Nebenaxe, die Axe der Y die Hauptaxe der die Normalen des gegebenen Kegelschnitts bestimmenden gleichseitigen Hyperbel.

Nach N. T. d. K. IV. 21) ist

$$25) \quad \ldots\ldots\ldots \quad e_1=a_1\sqrt{2};$$

die Entfernungen der Directrixen von den entsprechenden Brennpunkten sind nach N. T. d. K. §. 12. $\frac{1}{2}e_1$, also $\frac{a_1}{\sqrt{2}}$.

Weil nach N. T. d. K. VI. 4) allgemein

$$p_1=\frac{2b_1^2}{a_1}$$

ist, so ist im vorliegenden Falle:

$$26) \quad \ldots\ldots\ldots \quad p_1=2a_1.$$

Ferner sind nach N. T. d. K. §. 18. die Entfernungen der Scheitel von den Brennpunkten:

$$\frac{p_1}{2(\sqrt{2}+1)} \text{ und } \frac{p_1}{2(\sqrt{2}-1)},$$

also nach 26):

$$\frac{a_1}{\sqrt{2}+1} \text{ und } \frac{a_1}{\sqrt{2}-1}.$$

Durch das Vorhergehende ist die gleichseitige Hyperbel, deren Durchschnittspunkte mit dem gegebenen Kegelschnitte die Punkte geben, in welchen derselbe von den durch den Punkt (x_1y_1) an ihn gezogenen Normalen getroffen wird, so vollständig bestimmt, dass ihrer Construction nicht die geringste Schwierigkeit entgegen steht.

Ist der gegebene Kegelschnitt eine Parabel, so sind die Gleichungen der die Normalen bestimmenden gleichseitigen Hyperbel nach dem Obigen für das die Asymptoten darstellende System der XY:

$$27) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad XY=fy_1,$$

und für das die Axen darstellende System der XY:

$$28) \quad \ldots\ldots\ldots \quad X^2-Y^2=2fy_1.$$

Ist der gegebene Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel, so sind die Gleichungen der die Normalen bestimmenden gleich-

seitigen Hyperbel für das die Asymptoten darstellende System der XY:

$$29) \quad \ldots\ldots \quad XY=\frac{(f+x_1)y_1}{4},$$

und für das die Axen darstellende System der XY:

$$30) \quad \ldots\ldots \quad X^2-Y^2=\frac{(f+x_1)y_1}{2}.$$

Ist der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel, und bezeichnet f_1 die erste Coordinate des zweiten Brennpunkts desselben, so ist im vorliegenden Falle, wo in den Formeln N. T. d. K. IV. 2) offenbar $A=1$, $B=0$, $C=0$ zu setzen ist:

$$f-f_1=\frac{2n^2}{n^2-1}f,$$

woraus

$$31) \quad \ldots\ldots \quad f_1=-\frac{n^2+1}{n^2-1}f,$$

also

$$32) \quad \ldots\ldots \quad n^2=\frac{f_1-f}{f_1+f}, \quad n=\sqrt{\frac{f_1-f}{f_1+f}}$$

folgt, mittelst welcher Formel n aus f und f_1 berechnet werden kann.

Anhang.

Die durch die Gleichung 4), nämlich durch die Gleichung

$$n^2xy-(n^2-1)y_1x+(f-x_1)y-fy_1=0$$

oder

$$\pm n^2xy\mp(n^2-1)y_1x\mp(x_1-f)y\mp fy_1=0,$$

charakterisirte Curve wollen wir nun noch nach der in N. T. d. K. XI. entwickelten Methode discutiren, theils um überhaupt diese Methode auf ein Beispiel anzuwenden, theils um die Uebereinstimmung der auf diesem Wege und im Obigen gewonnenen Resultate mit einander zu zeigen.

In N. T. d. K. XI. 1) müssen wir

$$a=0,\quad b=0,\quad 2c=\pm n^2,\quad 2d=\mp(n^2-1)y_1,\quad 2e=\mp(x_1-f),\quad f=\mp fy_1$$

setzen. Dann ist nach den Formeln N. T. d. K. XI. 28):

$$\cos 2\varphi = \pm 1, \quad \sin 2\varphi = 0;$$

also

$$2\varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}, \quad \varphi = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2}\pi \end{cases}, \quad 45^0 - \varphi = \begin{cases} 45^0 \\ 45^0 - \frac{1}{2}\pi \end{cases}.$$

und folglich

$$\cos(45^0 - \varphi) = \begin{cases} \cos 45^0 \\ \cos(45^0 - \frac{1}{2}\pi) \end{cases} = \begin{cases} \cos 45^0 \\ \sin 45^0 \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin(45^0 - \varphi) = \begin{cases} \sin 45^0 \\ \sin(45^0 - \frac{1}{2}\pi) \end{cases} = \begin{cases} \sin 45^0 \\ -\cos 45^0 \end{cases} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bezeichnen wir nun die in N. T. d. K. XI. durch

$$n, \; A, \; B, \; C, \; X, \; Y$$

bezeichneten Grössen jetzt durch

$$n_1, \; A_1, \; B_1, \; C_1, \; X_1, \; Y_1;$$

so ist nach den Formeln N. T. d. K. XI. 28):

$$n_1 = \sqrt{\frac{\pm 2n^2}{\pm n^2}} = \sqrt{2},$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pm n^2}{\pm 2}} = \tfrac{1}{2}n,$$

$$B_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pm n^2}{\pm 2}} = \pm\tfrac{1}{2}n;$$

woraus

$$A_1^2 + B_1^2 = \tfrac{1}{2}n^2$$

folgt.

Nun ist

$$\omega = \frac{fc^2 - 2cde}{c^2} = \frac{fc - 2de}{c} = \frac{2fc - 4de}{2c},$$

also nach dem Obigen:

$$\omega = \frac{-n^2 f y_1 - (n^2 - 1)(x_1 - f) y_1}{\pm n^2},$$

folglich

$$\omega = \mp \frac{\{n^2f + (n^2-1)(x_1-f)\}y_1}{n^2} = \mp \frac{\{f+(n^2-1)x_1\}y_1}{n^2}$$

oder

$$-\omega = \pm \frac{\{n^2f + (n^2-1)(x_1-f)\}y_1}{n^2} = \pm \frac{\{f+(n^2-1)x_1\}y_1}{n^2},$$

in welchem Ausdrucke man nun, so wie auch in allen folgenden Ausdrücken, das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem

$$\{f+(n^2-1)x_1\}y_1$$

positiv oder negativ ist, damit $-\omega$ positiv oder ω negativ werde.

Weil nach dem obigen Werthe von n_1

$$n_1^2(n_1^2-1) = 2$$

ist, so ist nach N. T. d. K. XI. 33):

$$C_1^2 = \frac{-\omega}{2},$$

woraus sich zwei reelle Werthe von C_1, ein positiver und ein negativer, ergeben, welche wir hier aber nicht schreiben wollen, um keine Verwirrung in den Vorzeichen zu verursachen, indem in allen Formeln, wie wir sie hier schreiben werden, die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen sollen.

Ferner ist nach denselben Formeln a. a. O. wie vorher:

$$X_1 = -\frac{n_1^2 A_1 C_1}{A_1^2+B_1^2} = -\frac{nC_1}{\frac{1}{2}n^2} = -\frac{2C_1}{n},$$

$$Y_1 = -\frac{n_1^2 B_1 C_1}{A_1^2+B_1^2} = \mp\frac{nC_1}{\frac{1}{2}n^2} = \mp\frac{2C_1}{n}.$$

Endlich ist nach N. T. d. K. XI. 29):

$$p = \frac{-ce}{c^2} = -\frac{e}{c} = -\frac{\mp\frac{1}{2}(x_1-f)}{\pm\frac{1}{2}n^2} = \frac{x_1-f}{n^2},$$

$$q = \frac{-cd}{c^2} = -\frac{d}{c} = -\frac{\mp\frac{1}{2}(n^2-1)y_1}{\pm\frac{1}{2}n^2} = \frac{(n^2-1)y_1}{n^2};$$

welches die primitiven Coordinaten des Anfangspunkts des dem primitiven Systeme parallelen Coordinatensystems, auf welches sich die oben bestimmten Grössen, namentlich die Coordinaten X_1, Y_1, welche natürlich eben so wie C_1 zwei Werthe haben, was auch ganz in der Natur der Sache liegt, da es zwei Directrixen und zwei Brennpunkte giebt, beziehen.

Bezeichnen wir in Bezug auf dieses Coordinatensystem die veränderlichen oder laufenden Coordinaten im Allgemeinen durch X, Y; so ist die Gleichung der Directrix:

$$A_1X+B_1Y+C_1=0,$$

also nach dem Obigen:

$$\tfrac{1}{2}nX\pm\tfrac{1}{2}nY+C_1=0,$$

wo C_1 bekanntlich zwei Werthe hat.

Man sieht aus dem Bisherigen, dass unsere Curve eine gleichseitige Hyperbel ist, deren Directrix wegen der vorigen Gleichung gegen die Axe der X, oder gegen die Axe der x, also gegen die Axe des gegebenen Kegelschnitts, offenbar unter einem Winkel von 45° geneigt ist, was Alles mit den oben gefundenen Resultaten im besten Einklange steht.

Um diese Uebereinstimmung noch mehr zu zeigen, wollen wir die Halbaxe a_1 unserer gleichseitigen Hyperbel berechnen. Nach N. T. d. K. IV. 19) ist in den hier gebrauchten Zeichen:

$$a_1^2=\frac{n_1^2(A_1X_1+B_1Y_1+C_1)^2}{(n_1^2-1)^2(A_1^2+B_1^2)}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen:

$$A_1X_1+B_1Y_1+C_1=-\tfrac{1}{2}n.\frac{2C_1}{n}-\tfrac{1}{2}n.\frac{2C_1}{n}+C_1=-C_1-C_1+C_1,$$

also

$$A_1X_1+B_1Y_1+C_1=-C_1;$$

folglich, weil

$$n_1^2=2,\quad n_1^2-1=1,\quad A_1^2+B_1^2=\tfrac{1}{2}n^2$$

ist:

$$a_1^2=\frac{2C_1^2}{\tfrac{1}{2}n^2}=\frac{4C_1^2}{n^2}$$

oder nach dem Obigen:

$$a_1^2=\frac{-2\omega}{n^2},$$

also, wenn man für $-\omega$ seinen vorher gefundenen Werth einführt:

$$a_1^2=\pm\frac{2\{f+(n^2-1)x_1\}y_1}{n^4},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem die Grösse

$$\{f+(n^2-1)x_1\}y_1$$

positiv oder negativ ist, so dass also immer

$$a_1^2 = \text{val. abs.}\ \frac{2\{f+(n^2-1)x_1\}y_1}{n^4},$$

was genau mit der oben gefundenen Formel 24) übereinstimmt.

XIV.

Rede gehalten bei Eröffnung der 34. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Carlsruhe am 16. September 1858

von

W. Eisenlohr,

Hofrath und Professor der Physik am Polytechnikum zu Carlsruhe.

Vorwort des Herausgebers.

Der Herausgeber des Archivs beklagt es tief, dass eine Krankheit, von der er, nachdem ihm Gott wohl zwanzig Jahre lang mit ununterbrochener Gesundheit beglückt, im September d. J. heimgesucht wurde, ihn hinderte, der von Seiten der Geschäftsführer der diesjährigen Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Carlsruhe an ihn ergangenen Einladung, dieser Versammlung beizuwohnen, zu folgen. Er beklagt es jetzt um so mehr, dass er wegen dieses widrigen Geschicks nicht im Stande war, dieser ihn sehr ehrenden Aufforderung zu entsprechen, weil nach den ihm von den verschiedensten Seiten her gemachten Mittheilungen diese Versammlung, — in der langen Reihe die 34ste, — unter allen ganz unbestritten eine der schönsten war. Ja, der Herausgeber ist überzeugt, dass er nicht zu viel sagt, wenn er diese 34ste Versammlung

ein Ereigniss in der Geschichte der Naturwissenschaft nennt, welches eine weitere Besprechung in einer Zeitschrift wie die seinige für sich in Anspruch zu nehmen berechtigt ist.

Denn vor Allem muss zunächst die Wissenschaft auch öffentlich es dankbar erkennen, dass einer der edelsten deutschen Fürsten, den eines der gesegnetsten deutschen Länder mit Stolz den Seinigen nennt, diese Versammlung gastlich in sein Haus aufnahm, und, bei ununterbrochener persönlicher Theilnahme, ihr Seine Aufmerksamkeit mit einer jedes für die Wissenschaft warm schlagende Herz mit Bewunderung erfüllenden Weise widmete. Ja, auch die hohe Frau, in deren Besitz der edle Fürst sein häusliches Glück findet, die Tochter des ritterlichen Prinzen, in dessen kräftige Hand Gott von nun an die Geschicke des Preussenlandes gelegt hat, zu dessen hohen Tugenden Jeder, der, wie der Herausgeber Preussen mit Stolz sein Vaterland nennt, jetzt — wenn auch mit Trauer erfüllt wegen des schweren Geschicks, welches das im fernen Süden weilende theure Königliche Haupt betroffen — mit der freudigsten, nie getäuscht werden könnenden Hoffnung hinaufblickt, verschmähete es nicht, den Verhandlungen der Versammlung mit immer steigender Theilnahme zu folgen. — Wenn auch die Wissenschaft allein von Gott stammt, so muss ihre Geschichte doch Akt nehmen von der ihr auch von Denen, welche die Vorsehung auf den höchsten Gipfel irdischer Macht und Grösse gestellt hat, zu Theil gewordenen Gunst. Sie wird es, um nur ein Beispiel aus einer älteren Zeitperiode dem Obigen anzureihen, ewig dankbar erkennen, dass Gott in das Herz des edlen Grossherzogs von Toscana Cosmo II. den Funken der Begeisterung für die Werke des grossen Galilei legte, so wie sie es andererseits ewig beklagen wird, dass sein schwacher, freilich noch sehr junger Nachfolger Fernando II. es nicht hinderte, dass der grosse Mann den Händen der Inquisition überliefert wurde, wenn sie sich auch freuen darf, dass dieses unglückliche Geschick eines ihrer grössten und edelsten Priester es ihr vergönnt hat, in ihren Geschichtsbüchern dessen denkwürdige Worte:

„E pur si muove!“

auf ewige Zeiten als eines ihrer theuersten Kleinode zu verzeichnen.

Ausser der ihr zu Theil gewordenen fürstlichen Gunst erkennt die Versammlung deutscher Naturforscher, und mit ihr die Wissenschaft, dankbar an die wahrhafte Begeisterung, mit welcher nicht nur die Stadt Carlsruhe, ja das ganze badische Volk, dem natürlich die höchsten Behörden des Landes mit leuchtendem Beispiel voranschritten, ihr in gastlichster Weise entgegen kam und bei sich aufnahm. Sie erinnert sich ferner dankbar der in jener Stadt blühenden hohen Schule, welche, in ihrer Art eine der ersten in Deutschland, vollkommen würdig ist ihres hohen Vorbildes, der berühmten école polytechnique, der die grössten französischen Mathematiker und Naturforscher mit Freude und Stolz ihre besten Kräfte widmeten.

Ein sehr glückliches Geschick hatte die Leitung der Geschäfte der

Carlsruher Versammlung in die Hände zweier Männer gelegt, welche, mit dem grössten Eifer für die ihnen gewordene Aufgabe erfüllt, es auch über sich zu gewinnen verstanden, mit der grössten Aufopferung, wie mit vollständiger Uebereinstimmung dankbar bezeugt wird, dieser schwierigen Aufgabe sich hinzugeben. Das Archiv darf in seinem Kreise nur den Namen W. Eisenlohr nennen, den jeder seiner Leser kennt, an den sich sehr viele, keineswegs bloss solche, die aus seinem eignen Munde die klaren Worte seiner Lehre vernahmen, mit der grössten Dankbarkeit erinnern werden. Er war die Seele der Versammlung, worin alle Theilnehmer übereinstimmen. Mehr darf der Herausgeber, ohne das feine Gefühl seines trefflichen Freundes zu verletzen, nicht sagen, so gern er auch möchte, wenn er dem Drange seines Herzens folgen dürfte. Solche der Allgemeinheit gebrachte grosse Opfer finden, ausser in der freudigsten Anerkennung aller edlen Gemüther, vorzugsweise in sich selbst ihre wahre Belohnung. Dass aber auch die Wissenschaft öffentlich daran erinnere, ist ihre Pflicht, des Dankes wegen, welchen sie solcher Aufopferung schuldet, und geschicht in ihrem eigenen Interesse, weil es zur Nacheiferung anregt. — Dass aber auch alle die vielen bedeutenden Männer der Wissenschaft, welche durch ihre Anwesenheit zur Verherrlichung der Versammlung natürlich wesentlich beitrugen, den wärmsten Dank verdienen, ist zu bemerken ganz unnöthig.

Das Archiv wird es sich zur Aufgabe machen, nach und nach die seinem Kreise angehörenden Verhandlungen dieser denkwürdigen Versammlung zu besprechen. Für jetzt ist der Herausgeber überzeugt, sich den Dank seiner Leser durch Mittheilung der folgenden, der Aufbewahrung in diesem Archiv sehr werthen Eröffnungsrede, an der das Herz der Jugend und des Alters sich erwärmen wird, zu verdienen.

Durchlauchtigster Grossherzog!
Hochgeehrte Herren!

Schon 29 Jahre sind verflossen, seitdem Sie Baden zum erstenmal und zwar in Heidelberg willkommen hiess, und 20 Jahre, seit es Sie zum andernmal in Freiburg froh begrüsste.

Nicht minder freudig schallte durch das Land, vom Fürsten bis zum schlichten Bürger, der Ruf „Willkommen", als ihm die Kunde ward von der Versammlung dieses Jahres. Willkommen ruf ich nach aus tiefster Seele. Willkommen theure Freunde! Hochgeehrte Herren!

Wenn ich die Leistungen betrachte, die seit dieser Zeit von Ihnen ausgegangen, und die Reihen durchlaufe der hochberühmten deutschen Namen, die schon an Ihrer Spitze standen, so fühl' ich, nicht ohne Bangen, wie unverdient die Ehre ist, die mir zu Theil geworden, als die 33. Versammlung mich zu ihrem Geschäfts-

führer ernannte. Doppelt aber bin ich darum auch zum Dank verpflichtet, und glaube, dass Sie dem guten Willen wohl mehr vertrauten, als der Befähigung.

Was Gutes oder Mangelhaftes nun für Sie aus dieser Leitung entspringen mag — ich bitte vor Allem das Gute auf Rechnung jenes Willens, das Andere nur auf den Mangel an Geschick zu setzen.

Sie sind hier in einer Stadt zusammengekommen, die vermöge ihrer Jugend fast noch keine Geschichte hat. Sie ist nicht im Besitz von längst berühmten Lehranstalten, wie viele von den Orten, an denen unsere früheren Versammlungen stattfanden, noch glänzt sie durch grossen Reichthum, der anderwärts im Gefolge des Handels und der Industrie gefunden wird. Aber sie liegt in der Mitte eines glücklichen Landes, das reich ist an Naturschönheit und Vielem, das für Sie besonders Interesse hat.

Auch begrüsst Sie hier eine Ihrem Streben eng verbundene und Ihren Verdiensten höchst dankbare höhere Lehranstalt, die zwar noch jung ist, aber von Jahr zu Jahr in immer weiteren Kreisen ihre Wirkung verbreitet.

Hier ist der Ort, wo jener Dichter lebte, der seinem Sinn für inneres Leben und für deutsche Gemüthlichkeit den schönsten Ausdruck lieh. Doch war unser Hebel nicht nur Dichter. Er trug auch als Lehrer und Volks-Schriftsteller Vieles zur Verbreitung der Naturwissenschaften in höchst anregender Weise bei.

Hier lebten ferner die beiden wohlbekannten Physiker Böckmann, Vater und Sohn.

Noch erinnern wir an einen edlen Fürsten, Carl Friedrich, der nebst seiner geistreichen Gemahlin, Caroline Luise, früher als andere den Werth erkannte, den genaue Kenntniss der Natur für alle Zeiten hat.

Ferner mahnt auch noch die Lage dieser Stadt an Manches, was Betrachtungen über den Entwickelungsgang der menschlichen Cultur hervorrufen kann: Vor dem Thore gegen Süden ziehen friedlich nebeneinander her ein Streifen Urwald, wohlbebaute Felder, eine Eisenbahn und eine Telegraphenlinie.

Zu dem Rauschen des Laubes von tausendjährigen Eichen gesellt sich dort der Donner des Dampfhammers und das tiefe Ertönen des Ventilators.

Wir vernehmen die Naturlaute einer grauen Vorzeit und die Wirkung der riesigen Kräfte, welche die fortschreitende Naturwissenschaft in's Leben gerufen hat, zugleich miteinander.

Unter dem Lärm des vorübereilenden Bahnzugs, unter dem Aechzen der gewaltigen Maschinen, die das nahe Feuer belebt, ruft aus den Gipfeln jener Zeugen der Vergangenheit die Dryas des Baumes ihr „quousque tandem!" „Wohin führt noch das tolle Treiben, dem ich in meinem Alter nun zusehen muss? Sonst stund ich friedlich und ungestört, wohl 10 Jahrhunderte lang, besucht nur von den Heerden, die man vorbeitrieb, und dem Wild des Waldes."

„Jetzt aber rast von Jahr zu Jahr mit wachsendem Getöse und stärker als der Sturm der Menschen rastlos Wesen. Du geschwätziger Nachbar und vorwitziger Draht, der mir das Nahen der fremden Männer voraus verkündet hat, sag' an, wo will das noch hinaus?"

Und die Unvollkommenheit unseres Wissens antwortet der Eiche in den leisen Seufzern des Drahtes:

„Vergeblich frägst du mich! nur Eines ist gewiss, dass diese Zeit der Wunder der Anfang erst von noch weit Grösserem ist; darum wartet ihr altersgrauen Bäume ein Jahrhundert nur, und viel Erstaunlicheres werdet ihr noch sehen."

„Jetzt tagen in jener Stadt die Männer der Naturforschung, von denen Manche den Anfang dieses neuen regsamen Strebens, einer Aera nie gewesener Erfolge in der Erkenntniss der Natur erlebt. Diese haben meinen Einfluss auf den Magnet vor nicht acht Lustren erst vernommen, und schon trag' ich das Wort der Menschen viel schneller, als der Ton der nahen Glocke zu dir dringt, über Wald und Ströme, über die schneebedeckten Alpen und das stürmische Meer, fort in die fernste Ferne."

„Geheimnissvoll ist noch mein Wirken und dennoch haben tiefsinnige Forscher das Gesetz erkannt, nach denen es erfolgt."

„Was durch den unendlichen Raum von Stern zu Stern, von der Sonne zur Erde in zitternder Bewegung die Botschaft aller sichtbaren Veränderungen trägt, das bin ich unter der Herrschaft der Menschen für irdische Verbindung und rühme mich gleicher Geschwindigkeit wie das Licht."

„Der Strom, der in mir thätig ist, vermag Veränderungen jeder Art hervorzubringen. — Sein Licht, dem Sonnenlichte gleich, ist reiner noch als dieses. Ich leite ihn, wo man strebt, die innere Natur der Körper und ihre Zusammensetzung zu erforschen und die Kräfte zu messen, welche ihre kleinsten Theile zusammenhalten, so wie da, wo es gilt, die feinsten Werke der Kunst und der Natur mit höchster Vollkommenheit nachzubilden."

„Ich verwandle ihn in Wärme, und die Gluth, die er alsdann in mir erzeugt und die mich ein Werkzeug der Zerstörung werden liess, ist selbst ein heilsam Mittel worden, die zerstörten Theile

des Körpers abzutrennen. Scheinleben hauch' ich längst den Todten ein und in schmerzvoller Krankheit tret' ich helfend auf." —

„Ruhmred'ger Draht", spricht drauf die Eiche: „Was nützt dies Alles auf meine Frage? Hat nicht die Menschheit schon sechsmal wenigstens so lang bestanden als wie ich, und waren meine Vorfahren nicht gleichfalls Zeugen von hohen Dingen und von grossen Thaten, die geschahen, als man von solcher Unruh' noch nichts ahnte?"

„Sag an, wenn du so Vieles wissen willst, was ist der Zweck von Alledem?"

Und statt des Drahtes antwortet ihr ein Geist, der aus dem Drahte spricht:

„Auch dir, ergrauter Freund der alten Zeit, ist es ergangen wie so vielen Andern, die in dem Kampf das Unbequeme des Wechsels nur erblickt und in der lebenskräftigen Bewegung den Untergang des Hergebrachten mit Besorgniss wahrgenommen, die stehen geblieben zwischen Dorf und Stadt wie du."

„Erkenne, dass die Frische des Daseins dir fehlt, und höre was ich dir sage:

„In dem sechsfachen Alter, das du der Menschheit im Verhältniss zu dem deinigen beilegst, ist s i e der Kindheit kaum entwachsen. Deine tausend Jahre sind in ihrer Entwicklung nur e i n Tag, und da, wo du bereits zu altern angefangen, hat sie das einflussreichste Werkzeug ihrer allgemeinen Bildung erst erfunden."

„Auch damals sprach man, wohin soll das führen? War Rom nicht gross und Griechenland auch ohne diese Presse? Und du erkennst doch wohl, wie unscheinbar und einfach selbst diese Erfindung gegen tausend andere ist, die jetzt der Mensch besitzt und die er täglich noch vermehrt. Darum erfahre:

„Zu den Leistungen der gegenwärtigen Zeit, zu den Entdeckungen und Erfindungen der Forscher, die dort beisammen sind, gehörte eine lange Vorbereitung, gehörten grosse und vieljährige Studien."

„Jetzt werden die Früchte derselben von einem auf den andern übertragen und gehen nicht mehr verloren wie die Millionen Samen, die deinen Zweigen schon entfielen, um im Sumpfe zu verfaulen."

„Der Fortschritt ist gesichert und ein grosser Plan liegt ihm zu Grunde. Geordnet ist das geistige Ringen und Streben mehr und mehr. Naturgesetze, deren Harmonie und innere Nothwendigkeit der Scharfsinn jener Männer der Wissenschaft erkannt, von denen keines das andere stört, und keines anders sein kann, als es ist, sie sind die Führer einer hoffnungsreichen Zeit zur höhern Stufe menschlicher Entwickelung."

„Wer diese gründlich und nicht halb erkannt, der fühlt es, dass sie unwiderlegliche Beweise und Offenbarungen von höherer Weisheit sind, als menschlicher, und dass der Mensch als höchstes Wesen im Erschaffenen keinem höheren Ziele nachstreben kann, als dieses Göttliche in der Natur zu fühlen, zu erkennen. Begeisterungsvoll erblickt er dann in einem Meer von Licht und Wahrheit den Ausgang und das Ziel von unserem Streben: „Gott“!!!“

Und mit diesem, meine Herren, lassen Sie uns denn auch beginnen.

Wir danken ihm zunächst, dass er Sie Alle wohlbehalten hergeführt, wir danken ihm für den seit Gründung der Naturforscher-Gesellschaft, ja seit noch längerer Zeit fast ungestörten Frieden.

Wie vieles war nur durch diesen möglich, und wie der Erfolg ein grosser war, so wuchs natürlich auch der Sinn für die Natur, die Zahl von ihren Freunden. Es wuchs damit die Bedeutung und der Glanz dieser Versammlung, die für die Gegenwart und Zukunft nicht nur ein allgemeines, sondern auch ein national deutsches Interesse hat.

Das Erstere ist darin begründet, dass solche jährliche Zusammenkünfte von grossem Nutzen sind, indem sie unter verwandten Geistern Anlass zum Austausch der Ideen geben, manche folgenreiche Bekanntschaften veranlassen und neu hervortretende jugendliche Kräfte stärken und erheben.

Wer weiss zudem nicht, dass die meisten Erwerbungen der Wissenschaft Folgen oder Geschenke gemeinsamer Thätigkeit und der zu Stande gekommenen, verabredeten Arbeiten sind, und bei welcher Gelegenheit wären diese wohl leichter möglich als hier?

Wie aber in der Wissenschaft das Vereinzelte mit dem Fortschritte derselben bald nicht mehr verlassen dasteht, sondern dem allgemeinen, Gesetz einer höheren Weltordnung sich anschliesst und dadurch an Bedeutung gewinnt, so erhöht auch das Gefühl, einem grossen wissenschaftlichen Vaterlande anzugehören, den Muth des Einzelnen und führt ihn zu weiteren Erfolgen.

Dieser erhöhte Lebensmuth ist dem ächt wissenschaftlichen Streben, dem Streben nach exakter Erkenntniss nothwendig, und Viele haben es erfahren müssen, dass ihr Sieg, der Sieg der Wahrheit, nur durch enge Verbindung mit Andern möglich war.

Nur durch Einigung der Ansichten ist das Zurücktreten der blossen Spekulation von der Bühne des Ruhmes bewirkt worden. Durch Einigung wird es möglich sein, die Wirkungen einiger Ueber-

reste der Spekulation auf die Selbstüberschätzung zu hemmen, die der übertriebenen Besorgniss nur noch mehr Nahrung gab, es könnte mit den Fortschritten der Naturwissenschaften und der daraus folgenden Abnahme der Mystik ein Nachtheil für die Menschheit verbunden sein, — eine Besorgniss, die jedoch nur in niedern Sphären zu wirken scheint, da selbst dort, wo der grosse Galileï zum Widerrufe gezwungen ward, das höchste Oberhaupt der Kirche im Anfang dieses Jahres einen wahren Tempel für die exakte Naturwissenschaft in eigener Person eröffnet hat.

Kann dies in einer Zeit geschehen, wo die Astronomie sich dem Ziele nähert, die Achse zu finden, um die sich das ganze Heer von Sonnen dreht, die unserm Fixstern-Systeme angehören, so haben wir keinen neuen Stillstand der Erde zu fürchten, und das gewaltsame Dämmen der Wahrheit bringt nur Wirkungen hervor, wie das Einsperren des Uranpapiers, das, einmal der Sonne ausgesetzt, sein Licht auch im Kerker bewahrt, und dann nur um so wunderbarer erscheint, wenn es wieder zu wirken Gelegenheit hat.

Was aber nun das national deutsche Interesse an dieser Versammlung betrifft, so ist damit nicht gemeint, dass wir besondere Ansprüche an die Erwerbungen der Wissenschaft oder an die Alles erhaltende und erfreuende Natur machen, wohl aber, dass es auch eine Natur gibt, die deutsch ist, und die es sein und bleiben soll, und das ist unsere Natur. Dieses Gefühl muss nicht nur uns vor uns selbst, sondern auch vor andern Nationen erheben, wenn wir es nur nähren und stärken.

Und warum sollten wir dies nicht, während Niemand bezweifeln kann, dass Deutschland seinen Ruhm und sein Ansehen weit mehr seinem Sinn für Wissenschaft, Natur und Kunst, seinem Fleiss und seinem Wissen, als seiner politischen Macht und seinem Reichthum verdankt!

Hat der edle deutsche Greis, der ruhmvollste und grösste unter den jetzt lebenden Forschern, in dem Briefe *), den ich Ihnen nachher mittheilen werde, mit Betrübniss den Mythus der deutschen Einheit berührt, so ist es um so mehr von vaterländischem Interesse, dass wir uns fühlen und mit Stolz auf ihn und die andern deutschen Männer sehen, die durch ihre hervorragenden Arbeiten nicht nur die Zierde dieser Versammlung, sondern der Ruhm und Glanzpunkt unserer Nation geworden sind. Ihr Name sei die Fahne, unter der wir uns einig fühlen, ihre Anwesenheit der Aufruf, ihnen in Thatkraft, edlem Stolze und nützlichem Wirken nachzustreben.

---

*) Siehe **Humboldt's** Brief in Nr. 2 des Tagblattes der 34. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte.

Von den Männern des Vaterlandes, die zu dem Tempel der Wahrheit und Natur Ruhmwürdiges beigetragen und für die Wissenschaft und ihre Freunde zu früh dahingeschieden, ruhen im frischen Grabe:

Johannes Müller, der grosse Physiolog. Heinrich Lichtenstein, der vielgereiste Zoolog. Nees von Esenbeck, vieljähriger Präsident der Leopoldinischen Academie. Kastner, der Chemiker. Plattner, der deutsche Gahn. Huschke, der Anatom und Physiolog. Albers, der Conchyolog. Klug, der Entomolog. Busch, der Gynäkolog. Thienemann, der Ornitholog. Johann Roth, der kühne Reisende in Syrien.

Auch von dem Ausland sei es mir vergönnt, hier einige zu nennen, die zu nicht minderem Leid für uns dahingegangen:

Robert Brown, der grosse Botaniker. Cauchy, der grosse Mathematiker und Physiker. Thénard, der hochverdiente Chemiker. Temmink, der Ornitholog. Marshall Hall, der Physiolog. Scoresby, der verdiente Beobachter und arktische Reisende. James Clark Ross der Kühne, der im Nord und Süd den Pol des Magnetismus unserer Erde fand. Dufrénoy, der Geolog. Conyebare, der Geolog — und endlich unseres Humboldt's Freund und treuer Begleiter Aimé Bonpland.

Die Erinnerung an diese Todten sei uns heilig, den Schmerz über ihren Verlust aber mildert die Anwesenheit so vieler Männer der Wissenschaft.

Unter ihnen begrüsse ich nochmals zuerst die fremden Naturforscher und Aerzte, die aus weiter Ferne hergekommen sind, um hier das Ihrige zum Allgemeinen beizutragen, sodann die Andern, die dem deutschen Vaterlande angehören.

Noch drängt mich mein Gefühl zum Danke für das freundliche Entgegenkommen Derer, die theils an der Spitze der hiesigen Stadtbehörden stehen, theils Mitglieder der für unsere Zwecke besonders ernannten Commissionen sind.

Ich fühle mich gedrungen, mit innigem Danke es auszusprechen, wie kräftig, schnell und liberal die Unterstützung war, die wir bei allen Grossherzoglichen Behörden und insbesondere bei dem Ministerium des Innern gefunden haben.

Mehr aber als ich sagen kann, drängt es mich hin, aus tiefstem Innern ehrfurchtsvollen Dank mit Worten wahrer Liebe und Verehrung dem Fürsten darzubringen, der mit so seltenem Geschick und Eifer die ihm anvertraute Stellung zum Glücke seines Landes

benützt und dabei für Wissenschaft, Natur und Kunst so hohen Sinn durch Wort und That bewährt, der uns in seinem eigenen Hause, im schöngeschmückten, zu diesem Fest besonders hergestellten Saale aufgenommen und als ein deutscher Fürst, dem innern Drang der menschlich-rechten und darum desto höhern Empfindung nachgebend, uns mit seiner Gegenwart beehrt.

Ihm, meinem gnädigen Herrn und Grossherzog, Ihm gelte das erste Lebenszeichen unserer hiermit eröffneten Versammlung, Ihm der frohe, tief empfundene Ruf: „Er lebe hoch“!!!

XV.

Ueber das Interpolationsproblem.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

Das Interpolationsproblem ist eine der wichtigsten Aufgaben der Analysis, wegen der vielfachen Anwendnungen, die es in den gesammten Naturwissenschaften, hauptsächlich auch in der Astronomie, und in den technischen Wissenschaften findet. Die theoretische Darstellung der Theorie dieses Problems lässt, glaube ich, noch Manches zu wünschen übrig, und diese Theorie scheint mir einer neuen Entwickelung zu bedürfen. Bekanntlich werden bei dem Interpolationsproblem gewöhnlich zwei Fälle unterschieden, jenachdem die gegebenen Werthe der als unabhängig betrachteten veränderlichen Grösse eine arithmetische Reihe des ersten Grades bilden, nämlich nach gleichen Intervallen fortschreiten, oder nach beliebigen ungleichen Intervallen fortgehen. Es versteht sich aber von selbst, dass der erste Fall unter dem zweiten allgemeineren Falle enthalten sein, und sich aus demselben ableiten lassen muss. Für den Fall nach beliebigen ungleichen Intervallen fortschreitender Werthe der als unabhängig betrachteten veränderlichen Grösse enthält jedenfalls, theoretisch genommen, die Interpolationsformel von Lagrange die einfachste Auf-

lösung, und bedarf kaum eines eigentlichen Beweises, weil der Beweis gewissermassen in der Formel selbst liegt, oder sich unmittelbar aus derselben ergiebt. Für die praktische Anwendung ist aber diese Formel nicht sehr bequem, und weitere theoretische Folgerungen aus ihr zu ziehen, ist nicht ganz leicht, weshalb es mir auch nicht zweckmässig zu sein scheint, sie zur Grundlage der ganzen Theorie der Interpolation zu machen, wie dies eigentlich wohl in der Natur der Sache läge, da diese Formel eine ganz allgemeine Auflösung des Interpolationsproblems enthält. Die Glieder derselben sind nach den gegebenen Werthen der als abhängig betrachteten veränderlichen Grösse geordnet, was jedenfalls für die praktische Anwendung nicht so bequem ist, wie die bei der allgemein bekannten Interpolationsformel für den Fall nach gleichen Intervallen fortschreitender Werthe der als unabhängig betrachteten veränderlichen Grösse gewöhnliche Anordnung, wo man die Glieder der Formel nach den ersten Gliedern der successiven Differenzenreihen der Werthe der als abhängig betrachteten veränderlichen Grösse fortschreiten lässt; denn da in vielen Fällen die Glieder dieser Differenzenreihen bald sehr klein werden, so erleichtert die in Rede stehende zweite Anordnung der Glieder der Interpolationsformel oft die Rechnung wesentlich, und ist daher nach meiner Meinung im Allgemeinen der ersten, bei der Lagrange'schen Formel vorkommenden Anordnung der Glieder vorzuziehen. Fast ganz unbeachtet scheint man bis jetzt eine von Stirling in dem „Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. Londini. 1730. p. 140." gegebene Interpolationsformel gelassen zu haben, welche ich in dem allgemeinsten Falle nach beliebigen ungleichen Intervallen fortschreitender Werthe der als unabhängig betrachteten veränderlichen Grösse der Formel von Lagrange vorzuziehen geneigt bin, weil durch dieselbe nach meiner Meinung sowohl in theoretischer, als auch in praktischer Beziehung das Interpolationsproblem in der vollkommensten und einfachsten Weise gelöst wird. Wenigstens erinnere ich mich jetzt nicht, dass dieser Formel, die ich auch für das beste Fundament der ganzen Theorie der Interpolation halte, weil sie reich an Folgerungen ist und den besonderen Fall nach gleichen Intervallen fortschreitender Werthe der als unabhängig betrachteten veränderlichen Grösse unmittelbar unter sich enthält, in irgend einer der mir bekannten Schriften über den vorliegenden Gegenstand in ganz bestimmter Weise und in erforderlicher Allgemeinheit Erwähnung gethan worden wäre, gestehe aber gern, dass meine Kenntniss der betreffenden Literatur nicht ganz vollständig ist. Einen Beweis seiner Formel hat Stirling nicht gegeben, und scheint dieselbe, wie

viele andere Formeln in dem genannten, unendlich viel Schönes enthaltenden Werke, bloss durch Induction gefunden zu haben. Ich werde daher in dieser Abhandlung einen ganz allgemeinen Beweis der trefflichen Stirling'schen Formel zu geben versuchen, und, indem ich dieselbe zur Grundlage der ganzen Theorie der Interpolation mache, aus ihr eine Reihe von Folgerungen ziehen, so weit dies ohne Weitläufigkeit geschehen kann und meine Entwickelung auf Eigenthümlichkeit Anspruch zu machen sich berechtigt halten darf, da ich schon Bekanntes zu wiederholen natürlich hier nicht die Absicht habe.

---

§. 1.

Wenn zwei aus n Gliedern bestehende Reihen von Grössen:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots . x_n;$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots . y_n$$

gegeben sind, wo die Glieder der ersten Reihe sämmtlich als unter einander ungleich angenommen werden; so ist die Aufgabe: eine ganze rationale algebraische Function y des $(n-1)$sten Grades von x zu finden, welche so beschaffen ist, dass dieselbe, wenn man für die Grösse x nach und nach die Werthe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots . x_n$$

setzt, respective die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots . y_n$$

erhält.

Diese Aufgabe, deren grosse Wichtigkeit für die gesammte Naturwissenschaft hier nicht weiter erläutert zu werden braucht, nennt man gegenwärtig in der reinen Analysis das Interpolationsproblem.

Dass unter der vorhergehenden Gestalt, die wir, anderer Auffassungsweisen jetzt nicht zu gedenken, hier nur in's Auge fassen wollen, das Interpolationsproblem eine ganz bestimmte Aufgabe ist und in jedem Falle nur eine Auflösung zulassen kann, so dass es immer nur eine den Bedingungen der Aufgabe entsprechende ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades von x geben kann, ist leicht zu übersehen. Denn die gesuchte ganze rationale algebraische Function y des $(n-1)$sten Grades von x muss nothwendig im Allgemeinen die Form

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_{n-1}x^{n-1}$$

haben, und die Bedingungen der Aufgabe liefern uns zur Bestimmung der Coefficienten

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots\ A_{n-1}$$

unmittelbar die folgenden Gleichungen:

$$y_1 = A_0 + A_1x_1 + A_2x_1^2 + A_3x_1^3 + \ldots + A_{n-1}x_1^{n-1},$$
$$y_2 = A_0 + A_1x_2 + A_2x_2^2 + A_3x_2^3 + \ldots + A_{n-1}x_2^{n-1},$$
$$y_3 = A_0 + A_1x_3 + A_2x_3^2 + A_3x_3^3 + \ldots + A_{n-1}x_3^{n-1},$$

u. s. w.

$$y_n = A_0 + A_1x_n + A_2x_n^2 + A_3x_n^3 + \ldots + A_{n-1}x_n^{n-1}.$$

Da dies n Gleichungen des ersten Grades zwischen den n unbekannten Grössen

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots\ A_{n-1}$$

sind, so ist die Bestimmung dieser Coefficienten nur auf eine Art möglich, und das Problem ist also, wie behauptet wurde, unter der obigen Gestalt ein völlig bestimmtes.

§. 2.

Aus den beiden Reihen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots\ x_n;$$
$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4, \ldots\ y_n$$

bilde man jetzt neue Reihen nach den in den folgenden Formeln ausgesprochenen Gesetzen:

$$\overset{1}{y}_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\quad \overset{1}{y}_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2},\quad \overset{1}{y}_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}, \ldots, \overset{1}{y}_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}};$$

$$\overset{2}{y}_1 = \frac{\overset{1}{y}_2 - \overset{1}{y}_1}{x_3 - x_1},\quad \overset{2}{y}_2 = \frac{\overset{1}{y}_3 - \overset{1}{y}_2}{x_4 - x_2},\quad \overset{2}{y}_3 = \frac{\overset{1}{y}_4 - \overset{1}{y}_3}{x_5 - x_3}, \ldots, \overset{2}{y}_{n-2} = \frac{\overset{1}{y}_{n-1} - \overset{1}{y}_{n-2}}{x_n - x_{n-2}};$$

$$\overset{3}{y}_1 = \frac{\overset{2}{y}_2 - \overset{2}{y}_1}{x_4 - x_1},\quad \overset{3}{y}_2 = \frac{\overset{2}{y}_3 - \overset{2}{y}_2}{x_5 - x_2},\quad \overset{3}{y}_3 = \frac{\overset{2}{y}_4 - \overset{2}{y}_3}{x_6 - x_3}, \ldots, \overset{3}{y}_{n-3} = \frac{\overset{2}{y}_{n-2} - \overset{2}{y}_{n-3}}{x_n - x_{n-3}};$$

u. s. w.

$$\overset{n-2}{y}_1 = \frac{\overset{n-3}{y}_2 - \overset{n-3}{y}_1}{x_{n-1} - x_1},\quad \overset{n-2}{y}_2 = \frac{\overset{n-3}{y}_3 - \overset{n-3}{y}_2}{x_n - x_2};$$

$$\overset{n-1}{y}_1 = \frac{\overset{n-2}{y}_2 - \overset{n-2}{y}_1}{x_n - x_1};$$

wodurch man also das folgende, für unsere weiteren Untersuchungen sehr wichtige Schema einer Hauptreihe und daraus abgeleiteter Reihen erhält:

$$\begin{array}{cccccccc} y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5, \ldots, & y_{n-2}, & y_{n-1}, & y_n \\ & \overset{1}{y}_1, & \overset{1}{y}_2, & \overset{1}{y}_3, & \overset{1}{y}_4, \ldots, & \overset{1}{y}_{n-2}, & \overset{1}{y}_{n-1} & \\ & & \overset{2}{y}_1, & \overset{2}{y}_2, & \overset{2}{y}_3, \ldots, & \overset{2}{y}_{n-2} & & \end{array}$$

u. s. w.

$$\overset{n-2}{y}_1, \quad \overset{n-2}{y}_2$$

$$\overset{n-1}{y}_1.$$

Dass dieses Schema aus der gegebenen Reihe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

berechnet sei, werden wir im Folgenden immer voraussetzen.

§. 3.

Zur Abkürzung werden wir von den folgenden Zeichen Gebrauch machen. Wir setzen:

1) . . . . . $x_{x,\lambda} = x_\lambda - x_x,\quad \overset{\lambda}{\Delta y}_x = \overset{\lambda}{y}_{x+1} - \overset{\lambda}{y}_x$

und haben dann nach dem vorhergehenden Paragraphen offenbar die folgende Relation:

2) . . . . $\overset{\lambda+1}{y}_x = \dfrac{\overset{\lambda}{\Delta y}_x}{x_{x,\,x+\lambda+1}}$,

wo immer

$$x \overset{=}{>} 1 \text{ und } x+\lambda+1 \overset{=}{<} n$$

ist.

Nach 1) und 2) ist:

$$\overset{\lambda}{y}_{x+1} = \overset{\lambda}{y}_x + \overset{\lambda}{\Delta y}_x,\quad \overset{\lambda}{\Delta y}_x = x_{x,\,x+\lambda+1}\cdot\overset{\lambda+1}{y}_x;$$

woraus sich die Relation

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1}$$

haben, und die Bedingungen der Aufgabe liefern uns zur Bestimmung der Coefficienten

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots\ A_{n-1}$$

unmittelbar die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
y_1 &= A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2 + A_3 x_1^3 + \ldots + A_{n-1} x_1^{n-1},\\
y_2 &= A_0 + A_1 x_2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_2^3 + \ldots + A_{n-1} x_2^{n-1},\\
y_3 &= A_0 + A_1 x_3 + A_2 x_3^2 + A_3 x_3^3 + \ldots + A_{n-1} x_3^{n-1},\\
&\text{u. s. w.}\\
y_n &= A_0 + A_1 x_n + A_2 x_n^2 + A_3 x_n^3 + \ldots + A_{n-1} x_n^{n-1}.
\end{aligned}$$

Da dies n Gleichungen des ersten Grades zwischen den n unbekannten Grössen

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots\ A_{n-1}$$

sind, so ist die Bestimmung dieser Coefficienten nur auf eine Art möglich, und das Problem ist also, wie behauptet wurde, unter der obigen Gestalt ein völlig bestimmtes.

§. 2.

Aus den beiden Reihen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots\ x_n;$$
$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4, \ldots\ y_n$$

bilde man jetzt neue Reihen nach den in den folgenden Formeln ausgesprochenen Gesetzen:

$$\overset{1}{y}_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\quad \overset{1}{y}_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2},\quad \overset{1}{y}_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}, \ldots,\quad \overset{1}{y}_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}};$$

$$\overset{2}{y}_1 = \frac{\overset{1}{y}_2 - \overset{1}{y}_1}{x_3 - x_1},\quad \overset{2}{y}_2 = \frac{\overset{1}{y}_3 - \overset{1}{y}_2}{x_4 - x_2},\quad \overset{2}{y}_3 = \frac{\overset{1}{y}_4 - \overset{1}{y}_3}{x_5 - x_3}, \ldots,\quad \overset{2}{y}_{n-2} = \frac{\overset{1}{y}_{n-1} - \overset{1}{y}_{n-2}}{x_n - x_{n-2}};$$

$$\overset{3}{y}_1 = \frac{\overset{2}{y}_2 - \overset{2}{y}_1}{x_4 - x_1},\quad \overset{3}{y}_2 = \frac{\overset{2}{y}_3 - \overset{2}{y}_2}{x_5 - x_2},\quad \overset{3}{y}_3 = \frac{\overset{2}{y}_4 - \overset{2}{y}_3}{x_6 - x_3}, \ldots,\quad \overset{3}{y}_{n-3} = \frac{\overset{2}{y}_{n-2} - \overset{2}{y}_{n-3}}{x_n - x_{n-3}};$$

u. s. w.

$$\overset{n-2}{y}_1 = \frac{\overset{n-3}{y}_2 - \overset{n-3}{y}_1}{x_{n-1} - x_1},\quad \overset{n-2}{y}_2 = \frac{\overset{n-3}{y}_3 - \overset{n-3}{y}_2}{x_n - x_2};$$

$$\overset{n-1}{y}_1 = \frac{\overset{n-2}{y}_2 - \overset{n-2}{y}_1}{x_n - x_1};$$

wodurch man also das folgende, für unsere weiteren Untersuchungen sehr wichtige Schema einer Hauptreihe und daraus abgeleiteter Reihen erhält:

$$y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad y_4,\quad y_5,\ldots\ldots,y_{n-2},\quad y_{n-1},\quad y_n$$

$$\overset{1}{y}_1,\quad \overset{1}{y}_2,\quad \overset{1}{y}_3,\quad \overset{1}{y}_4,\quad \ldots\ldots,\quad \overset{1}{y}_{n-2},\quad \overset{1}{y}_{n-1}$$

$$\overset{2}{y}_1,\quad \overset{2}{y}_2,\quad \overset{2}{y}_3,\quad \ldots\ldots,\quad \overset{2}{y}_{n-2}$$

u. s. w.

$$\overset{n-2}{y}_1,\quad \overset{n-2}{y}_2$$

$$\overset{n-1}{y}_1.$$

Dass dieses Schema aus der gegebenen Reihe

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ldots y_n$$

berechnet sei, werden wir im Folgenden immer voraussetzen.

§. 3.

Zur Abkürzung werden wir von den folgenden Zeichen Gebrauch machen. Wir setzen:

$$1)\quad \ldots\ldots\quad x_{x,\lambda} = x_\lambda - x_x,\quad \overset{\lambda}{\Delta y}_x = \overset{\lambda}{y}_{x+1} - \overset{\lambda}{y}_x$$

und haben dann nach dem vorhergehenden Paragraphen offenbar die folgende Relation:

$$2)\quad \ldots\ldots\ldots\quad \overset{\lambda+1}{y}_x = \frac{\overset{\lambda}{\Delta y}_x}{x_{x,\,x+\lambda+1}},$$

wo immer

$$x \overset{=}{>} 1 \text{ und } x+\lambda+1 \overset{=}{<} n$$

ist.

Nach 1) und 2) ist:

$$\overset{\lambda}{y}_{x+1} = \overset{\lambda}{y}_x + \overset{\lambda}{\Delta y}_x,\quad \overset{\lambda}{\Delta y}_x = x_{x,\,x+\lambda+1}\cdot\overset{\lambda+1}{y}_x;$$

woraus sich die Relation

$$3) \quad \ldots\ldots \quad \overset{\lambda}{y}_{x+1} = \overset{\lambda}{y}_x + x_{x,\,x+\lambda+1} \cdot \overset{\lambda+1}{y}_x$$

ergiebt, von welcher wir im Folgenden weiteren Gebrauch machen werden.

§. 4.

Hauptsächlich müssen wir nun aber zunächst einige Relationen zwischen den vorher im Allgemeinen durch $x_{x,\lambda}$ bezeichneten Grössen beweisen, welche für das Folgende von grosser Wichtigkeit sind.

Weil nach 1)

$$x_{\lambda,\mu} = x_\mu - x_\lambda, \quad x_{\mu,\nu} = x_\nu - x_\mu$$

ist, so ist

$$x_{\lambda,\mu} + x_{\mu,\nu} = x_\nu - x_\lambda,$$

und folglich immer:

$$4) \quad \ldots\ldots \quad x_{\lambda,\mu} + x_{\mu,\nu} = x_{\lambda,\nu}.$$

Weil ferner nach 1):

$$x_{x,\,x+1} = x_{x+1} - x_x,$$

$$x_{x+1,\,x+2} = x_{x+2} - x_{x+1},$$

$$x_{x+2,\,x+3} = x_{x+3} - x_{x+2},$$

u. s. w.

$$x_{x+\lambda,\,x+\lambda+1} = x_{x+\lambda+1} - x_{x+\lambda}$$

ist, so ist offenbar:

$$x_{x,\,x+1} + x_{x+1,\,x+2} + x_{x+2,\,x+3} + \ldots + x_{x+\lambda,\,x+\lambda+1} = x_{x+\lambda+1} - x_x,$$

also:

5)

$$x_{x,\,x+1} + x_{x+1,\,x+2} + x_{x+2,\,x+3} + \ldots + x_{x+\lambda,\,x+\lambda+1} = x_{x,\,x+\lambda+1}.$$

Wir wollen nun den Werth der folgenden Grösse zu ermitteln suchen:

$$x_{\lambda,\kappa}\cdot x_{\lambda+1,\kappa}\cdot x_{\lambda+2,\kappa}\cdots x_{\lambda+\mu,\kappa}\cdot x_{\lambda-1,\lambda+\mu+1}$$

$$+x_{\lambda+1,\kappa}\cdot x_{\lambda+2,\kappa}\cdot x_{\lambda+3,\kappa}\cdots x_{\lambda+\mu+1,\kappa}\cdot x_{\lambda,\lambda+\mu+2}$$

$$+x_{\lambda+2,\kappa}\cdot x_{\lambda+3,\kappa}\cdot x_{\lambda+4,\kappa}\cdots x_{\lambda+\mu+2,\kappa}\cdot x_{\lambda+1,\lambda+\mu+3}$$

$$+x_{\lambda+3,\kappa}\cdot x_{\lambda+4,\kappa}\cdot x_{\lambda+5,\kappa}\cdots x_{\lambda+\mu+3,\kappa}\cdot x_{\lambda+2,\lambda+\mu+4}$$

u. s. w.

$$+x_{\kappa-\mu-4,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-3,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-2,\kappa}\cdots x_{\kappa-4,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-5,\kappa-3}$$

$$+x_{\kappa-\mu-3,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-2,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-1,\kappa}\cdots x_{\kappa-3,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-4,\kappa-2}$$

$$+x_{\kappa-\mu-2,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-1,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu,\kappa}\cdots x_{\kappa-2,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-3,\kappa-1}$$

$$+x_{\kappa-\mu-1,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu+1,\kappa}\cdots x_{\kappa-1,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-2,\kappa}.$$

Nennen wir vom Ende nach dem Anfange hin die Glieder dieser Grösse nach der Reihe das

1ste, 2te, 3te, 4te, ..., $(\kappa-\lambda-\mu)$te

Glied, so ist die Summe des

1sten, 2ten

Gliedes offenbar:

$$x_{\kappa-\mu-2,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-1,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu,\kappa}\cdots x_{\kappa-2,\kappa}\cdot(x_{\kappa-\mu-3,\kappa-1}+x_{\kappa-1,\kappa}),$$

also nach 4):

$$x_{\kappa-\mu-3,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-2,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-1,\kappa}\cdots x_{\kappa-3,\kappa}\cdot x_{\kappa-2,\kappa}.$$

Folglich ist die Summe des

1sten, 2ten, 3ten

Gliedes:

$$x_{\kappa-\mu-3,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-2,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-1,\kappa}\cdots x_{\kappa-3,\kappa}\cdot(x_{\kappa-\mu-4,\kappa-2}+x_{\kappa-2,\kappa}),$$

also nach 4):

$$x_{\kappa-\mu-4,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-3,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-2,\kappa}\cdots x_{\kappa-4,\kappa}\cdot x_{\kappa-3,\kappa}.$$

Daher ist die Summe des

1sten, 2ten, 3ten, 4ten

Gliedes:

$$x_{\kappa-\mu-4,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-3,\kappa}\cdot x_{\kappa-\mu-2,\kappa}\cdots x_{\kappa-4,\kappa}\cdot(x_{\kappa-\mu-5,\kappa-3}+x_{\kappa-3,\kappa}),$$

also nach 4):

$$x_{\varkappa-\mu-5,\,\varkappa}\cdot x_{\varkappa-\mu-4,\,\varkappa}\cdot x_{\varkappa-\mu-3,\,\varkappa}\ldots x_{\varkappa-5,\,\varkappa}\cdot x_{\varkappa-4,\,\varkappa}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und es ist also offenbar die Summe des

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, ... νten

Gliedes:

$$x_{\varkappa-\mu-(\nu+1),\,\varkappa}\cdot x_{\varkappa-\mu-\nu,\,\varkappa}\cdot x_{\varkappa-\mu-(\nu-1),\,\varkappa}\ldots x_{\varkappa-\nu,\,\varkappa}.$$

Folglich ist, wenn man

$$\nu=\varkappa-\lambda-\mu$$

setzt, weil unter dieser Voraussetzung

$$\begin{aligned}
\varkappa-\mu-(\nu+1)&=\varkappa-\mu-(\varkappa-\lambda-\mu+1)=\lambda-1,\\
\varkappa-\mu-\nu&=\varkappa-\mu-(\varkappa-\lambda-\mu)\quad\;\;=\lambda,\\
\varkappa-\mu-(\nu-1)&=\varkappa-\mu-(\varkappa-\lambda-\mu-1)=\lambda+1,\\
\varkappa-\mu-(\nu-2)&=\varkappa-\mu-(\varkappa-\lambda-\mu-2)=\lambda+2,
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\varkappa-\nu=\varkappa-(\varkappa-\lambda-\mu)\qquad=\lambda+\mu$$

ist, die Summe des

1sten, 2ten, 3ten, 4ten, ..., $(\varkappa-\lambda-\mu)$ten

Gliedes, also der Werth der ganzen obigen Grösse:

$$x_{\lambda-1,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda+1,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda+2,\,\varkappa}\ldots x_{\lambda+\mu,\,\varkappa};$$

und wir haben daher jetzt die folgende Formel:

$$\begin{aligned}
6)\quad\ldots\; & x_{\lambda-1,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda+1,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda+2,\,\varkappa}\ldots x_{\lambda+\mu,\,\varkappa}\\
=\; & x_{\lambda,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda+1,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda+2,\,\varkappa}\ldots x_{\lambda+\mu,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda-1,\,\lambda+\mu+1}\\
& +x_{\lambda+1,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda+2,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda+3,\,\varkappa}\ldots x_{\lambda+\mu+1,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda,\,\lambda+\mu+2}\\
& +x_{\lambda+2,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda+3,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda+4,\,\varkappa}\ldots x_{\lambda+\mu+2,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda+1,\,\lambda+\mu+3}\\
& +x_{\lambda+3,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda+4,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda+5,\,\varkappa}\ldots x_{\lambda+\mu+3,\,\varkappa}\cdot x_{\lambda+2,\,\lambda+\mu+4}
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
& +x_{\varkappa-\mu-2,\,\varkappa}\cdot x_{\varkappa-\mu-1,\,\varkappa}\cdot x_{\varkappa-\mu,\,\varkappa}\ldots x_{\varkappa-2,\,\varkappa}\cdot x_{\varkappa-\mu-3,\,\varkappa}\\
& +x_{\varkappa-\mu-1,\,\varkappa}\cdot x_{\varkappa-\mu,\,\varkappa}\cdot x_{\varkappa-\mu+1,\,\varkappa}\ldots x_{\varkappa-1,\,\varkappa}\cdot x_{\varkappa-\mu-2,\,\varkappa}.
\end{aligned}$$

Für $\mu=0$ ist:

$$7) \quad \ldots \quad x_{\lambda-1,\varkappa}\cdot x_{\lambda,\varkappa} = \begin{aligned}[t] & x_{\lambda,\varkappa}\cdot x_{\lambda-1,\lambda+1} \\ & + x_{\lambda+1,\varkappa}\cdot x_{\lambda,\lambda+2} \\ & + x_{\lambda+2,\varkappa}\cdot x_{\lambda+1,\lambda+3} \\ & + x_{\lambda+3,\varkappa}\cdot x_{\lambda+2,\lambda+4} \\ & \quad \text{u. s. w.} \\ & + x_{\varkappa-1,\varkappa}\cdot x_{\varkappa-2,\varkappa}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen die Grösse auf der rechten Seite der Gleichung 6) durch

$$X_{\lambda,\varkappa,\mu};$$

so ist nach 6):

$$8) \quad . \quad X_{\lambda,\varkappa,\mu} = x_{\lambda-1,\varkappa}\cdot x_{\lambda,\varkappa}\cdot x_{\lambda+1,\varkappa}\cdot x_{\lambda+2,\varkappa}\ldots\ldots x_{\lambda+\mu,\varkappa}.$$

§. 5.

Nach 3) ist nun:

$$\begin{aligned} \overset{\lambda}{y}_{\varkappa} &= \overset{\lambda}{y}_{\varkappa-1} + x_{\varkappa-1,\varkappa+\lambda}\cdot \overset{\lambda+1}{y}_{\varkappa-1}, \\ \overset{\lambda}{y}_{\varkappa-1} &= \overset{\lambda}{y}_{\varkappa-2} + x_{\varkappa-2,\varkappa+\lambda-1}\cdot \overset{\lambda+1}{y}_{\varkappa-2}, \\ \overset{\lambda}{y}_{\varkappa-2} &= \overset{\lambda}{y}_{\varkappa-3} + x_{\varkappa-3,\varkappa+\lambda-2}\cdot \overset{\lambda+1}{y}_{\varkappa-3}, \\ & \quad \text{u. s. w.} \\ \overset{\lambda}{y}_{3} &= \overset{\lambda}{y}_{2} + x_{2,\lambda+3}\cdot \overset{\lambda+1}{y}_{2}, \\ \overset{\lambda}{y}_{2} &= \overset{\lambda}{y}_{1} + x_{1,\lambda+2}\cdot \overset{\lambda+1}{y}_{1}; \end{aligned}$$

also, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichungen addirt, und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$9) \quad \ldots\ldots \quad \overset{\lambda}{y}_{\varkappa} = \begin{aligned}[t] & \overset{\lambda}{y}_{1} + x_{1,\lambda+2}\cdot \overset{\lambda+1}{y}_{1} \\ & + x_{2,\lambda+3}\cdot \overset{\lambda+1}{y}_{2} \\ & + x_{3,\lambda+4}\cdot \overset{\lambda+1}{y}_{3} \\ & \quad \text{u. s. w.} \\ & + x_{\varkappa-2,\varkappa+\lambda-1}\cdot \overset{\lambda+1}{y}_{\varkappa-2} \\ & + x_{\varkappa-1,\varkappa+\lambda}\cdot \overset{\lambda+1}{y}_{\varkappa-1}. \end{aligned}$$

Also ist:

$$10) \quad . \; . \; y_x = y_1 + x_{1,2}\cdot\overset{1}{y}_1 + x_{2,3}\cdot\overset{1}{y}_2 + x_{3,4}\cdot\overset{1}{y}_3 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + x_{x-2,x-1}\cdot\overset{1}{y}_{x-2} + x_{x-1,x}\cdot\overset{1}{y}_{x-1}.$$

Nun ist aber nach 9) auch:

$$\overset{1}{y}_2 = \overset{1}{y}_1 + x_{1,3}\cdot\overset{2}{y}_1,$$
$$\overset{1}{y}_3 = \overset{1}{y}_1 + x_{1,3}\cdot\overset{2}{y}_1 + x_{2,4}\cdot\overset{2}{y}_2,$$
$$\overset{1}{y}_4 = \overset{1}{y}_1 + x_{1,3}\cdot\overset{2}{y}_1 + x_{2,4}\cdot\overset{2}{y}_2 + x_{3,5}\cdot\overset{2}{y}_3,$$

u. s. w.

$$\overset{1}{y}_{x-1} = \overset{1}{y}_1 + x_{1,3}\cdot\overset{2}{y}_1 + x_{2,4}\cdot\overset{2}{y}_2 + x_{3,5}\cdot\overset{2}{y}_3 + \ldots\ldots + x_{x-2,x}\cdot\overset{2}{y}_{x-2};$$

also nach 10) offenbar:

$$y_x = y_1 + (x_{1,2} + x_{2,3} + x_{3,4} + \ldots\ldots + x_{x-2,x-1} + x_{x-1,x})\overset{1}{y}_1$$
$$+ (x_{2,3} + x_{3,4} + \ldots\ldots + x_{x-2,x-1} + x_{x-1,x})x_{1,3}\cdot\overset{2}{y}_1$$
$$+ (x_{3,4} + \ldots\ldots + x_{x-2,x-1} + x_{x-1,x})x_{2,4}\cdot\overset{2}{y}_2$$

u. s. w.

$$+ (x_{x-2,x-1} + x_{x-1,x})x_{x-3,x-1}\cdot\overset{2}{y}_{x-3}$$
$$+ x_{x-1,x}\cdot x_{x-2,x-1}\cdot\overset{2}{y}_{x-2},$$

und folglich nach 5):

11)

$$y_x = y_1 + x_{1,x}\cdot\overset{1}{y}_1 + x_{2,x}\cdot x_{1,3}\cdot\overset{2}{y}_1 + x_{3,x}\cdot x_{2,4}\cdot\overset{2}{y}_2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + x_{x-2,x}\cdot x_{x-3,x-1}\cdot\overset{2}{y}_{x-3} + x_{x-1,x}\cdot x_{x-2,x}\cdot\overset{2}{y}_{x-2}.$$

Nun ist aber nach 9):

$$\overset{2}{y}_2 = \overset{2}{y}_1 + x_{1,4}\cdot\overset{3}{y}_1,$$

$$\overset{2}{y}_3 = \overset{2}{y}_1 + x_{1,4}\cdot\overset{3}{y}_1 + x_{2,5}\cdot\overset{3}{y}_2,$$

$$\overset{2}{y}_4 = \overset{2}{y}_1 + x_{1,4}\cdot\overset{3}{y}_1 + x_{2,5}\cdot\overset{3}{y}_2 + x_{3,6}\cdot\overset{3}{y}_3,$$

u. s. w.

$$\overset{2}{y}_{\varkappa-2} = \overset{2}{y}_1 + x_{1,4}\cdot\overset{3}{y}_1 + x_{2,5}\cdot\overset{3}{y}_2 + x_{3,6}\cdot\overset{3}{y}_3 + \ldots + x_{\varkappa-3,\varkappa}\cdot\overset{3}{y}_{\varkappa-3};$$

und folglich nach 11), wie man mit Anwendung des oben eingeführten Zeichens $X_{\lambda,\varkappa,\mu}$ leicht findet:

$$\begin{aligned} y_\varkappa = y_1 + x_{1,\varkappa}\cdot\overset{1}{y}_1 + X_{2,\varkappa,0}\cdot\overset{2}{y}_1 + {} & X_{3,\varkappa,0}\cdot x_{1,4}\cdot\overset{3}{y}_1 \\ + {} & X_{4,\varkappa,0}\cdot x_{2,5}\cdot\overset{3}{y}_2 \\ + {} & X_{5,\varkappa,0}\cdot x_{3,6}\cdot\overset{3}{y}_3 \\ & \text{u. s. w.} \\ + {} & X_{\varkappa-1,\varkappa,0}\cdot x_{\varkappa-3,\varkappa}\cdot\overset{3}{y}_{\varkappa-3}, \end{aligned}$$

also nach 8):

12)

$$\begin{aligned} y_\varkappa = y_1 + x_{1,\varkappa}\cdot\overset{1}{y}_1 + x_{1,\varkappa}\cdot x_{2,\varkappa}\cdot\overset{2}{y}_1 + {} & x_{2,\varkappa}\cdot x_{3,\varkappa}\cdot x_{1,4}\cdot\overset{3}{y}_1 \\ + {} & x_{3,\varkappa}\cdot x_{4,\varkappa}\cdot x_{2,5}\cdot\overset{3}{y}_2 \\ + {} & x_{4,\varkappa}\cdot x_{5,\varkappa}\cdot x_{3,6}\cdot\overset{3}{y}_3 \\ & \text{u. s. w.} \\ + {} & x_{\varkappa-2,\varkappa}\cdot x_{\varkappa-1,\varkappa}\cdot x_{\varkappa-3,\varkappa}\cdot\overset{3}{y}_{\varkappa-3}. \end{aligned}$$

Nach 9) ist ferner:

$$\overset{3}{y}_2 = \overset{3}{y}_1 + x_{1,5}\cdot\overset{4}{y}_1,$$

$$\overset{3}{y}_3 = \overset{3}{y}_1 + x_{1,5}\cdot\overset{4}{y}_1 + x_{2,6}\cdot\overset{4}{y}_2,$$

$$\overset{3}{y}_4 = \overset{3}{y}_1 + x_{1,5}\cdot\overset{4}{y}_1 + x_{2,6}\cdot\overset{4}{y}_2 + x_{3,7}\,\overset{4}{y}_3,$$

u. s. w.

$$\overset{3}{y}_{\varkappa-3} = \overset{3}{y}_1 + x_{1,5}\cdot\overset{4}{y}_1 + x_{2,6}\cdot\overset{4}{y}_2 + x_{3,7}\cdot\overset{4}{y}_3 + \ldots + x_{\varkappa-4,\varkappa}\cdot\overset{4}{y}_{\varkappa-4};$$

also nach 12), wie man mit Anwendung des oben eingeführten Zeichens $X_{\lambda, x, \mu}$ leicht findet:

$$\begin{aligned} y_x = y_1 + x_{1,x}\cdot\overset{1}{y}_1 + x_{1,x}\cdot x_{2,x}\cdot\overset{2}{y}_1 + X_{2,x,1}\cdot\overset{3}{y}_1 + X_{3,x,1}\cdot x_{1,5}\cdot\overset{4}{y}_1 \\ + X_{4,x,1}\cdot x_{2,6}\cdot\overset{4}{y}_2 \\ + X_{5,x,1}\cdot x_{3,7}\cdot\overset{4}{y}_3 \\ \text{u. s. w.} \\ + X_{x-2,x,1}\cdot x_{x-4,x}\cdot\overset{4}{y}_{x-4}, \end{aligned}$$

also nach 8):

$$\begin{aligned} 13)\quad y_x = y_1 + x_{1,x}\cdot\overset{1}{y}_1 + x_{1,x}\cdot x_{2,x}\cdot\overset{2}{y}_1 + x_{1,x}\cdot x_{2,x}\cdot x_{3,x}\cdot\overset{3}{y}_1 \\ + x_{2,x}\cdot x_{3,x}\cdot x_{4,x}\cdot x_{1,5}\cdot\overset{4}{y}_1 \\ + x_{3,x}\cdot x_{4,x}\cdot x_{5,x}\cdot x_{2,6}\cdot\overset{4}{y}_2 \\ + x_{4,x}\cdot x_{5,x}\cdot x_{6,x}\cdot x_{3,7}\cdot\overset{4}{y}_3 \\ \text{u. s. w.} \\ + x_{x-3,x}\cdot x_{x-2,x}\cdot x_{x-1,x}\cdot x_{x-4,x}\cdot\overset{4}{y}_{x-4}. \end{aligned}$$

Nach 9) ist jetzt wieder:

$$\begin{aligned} \overset{4}{y}_2 &= \overset{4}{y}_1 + x_{1,6}\cdot\overset{5}{y}_1, \\ \overset{4}{y}_3 &= \overset{4}{y}_2 + x_{1,6}\cdot\overset{5}{y}_1 + x_{2,7}\cdot\overset{5}{y}_2, \\ \overset{4}{y}_4 &= \overset{4}{y}_1 + x_{1,6}\cdot\overset{5}{y}_1 + x_{2,7}\cdot\overset{5}{y}_2 + x_{3,8}\cdot\overset{5}{y}_3, \\ &\text{u. s. w.} \\ \overset{4}{y}_{x-4} &= \overset{4}{y}_1 + x_{1,6}\cdot\overset{5}{y}_1 + x_{2,7}\cdot\overset{5}{y}_2 + x_{3,8}\cdot\overset{5}{y}_3 + \ldots + x_{x-5,x}\cdot\overset{5}{y}_{x-5}; \end{aligned}$$

also nach 13) auf ähnliche Weise wie oben:

$$y_x = y_1 + x_{1,x}\cdot\overset{1}{y}_1 + x_{1,x}\cdot x_{2,x}\cdot\overset{2}{y}_1 + x_{1,x}\cdot x_{2,x}\cdot x_{3,x}\cdot\overset{3}{y}_1 + X_{2,x,2}\cdot\overset{4}{y}_1$$

$$+ X_{3,x,2}\cdot x_{1,6}\cdot\overset{5}{y}_1$$

$$+ X_{4,x,2}\cdot x_{2,7}\cdot\overset{5}{y}_2$$

$$+ X_{5,x,2}\cdot x_{3,8}\cdot\overset{5}{y}_3$$

u. s. w.

$$+ X_{x-3,x,2}\cdot x_{x-5,x}\cdot\overset{5}{y}_{x-5},$$

also nach 8):

14) . . . . $y_x = y_1$

$$+ x_{1,x}\cdot\overset{1}{y}_1 + x_{1,x}\cdot x_{2,x}\cdot\overset{2}{y}_1 + x_{1,x}\cdot x_{2,x}\cdot x_{3,x}\cdot\overset{3}{y}_1 + x_{1,x}\cdot x_{2,x}\cdot x_{3,x}\cdot x_{4,x}\cdot\overset{4}{y}_1$$

$$+ x_{2,x}\cdot x_{3,x}\cdot x_{4,x}\cdot x_{5,x}\cdot x_{1,6}\cdot\overset{5}{y}_1$$

$$+ x_{3,x}\cdot x_{4,x}\cdot x_{5,x}\cdot x_{6,x}\cdot x_{2,7}\cdot\overset{5}{y}_2$$

$$+ x_{4,x}\cdot x_{5,x}\cdot x_{6,x}\cdot x_{7,x}\cdot x_{3,8}\cdot\overset{5}{y}_3$$

u. s. w.

$$+ x_{x-4,x}\cdot x_{x-3,x}\cdot x_{x-2,x}\cdot x_{x-1,x}\cdot x_{x-5,x}\cdot\overset{5}{y}_{x-5}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt nicht den geringsten Zweifel, so dass man also jetzt im Allgemeinen die folgende Formel erhält:

$$y_x = y_1 + x_{1,x}\cdot\overset{1}{y}_1$$

$$+ x_{1,x}\cdot x_{2,x}\cdot\overset{2}{y}_1$$

$$+ x_{1,x}\cdot x_{2,x}\cdot x_{3,x}\cdot\overset{3}{y}_1$$

$$+ x_{1,x}\cdot x_{2,x}\cdot x_{3,x}\cdot x_{4,x}\cdot\overset{4}{y}_1$$

u. s. w.

$$+ x_{1,x}\cdot x_{2,x}\cdot x_{3,x}\cdot x_{4,x}\cdots x_{v-1,x}\cdot\overset{v-1}{y}_1$$

$$+ x_{2,x}\cdot x_{3,x}\cdot x_{4,x}\cdot x_{5,x}\cdots x_{v,x}\cdot x_{1,v+1}\cdot\overset{v}{y}_1$$

$$+ x_{3,x}\cdot x_{4,x}\cdot x_{5,x}\cdot x_{6,x}\cdots x_{v+1,x}\cdot x_{2,v+2}\cdot\overset{v}{y}_2$$

$$+ x_{4,x}\cdot x_{5,x}\cdot x_{6,x}\cdot x_{7,x}\cdots x_{v+2,x}\cdot x_{3,v+3}\cdot\overset{v}{y}_3$$

u. s. w.

$$+ x_{x-v+1,x}\cdot x_{x-v+2,x}\cdots x_{x-1,x}\cdot x_{x-v,x}\cdot\overset{v}{y}_{x-v}.$$

Setzen wir in dieser Formel $\nu = \varkappa - 1$, so wird dieselbe:

$$y_\varkappa = y_1 + x_{1,\varkappa}\cdot\overset{1}{y_1}$$

$$+ x_{1,\varkappa}\cdot x_{2,\varkappa}\cdot\overset{2}{y_1}$$

$$+ x_{1,\varkappa}\cdot x_{2,\varkappa}\cdot x_{3,\varkappa}\cdot\overset{3}{y_1}$$

$$+ x_{1,\varkappa}\cdot x_{2,\varkappa}\cdot x_{3,\varkappa}\cdot x_{4,\varkappa}\cdot\overset{4}{y_1}$$

u. s. w.

$$+ x_{1,\varkappa}\cdot x_{2,\varkappa}\cdot x_{3,\varkappa}\cdot x_{4,\varkappa}\ldots x_{\varkappa-2,\varkappa}\cdot\overset{\varkappa-2}{y_1}$$

$$+ x_{2,\varkappa}\cdot x_{3,\varkappa}\cdot x_{4,\varkappa}\cdot x_{5,\varkappa}\ldots x_{\varkappa-1,\varkappa}\cdot x_{1,\varkappa}\cdot\overset{\varkappa-1}{y_1},$$

also:

$$16)\ \ldots\ y_\varkappa = y_1 + x_{1,\varkappa}\cdot\overset{1}{y_1}$$

$$+ x_{1,\varkappa}\cdot x_{2,\varkappa}\cdot\overset{2}{y_1}$$

$$+ x_{1,\varkappa}\cdot x_{2,\varkappa}\cdot x_{3,\varkappa}\cdot\overset{3}{y_1}$$

$$+ x_{1,\varkappa}\cdot x_{2,\varkappa}\cdot x_{3,\varkappa}\cdot x_{4,\varkappa}\cdot\overset{4}{y_1}$$

u. s. w.

$$+ x_{1,\varkappa}\cdot x_{2,\varkappa}\cdot x_{3,\varkappa}\cdot x_{4,\varkappa}\ldots x_{\varkappa-1,\varkappa}\cdot\overset{\varkappa-1}{y_1},$$

oder nach 1):

17)

$$y_\varkappa = y_1 + (x_\varkappa - x_1)\overset{1}{y_1}$$

$$+ (x_\varkappa - x_1)(x_\varkappa - x_2)\overset{2}{y_1}$$

$$+ (x_\varkappa - x_1)(x_\varkappa - x_2)(x_\varkappa - x_3)\overset{3}{y_1}$$

$$+ (x_\varkappa - x_1)(x_\varkappa - x_2)(x_\varkappa - x_3)(x_\varkappa - x_4)\overset{4}{y_1}$$

u. s. w.

$$+ (x_\varkappa - x_1)(x_\varkappa - x_2)(x_\varkappa - x_3)(x_\varkappa - x_4)\ldots(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})\overset{\varkappa-1}{y_1}.$$

wonach die Coefficienten der Potenzen von x in den in Rede stehenden Producten sich leicht nach und nach berechnen lassen. Independente combinatorische Formeln würden sich leicht entwickeln lassen, würden aber bei numerischen Rechnungen weniger Bequemlichkeit darbieten als die vorstehenden recurrirenden Formeln, weshalb wir es nicht für nöthig halten, uns mit deren Entwickelung hier zu beschäftigen.

§. 6.

Wenn die Grössen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden, deren Differenz Δx_1 ist, so ist allgemein

18) . . . . . $x_\varkappa = x_1 + (\varkappa - 1)\Delta x_1,$

und folglich

$$x_{\varkappa,\lambda} = x_\lambda - x_\varkappa = \{x_1 + (\lambda - 1)\Delta x_1\} - \{x_1 + (\varkappa - 1)\Delta x_1\},$$

also:

19) . . . $x_{\varkappa,\lambda} = x_\lambda - x_\varkappa = (\lambda - \varkappa)\Delta x_1.$

Setzen wir nun wie gewöhnlich:

20)

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_1,\\
\Delta y_1 &= y_2 - (1)_1 . y_1,\\
\Delta^2 y_1 &= y_3 - (2)_1 . y_2 + (2)_2 . y_1,\\
\Delta^3 y_1 &= y_4 - (3)_1 . y_3 + (3)_2 . y_2 - (3)_3 . y_1,
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\Delta^{n-1} y_1 = y_n - (n-1)_1 . y_{n-1} + (n-1)_2 . y_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} . (n-1)_{n-1} . y_1;$$

so ist offenbar nach §. 2. mit Rücksicht auf die Formel 19):

$$\overset{1}{y}_1 = \frac{\Delta y_1}{1.\Delta x_1},$$

$$\overset{2}{y}_1 = \frac{\Delta^2 y_1}{1.2.\Delta x_1^{\,2}},\quad \overset{3}{y}_1 = \frac{\Delta^3 y_1}{1.2.3.\Delta x_1^{\,3}},\ \ldots\ \overset{n-1}{y}_1 = \frac{\Delta^{n-1} y_1}{1 \ldots (n-1).\Delta x_1^{\,n-1}}.$$

Also ist, weil nach 18)

multiplicirt sind, unter dieser Form darzustellen, was nach den allgemein bekannten combinatorischen Regeln und Sätzen keiner Schwierigkeit unterliegt. Am besten wird man aber immer thun, die Coefficienten der Potenzen von x in den verschiedenen Producten nach der Reihe successive aus einander zu berechnen, wozu die folgenden sich leicht ergebenden Formeln dienen. Man setze allgemein:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{\varkappa-1})$$
$$=\overset{\varkappa-1}{C}_0+\overset{\varkappa-1}{C}_1x+\overset{\varkappa-1}{C}_2x^2+\overset{\varkappa-1}{C}_3x^3+\ldots+\overset{\varkappa-1}{C}_{\varkappa-1}x^{\varkappa-1},$$

also in analoger Bezeichnung:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_\varkappa)$$
$$=\overset{\varkappa}{C}_0+\overset{\varkappa}{C}_1x+\overset{\varkappa}{C}_2x^2+\overset{\varkappa}{C}_3x^3+\ldots+\overset{\varkappa}{C}_\varkappa x^\varkappa;$$

so ist, weil

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_\varkappa)$$
$$=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{\varkappa-1}).(x-x_\varkappa)$$

ist, offenbar:

$$\overset{\varkappa}{C}_0=-\overset{\varkappa-1}{C}_0x_\varkappa,$$
$$\overset{\varkappa}{C}_1=\overset{\varkappa-1}{C}_0-\overset{\varkappa-1}{C}_1x_\varkappa,$$
$$\overset{\varkappa}{C}_2=\overset{\varkappa-1}{C}_1-\overset{\varkappa-1}{C}_2x_\varkappa,$$
$$\overset{\varkappa}{C}_3=\overset{\varkappa-1}{C}_2-\overset{\varkappa-1}{C}_3x_\varkappa,$$
u. s. w.
$$\overset{\varkappa}{C}_{\varkappa-1}=\overset{\varkappa-1}{C}_{\varkappa-2}-\overset{\varkappa-1}{C}_{\varkappa-1}x_\varkappa,$$
$$\overset{\varkappa}{C}_\varkappa=\overset{\varkappa-1}{C}_{\varkappa-1};$$

und man hat also die folgenden Formeln:

$$\overset{0}{C}_0=1,$$
$$\overset{1}{C}_0=-x_1,\quad \overset{1}{C}_1=1;$$
$$\overset{2}{C}_0=-\overset{1}{C}_0x_2,\quad \overset{2}{C}_1=\overset{1}{C}_0-\overset{1}{C}_1x_2,\quad \overset{2}{C}_2=\overset{1}{C}_1;$$
$$\overset{3}{C}_0=-\overset{2}{C}_0x_3,\quad \overset{3}{C}_1=\overset{2}{C}_0-\overset{2}{C}_1x_3,\quad \overset{3}{C}_2=\overset{2}{C}_1-\overset{2}{C}_2x_3,\quad \overset{3}{C}_3=\overset{2}{C}_2;$$

u. s. w.

wonach die Coefficienten der Potenzen von x in den in Rede stehenden Producten sich leicht nach und nach berechnen lassen. Independente combinatorische Formeln würden sich leicht entwickeln lassen, würden aber bei numerischen Rechnungen weniger Bequemlichkeit darbieten als die vorstehenden recurrirenden Formeln, weshalb wir es nicht für nöthig halten, uns mit deren Entwickelung hier zu beschäftigen.

§. 6.

Wenn die Grössen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots x_n$$

eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden, deren Differenz Δx_1 ist, so ist allgemein

$$18)\quad \ldots\ldots \quad x_\varkappa = x_1 + (\varkappa - 1)\Delta x_1,$$

und folglich

$$x_{\varkappa,\lambda} = x_\lambda - x_\varkappa = \{x_1 + (\lambda-1)\Delta x_1\} - \{x_1 + (\varkappa-1)\Delta x_1\},$$

also:

$$19)\quad \ldots \quad x_{\varkappa,\lambda} = x_\lambda - x_\varkappa = (\lambda - \varkappa)\Delta x_1.$$

Setzen wir nun wie gewöhnlich:

$$20)\quad \begin{aligned}
y_1 &= y_1,\\
\Delta y_1 &= y_2 - (1)_1 . y_1,\\
\Delta^2 y_1 &= y_3 - (2)_1 . y_2 + (2)_2 . y_1,\\
\Delta^3 y_1 &= y_4 - (3)_1 . y_3 + (3)_2 . y_2 - (3)_3 . y_1,
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\Delta^{n-1} y_1 = y_n - (n-1)_1 . y_{n-1} + (n-1)_2 . y_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} . (n-1)_{n-1} . y_1;$$

so ist offenbar nach §. 2. mit Rücksicht auf die Formel 19):

$$\overset{1}{y_1} = \frac{\Delta y_1}{1 . \Delta x_1},$$

$$\overset{2}{y_1} = \frac{\Delta^2 y_1}{1.2.\Delta x_1^2},\quad \overset{3}{y_1} = \frac{\Delta^3 y_1}{1.2.3.\Delta x_1^3},\ \ldots \quad \overset{n-1}{y_1} = \frac{\Delta^{n-1} y_1}{1\ldots(n-1).\Delta x_1^{n-1}}.$$

Also ist, weil nach 18):

aus 20) einführt, so erhält man:

$$\begin{aligned}
y = \; & y_1 \\
& + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_1 \{y_2 - (1)_1 \cdot y_1\} \\
& + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_2 \{y_3 - (2)_1 \cdot y_2 + (2)_2 \cdot y_1\} \\
& + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3 \{y_4 - (3)_1 \cdot y_3 + (3)_2 \cdot y_2 - (3)_3 \cdot y_1\}
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1} \{y_n - (n-1)_1 \cdot y_{n-1} + (n-1)_2 \cdot y_{n-2} - \ldots \\
& \qquad \ldots + (-1)^{n-1} \cdot (n-1)_{n-1} \cdot y_1\},
\end{aligned}$$

folglich, wenn man diesen Ausdruck nach

$$y_1,\; y_2,\; y_3,\; y_4, \ldots y_n$$

ordnet:

$$\begin{aligned}
y = & \left\{1 - (1)_1 \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_1 + (2)_2 \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_2 - (3)_3 \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3 + \ldots \right. \\
& \qquad \left. \ldots + (-1)^{n-1} (n-1)_{n-1} \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\right\} y_1 \\
& + \left\{\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_1 - (2)_1 \cdot \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_2 + (3)_2 \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3 - \ldots \right. \\
& \qquad \left. \ldots + (-1)^{n-2} (n-1)_{n-2} \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\right\} y_2 \\
& + \left\{\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_2 - (3)_1 \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3 + \ldots + (-1)^{n-3} (n-1)_{n-3} \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\right\} y_3 \\
& + \left\{\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3 - \ldots + (-1)^{n-4} (n-1)_{n-4} \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\right\} y_4
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
& + \left\{\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-2} - (n-1)_1 \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\right\} y_{n-1} \\
& + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1} y_n;
\end{aligned}$$

welches die längst bekannte Interpolationsformel für den Fall eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bildender, oder nach gleichen Intervallen fortschreitender Werthe der als unabhängig betrachteten veränderlichen Grösse ist, so dass also diese Formel unmittelbar unter der allgemeinen Formel 17) als ein besonderer Fall enthalten ist und daraus sehr leicht hervorgeht.

§. 7.

Statt nach den Grössen

$$y_1,\ \Delta y_1,\ \Delta^2 y_1,\ \Delta^3 y_1, \ldots \Delta^{n-1} y_1$$

kann man die Formel 21) auch nach den Grössen

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4, \ldots y_n$$

fortschreiten lassen.

Bevor wir aber zur Entwickelung des betreffenden Ausdrucks übergehen können, müssen wir die folgende, auch an sich interessante Betrachtung über die Binomial-Coefficienten anstellen.

Unter der Voraussetzung, dass λ und μ positive ganze Zahlen sind und n eine beliebige Grösse bezeichnet, wollen wir die Reihe

$$(n)_\lambda,\ -(\lambda+1)_1.(n)_{\lambda+1},\ (\lambda+2)_2.(n)_{\lambda+2},\ \ldots,\ (-1)^\mu(\lambda+\mu)_\mu.(n)_{\lambda+\mu}$$

zu summiren suchen, und wollen, indem wir die Summe dieser Reihe durch $f(\lambda, n)$ bezeichnen,

$$22) \ldots\ldots\ldots f(\lambda, n)$$
$$=(n)_\lambda-(\lambda+1)_1.(n)_{\lambda+1}+(\lambda+2)_2.(n)_{\lambda+2}-\ldots+(-1)^\mu(\lambda+\mu)_\mu.(n)_{\lambda+\mu}$$

setzen.

Nach einem allgemein bekannten Satze über die Zerlegung der Binomial-Coefficienten ist:

$$\begin{aligned}
f(\lambda, n)= \quad & (n-1)_{\lambda-1} & +(n-1)_\lambda \\
& -(\lambda+1)_1.(n-1)_\lambda & -(\lambda+1)_1.(n-1)_{\lambda+1} \\
& +(\lambda+2)_2.(n-1)_{\lambda+1} & +(\lambda+2)_2.(n-1)_{\lambda+2} \\
& -(\lambda+3)_3.(n-1)_{\lambda+2} & -(\lambda+3)_3.(n-1)_{\lambda+3} \\
& \text{u. s. w.} & \\
& +(-1)^\mu(\lambda+\mu)_\mu.(n-1)_{\lambda+\mu-1} & +(-1)^\mu(\lambda+\mu)_\mu.(n-1)_{\lambda+\mu}
\end{aligned}$$

aus 20) einführt, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
y = \; & y_1 \\
& + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_1 \{y_2 - (1)_1 . y_1\} \\
& + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_2 \{y_3 - (2)_1 . y_2 + (2)_2 . y_1\} \\
& + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3 \{y_4 - (3)_1 . y_3 + (3)_2 . y_2 - (3)_3 . y_1\}
\end{aligned}
$$

u. s. w.

$$
+ \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1} \{y_n - (n-1)_1 . y_{n-1} + (n-1)_2 . y_{n-2} - \ldots \ldots + (-1)^{n-1} . (n-1)_{n-1} . y_1\},
$$

folglich, wenn man diesen Ausdruck nach

$$y_1,\; y_2,\; y_3,\; y_4, \ldots y_n$$

ordnet:

$$
\begin{aligned}
y = & \left\{1 - (1)_1\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_1 + (2)_2\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_2 - (3)_3\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3 + \ldots \right. \\
& \left. \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)_{n-1}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\right\} y_1 \\
& + \left\{\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_1 - (2)_1 . \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_2 + (3)_2\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3 - \ldots \right. \\
& \left. \ldots + (-1)^{n-2}(n-1)_{n-2}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\right\} y_2 \\
& + \left\{\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_2 - (3)_1\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3 + \ldots + (-1)^{n-3}(n-1)_{n-3}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\right\} y_3 \\
& + \left\{\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3 - \ldots + (-1)^{n-4}(n-1)_{n-4}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\right\} y_4
\end{aligned}
$$

u. s. w.

$$
\begin{aligned}
& + \left\{\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-2} - (n-1)_1\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\right\} y_{n-1} \\
& + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1} y_n;
\end{aligned}
$$

26) . . . . . $f(0, n) = (-1)^{\mu}.(n-1)_{\mu}$.

Nach 25) und 26) ist:

$$f(1, n) = f(0, n-1) + (-1)^{\mu}.(n-1)_1.(n-2)_{\mu}$$
$$= (-1)^{\mu}.(n-2)_{\mu} + (-1)^{\mu}.(n-1)_1.(n-2)_{\mu}$$
$$= (-1)^{\mu}.\{1 + (n-1)_1\}(n-2)_{\mu},$$

also:

27) . . . . . $f(1, n) = (-1)^{\mu}.(n)_1.(n-2)_{\mu}$.

Nach 25) und 27) ist:

$$f(2, n) = f(1, n-1) + (-1)^{\mu}.(n-1)_2.(n-3)_{\mu}$$
$$= (-1)^{\mu}.(n-1)_1.(n-3)_{\mu} + (-1)^{\mu}.(n-1)_2.(n-3)_{\mu}$$
$$= (-1)^{\mu}.\{(n-1)_1 + (n-1)_2\}(n-3)_{\mu},$$

also:

28) . . . . . $f(2, n) = (-1)^{\mu}.(n)_2.(n-3)_{\mu}$.

Nach 25) und 28) ist:

$$f(3, n) = f(2, n-1) + (-1)^{\mu}.(n-1)_3.(n-4)_{\mu}$$
$$= (-1)^{\mu}.(n-1)_2.(n-4)_{\mu} + (-1)^{\mu}.(n-1)_3.(n-4)_{\mu}$$
$$= (-1)^{\mu}.\{(n-1)_2 + (n-1)_3\}(n-4)_{\mu},$$

also:

29) . . . . . $f(3, n) = (-1)_{\mu}.(n)_3.(n-4)_{\mu}$.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist folglich allgemein:

30) . . . . $f(\lambda, n) = (-1)^{\mu}.(n)_{\lambda}.(n-\lambda-1)_{\mu}$,

also:

31) . . . . . . $(-1)^{\mu}.(n)_{\lambda}.(n-\lambda-1)_{\mu}$

$$= (n)_{\lambda} - (\lambda+1)_1.(n)_{\lambda+1} + (\lambda+2)_2.(n)_{\lambda+2} - \ldots + (-1)^{\mu}.(\lambda+\mu)_{\mu}.(n)_{\lambda+\mu}.$$

§. 8.

Wenn man nun in den Ausdruck 21) die Werthe von

$$y_1,\ \Delta y_1,\ \Delta^2 y_1,\ \Delta^3 y_1, \ldots\ \Delta^{n-1} y_1$$

aus 20) einführt, so erhält man:

$$y = y_1$$
$$+\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_1 \{y_2-(1)_1 . y_1\}$$
$$+\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_2 \{y_3-(2)_1 . y_2+(2)_2 . y_1\}$$
$$+\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3 \{y_4-(3)_1 . y_3+(3)_2 . y_2-(3)_3 . y_1\}$$

u. s. w.

$$+\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1} \{y_n-(n-1)_1 . y_{n-1}+(n-1)_2 . y_{n-2}-\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(-1)^{n-1} . (n-1)_{n-1} . y_1\},$$

folglich, wenn man diesen Ausdruck nach

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots . y_n$$

ordnet:

$$y=\left\{1-(1)_1\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_1+(2)_2\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_2-(3)_3\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^{n-1}(n-1)_{n-1}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\right\}y_1$$
$$+\left\{\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_1-(2)_1 . \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_2+(3)_2\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^{n-2}(n-1)_{n-2}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\right\}y_2$$
$$+\left\{\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_2-(3)_1\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3+\ldots+(-1)^{n-3}(n-1)_{n-3}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\right\}y_3$$
$$+\left\{\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3-\ldots+(-1)^{n-4}(n-1)_{n-4}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\right\}y_4$$

u. s. w.

$$+\left\{\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-2}-(n-1)_1\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\right\}y_{n-1}$$
$$+\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}y_n;$$

also nach 31), wenn man nach und nach in dieser Formel

$$\lambda=0,\quad \mu=n-1,\quad n=\frac{x-x_1}{\Delta x_1};$$

$$\lambda=1,\quad \mu=n-2,\quad n=\frac{x-x_1}{\Delta x_1};$$

$$\lambda=2,\quad \mu=n-3,\quad n=\frac{x-x_1}{\Delta x_1};$$

$$\lambda=3,\quad \mu=n-4,\quad n=\frac{x-x_1}{\Delta x_1};$$

u. s. w.

$$\lambda=n-2,\quad \mu=1,\quad n=\frac{x-x_1}{\Delta x_1};$$

$$\lambda=n-1,\quad \mu=0,\quad n=\frac{x-x_1}{\Delta x_1}$$

setzt:

$$32)\quad y=\ (-1)^{n-1}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_0\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-1\right)_{n-1}\cdot y_1$$

$$+(-1)^{n-2}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_1\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-2\right)_{n-2}\cdot y_2$$

$$+(-1)^{n-3}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_2\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-3\right)_{n-3}\cdot y_3$$

$$+(-1)^{n-4}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_3\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-4\right)_{n-4}\cdot y_4$$

u. s. w.

$$+(-1)^1\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-2}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-n+1\right)_1\cdot y_{n-1}$$

$$+(-1)^0\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{n-1}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-n\right)_0\cdot y_n.$$

§. 9.

Die vorstehende Formel kann man aber noch auf eine andere Art ausdrücken.

Zuvörderst ist offenbar:

$$(-1)^{n-1}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_0\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-1\right)_{n-1}$$

$$=(-1)^{n-1}.\frac{(x-x_1-\Delta x_1)(x-x_1-2\Delta x_1)\ldots.(x-x_1-(n-1)\Delta x_1)}{1.2.3\ldots.(n-1)\Delta x_1{}^{n-1}},$$

also, wie solgleich erhellet:

$$(-1)^{n-1}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_0\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-1\right)_{n-1}$$

$$=(-1)^{n-1}.\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots.(x-x_n)}{1.2.3\ldots.(n-1)\Delta x_1{}^{n-1}}.$$

Nun ist aber

$$x_1-x_2=-\Delta x_1,$$

$$x_1-x_3=-2\Delta x_1,$$

$$x_1-x_4=-3\Delta x_1,$$

u. s. w.

$$x_1-x_n=-(n-1)\Delta x_1;$$

also

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\ldots.(x_1-x_n)$$

$$=(-1)^{n-1}.1.2.3\ldots.(n-1)\Delta x_1{}^{n-1},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$(-1)^{n-1}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_0\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-1\right)_{n-1}$$

$$=\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots.(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)\ldots.(x_1-x_n)}.$$

Ein allgemeines Glied der Formel 32) ist:

$$(-1)^{n-\varkappa-1}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_\varkappa\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-\varkappa-1\right)_{n-\varkappa-1}.y_{\varkappa+1}.$$

Nun ist aber:

$$\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_\varkappa\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-\varkappa-1\right)_{n-\varkappa-1}$$

$$=\frac{\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-1\right)\ldots\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-\varkappa+1\right)}{1.2.3\ldots\varkappa}$$

$$\times\frac{\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-\varkappa-1\right)\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-\varkappa-2\right)\ldots\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-n+1\right)}{1.2.3\ldots(n-\varkappa-1)},$$

folglich offenbar:

$$\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_\varkappa\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-\varkappa-1\right)_{n-\varkappa-1}$$

$$=\frac{(x-x_1)(x-x_1-\Delta x_1)\ldots(x-x_1-(\varkappa-1)\Delta x_1)}{1.2.3\ldots\varkappa.\Delta x_1{}^\varkappa}$$

$$\times\frac{(x-x_1-(\varkappa+1)\Delta x_1)(x-x_1-(\varkappa+2)\Delta x_1)\ldots(x-x_1-(n-1)\Delta x_1)}{1.2.3\ldots(n-\varkappa-1).\Delta x_1{}^{n-\varkappa-1}}.$$

Es ist aber:

$$x_2 = x_1+\Delta x_1,$$
$$x_3 = x_1+2\Delta x_1,$$
u. s. w.
$$x_\varkappa = x_1+(\varkappa-1)\Delta x_1,$$
$$x_{\varkappa+2} = x_1+(\varkappa+1)\Delta x_1,$$
$$x_{\varkappa+3} = x_1+(\varkappa+2)\Delta x_1,$$
u. s. w.
$$x_n = x_1+(n-1)\Delta x_1;$$

also:

$$\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_\varkappa\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-\varkappa-1\right)_{n-\varkappa-1}$$

$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\varkappa)(x-x_{\varkappa+2})\ldots(x-x_n)}{1.2.3\ldots\varkappa.1.2.3\ldots(n-\varkappa-1).\Delta x_1{}^{n-1}}.$$

Ferner ist:

$$x_{\varkappa+1}-x_1 \quad = \quad \varkappa\Delta x_1,$$

$$x_{\varkappa+1}-x_2 \quad = \quad (\varkappa-1)\Delta x_1,$$

$$x_{\varkappa+1}-x_3 \quad = \quad (\varkappa-2)\Delta x_1,$$

u. s. w.

$$x_{\varkappa+1}-x_{\varkappa-1}= \quad 2\Delta x_1,$$

$$x_{\varkappa+1}-x_{\varkappa} \quad = \quad \Delta x_1,$$

$$x_{\varkappa+1}-x_{\varkappa+2}=-\Delta x_1,$$

$$x_{\varkappa+1}-x_{\varkappa+3}=-2\Delta x_1,$$

u. s. w.

$$x_{\varkappa+1}-x_n \quad =-(n-\varkappa-1)\Delta x_1;$$

folglich

$$(x_{\varkappa+1}-x_1)(x_{\varkappa+1}-x_2)\ldots.(x_{\varkappa+1}-x_{\varkappa})(x_{\varkappa+1}-x_{\varkappa+2})\ldots.(x_{\varkappa+1}-x_n)$$
$$=(-1)^{n-\varkappa-1}.1.2.3\ldots.\varkappa.1.2.3\ldots.(n-\varkappa-1).\Delta x_1^{n-1},$$

und daher nach dem Obigen offenbar:

$$(-1)^{n-\varkappa-1}.\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}\right)_{\varkappa}\left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1}-\varkappa-1\right)_{n-\varkappa-1}$$

$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{\varkappa})(x-x_{\varkappa+2})\ldots.(x-x_n)}{(x_{\varkappa+1}-x_1)(x_{\varkappa+1}-x_2)\ldots.(x_{\varkappa+1}-x_{\varkappa})(x_{\varkappa+1}-x_{\varkappa+2})\ldots.(x_{\varkappa+1}-x_n)}.$$

Also ist nach 32):

$$33)\quad y=\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots.(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)\ldots.(x_1-x_n)}y_1$$

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots.(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)\ldots.(x_2-x_n)}y_2$$

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)\ldots.(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)\ldots.(x_3-x_n)}y_3$$

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)\ldots.(x-x_n)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)\ldots.(x_4-x_n)}y_4$$

u. s. w.

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots.(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)(x_n-x_4)\ldots.(x_n-x_{n-1})}y_n.$$

Freilich ist diese Formel hier nur unter der Voraussetzung bewiesen worden, dass die Grössen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots . x_n$$

eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden. Man sieht aber derselben auf den ersten Blick an, dass, welche Werthe auch die Grössen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots . x_n$$

haben mögen, in völliger Allgemeinheit, wenn man für x nach und nach die Werthe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots . x_n$$

setzt, die Function y, welche offenbar eine ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades von x ist, respective die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots . y_n$$

erhält, so dass also durch die Formel 33), welche von Lagrange gefunden worden ist, in der That das Interpolationsproblem in grösster Allgemeinheit aufgelöst wird.

§. 10.

In der That bedarf die Formel 33) eigentlich gar keines Beweises, weil der Beweis, um so zu sagen, in ihr selbst liegt. Für den Unterricht kann man indess die Sache zweckmässig auf folgende Art darstellen.

Um eine ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades von x zu finden, welche, wenn man für x die Werthe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots . x_n$$

setzt, respective die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots . y_n$$

erhält, suche man zuerst eine ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades von x, welche, wenn man für x die Werthe

$$x_1, x_2, \ldots, x_{\varkappa-1}, x_{\varkappa+1}, \ldots . x_n$$

setzt, verschwindet, und, wenn man für x den Werth $x_\varkappa$ setzt den Werth $y_\varkappa$ erhält. Eine solche Function bezeichne man durch $u_\varkappa$. Da nach der Voraussetzung die Grössen

$$x_1, x_2, \ldots. x_{\varkappa-1}, x_{\varkappa+1}, \ldots. x_n$$

sämmtlich unter einander ungleich sind, so muss nach einem bekannten Satze von den ganzen rationalen algebraischen Functionen $u_\varkappa$ durch das Product

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{\varkappa-1})(x-x_{\varkappa+1})\ldots.(x-x_n)$$

ohne Rest theilbar sein, so dass also

$$u_\varkappa = K(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{\varkappa-1})(x-x_{\varkappa+1})\ldots.(x-x_n)$$

ist, wo K nur eine Constante sein kann, da $u_\varkappa$ und das Product

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{\varkappa-1})(x-x_{\varkappa+1})\ldots.(x-x_n)$$

beide ganze rationale algebraische Functionen des $(n-1)$sten Grades sind. Um die Constante K zu bestimmen, dient uns die Bedingung, dass, wenn man für x den Werth $x_\varkappa$ setzt, y den Werth $y_\varkappa$ erhalten soll, was uns die Gleichung

$$y_\varkappa = K(x_\varkappa-x_1)(x_\varkappa-x_2)\ldots.(x_\varkappa-x_{\varkappa-1})(x_\varkappa-x_{\varkappa+1})\ldots.(x_\varkappa-x_n),$$

also

$$K=\frac{y_\varkappa}{(x_\varkappa-x_1)(x_\varkappa-x_2)\ldots.(x_\varkappa-x_{\varkappa-1})(x_\varkappa-x_{\varkappa+1})\ldots.(x_\varkappa-x_n)},$$

folglich nach dem Obigen

$$u_\varkappa=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{\varkappa-1})(x-x_{\varkappa+1})\ldots.(x-x_n)}{(x_\varkappa-x_1)(x_\varkappa-x_2)\ldots.(x_\varkappa-x_{\varkappa-1})(x_\varkappa-x_{\varkappa+1})\ldots.(x_\varkappa-x_n)}y_\varkappa$$

giebt.

Hiernach sind also

$$u_1=\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots.(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)\ldots.(x_1-x_n)}y_1,$$

$$u_2=\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots.(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)\ldots.(x_2-x_n)}y_2,$$

$$u_3=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)\ldots.(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)\ldots.(x_3-x_n)}y_3,$$

$$u_4=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)\ldots.(x-x_n)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)\ldots.(x_4-x_n)}y_4,$$

u. s. w.

$$u_n=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots.(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)(x_n-x_4)\ldots.(x_n-x_{n-1})}y_n$$

---

sämmtlich ganze rationale algebraische Functionen des $(n-1)$sten Grades von x, welche verschwinden, wenn man nach der Reihe

$$x = x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \ldots . x_n;$$

$$x = x_1,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \ldots . x_n;$$

$$x = x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_5,\ \ldots . x_n;$$

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_5,\ \ldots . x_n;$$

u. s. w.

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots . x_{n-1}$$

setzt, und welche die Werthe

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots . y_n$$

erhalten, wenn man für x die Werthe

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots . x_n$$

setzt. Also ist offenbar die Summe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots . + u_n$$

eine ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades von x, welche, wenn man für x die Werthe

$$x_1,\ x_2,\ x_3, x_4,\ \ldots . x_n$$

setzt, respective die Werthe

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots . y_n$$

erhält; und bezeichnet man folglich eine solche Function von x überhaupt durch y, so ist

$$y = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots . + u_n,$$

folglich nach dem Obigen:

$$y=\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)\ldots(x_1-x_n)}y_1$$

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)\ldots(x_2-x_n)}y_2$$

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)\ldots(x_3-x_n)}y_3$$

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)\ldots(x-x_n)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)\ldots(x_4-x_n)}y_4$$

u. s. w.

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)(x_n-x_4)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n,$$

welches die schon oben gefundene Formel ist.

Die merkwürdige Formel 17) von Stirling, deren allgemeiner Beweis der Hauptzweck dieser Abhandlung war, scheint mir bei der Ausführung von Interpolationen für nach ungleichen Intervallen fortschreitende Werthe der als unabhängig betrachteten veränderlichen Grösse der obigen Formel von Lagrange vorzuziehen zu sein, und ich möchte daher jene merkwürdige Formel, die bis jetzt wohl wenig Beachtung gefunden hat, der Aufmerksamkeit der Mathematiker empfehlen.

§. 11.

Ich will diese Abhandlung mit einigen allgemeinen Bemerkungen über die Anwendung der im Obigen entwickelten Interpolationsmethode in den Naturwissenschaften schliessen.

Wenn zwischen den Grössen x und y eine gegenseitige Abhängigkeit Statt findet, und y als Function von x betrachtet wird; so nehmen wir nach dem Obigen also an, dass durch Versuche oder Beobachtungen eine Reihe einander entsprechender Werthe von x und y bestimmt worden sei, etwa n an der Zahl, welche wir wieder durch

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots.\ x_n;$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots.\ y_n$$

bezeichnen wollen. Dann lassen sich, wie bekannt, mittelst unserer obigen Methode die Coefficienten

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots.\ A_{n-1}$$

der ganzen rationalen algebraischen Function des $(n-1)$sten Grades von x:

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_{n-1}x^{n-1}$$

so bestimmen, dass diese Function, wenn man in ihr für x die Werthe

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots .\ x_n$$

setzt, respective die Werthe

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots .\ y_n$$

erhält.

Nun aber sind hierbei, wie es mir scheint, eigentlich zwei Fälle zu unterscheiden, die man bisher in der Lehre von der Interpolation nicht gehörig unterschieden hat, so wichtig nach meiner Meinung auch diese Unterscheidung ist.

Erstens kann nämlich das Gesetz der Abhängigkeit der Grössen x und y von einander ein theoretisch demonstrirtes, also a priori bekanntes Naturgesetz sein *). Wenn z. B. x den Sinus der geographischen Breite und y die derselben entsprechende, in einem gewissen Maasse ausgedrückte Länge des einfachen Secunden-Pendels bezeichnet, so lässt sich bekanntlich aus den Gesetzen der allgemeinen Schwere mit geometrischer Evidenz herleiten, dass, wenn A_0 und A_2 zwei gewisse Constanten bezeichnen,

$$y = A_0 + A_2x^2$$

ist, so dass also diese Formel ein theoretisch demonstrirtes, folglich a priori bekanntes Naturgesetz ausdrückt. Hat man nun durch Versuche und Beobachtungen eine Reihe einander entsprechender Werthe von x und y bestimmt, deren Anzahl im vorliegenden Falle jedenfalls grösser als 2 sein muss; sind z. B. **) die Werthe

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6$$

von x die Sinus der geographischen Breiten

38°. 39′. 46″ (Formentera)
44. 36. 45 (Figeac)

*) Ich weiss sehr wohl, dass man diesen Fall bisher gar nicht in den Kreis der Interpolation gezogen hat; verweise aber auf meine folgende Exposition.

**) Biot: Astronomie. Paris. 1810. T. III. Add. p. 164.

44.	50.	25	(Bordeaux)
46.	48.	4	(Clermont)
48.	50.	15	(Paris)
51.	2.	8	(Dunkerque)

und die Werthe

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6$$

von y die entsprechenden, in Metern ausgedrückten Längen des einfachen Secunden-Pendels:

0,7412517
0,7416243
0,7416151
0,7417157
0,7419262
0,7420865;

so wird man nach der im Vorhergehenden entwickelten Methode aus diesen Zahlen die Coefficienten

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5$$

in der Function

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5$$

bestimmen können. Wären nun die obigen Zahlen mit gar keinen Fehlern behaftet, also völlig richtig, so müsste diese Rechnung, weil wir a priori wissen, dass

$$y = A_0 + A_2x^2$$

ist, genau

$$A_1 = 0,\ A_3 = 0,\ A_4 = 0,\ A_5 = 0$$

und für A_0 und A_2 ebenfalls zwei gewisse, völlig genau richtige Werthe geben*). Da aber alle unsere Versuche und Beobach-

*) Um dies näher zu begründen, so klar die Sache auch an sich ist, wollen wir annehmen, dass mittelst des Interpolationsproblems die Coefficienten

$$A_0',\ A_1',\ A_2',\ A_3',\ A_4',\ A_5'$$

so bestimmt worden seien, dass

tungen nothwendig stets mit Fehlern behaftet sind, so wird man nur näherungsweise, und zwar jederzeit mit desto grösserer Genauigkeit, je genauer die Beobachtungen oder Versuche angestellt waren,

---

$$y_1 = A_0' + A_1'x_1 + A_2'x_1^2 + A_3'x_1^3 + A_4'x_1^4 + A_5'x_1^5,$$
$$y_2 = A_0' + A_1'x_2 + A_2'x_2^2 + A_3'x_2^3 + A_4'x_2^4 + A_5'x_2^5,$$
$$y_3 = A_0' + A_1'x_3 + A_2'x_3^2 + A_3'x_3^3 + A_4'x_3^4 + A_5'x_3^5,$$
$$y_4 = A_0' + A_1'x_4 + A_2'x_4^2 + A_3'x_4^3 + A_4'x_4^4 + A_5'x_4^5,$$
$$y_5 = A_0' + A_1'x_5 + A_2'x_5^2 + A_3'x_5^3 + A_4'x_5^4 + A_5'x_5^5,$$
$$y_6 = A_0' + A_1'x_6 + A_2'x_6^2 + A_3'x_6^3 + A_4'x_6^4 + A_5'x_6^5$$

ist. Weil nun aber als a priori bekannt vorausgesetzt wird, dass allgemein

$$y = A_0 + A_2x^2$$

ist, so ist:

$$y_1 = A_0 + A_2x_1^2,$$
$$y_2 = A_0 + A_2x_2^2,$$
$$y_3 = A_0 + A_2x_3^2,$$
$$y_4 = A_0 + A_2x_4^2,$$
$$y_5 = A_0 + A_2x_5^2,$$
$$y_6 = A_0 + A_2x_6^2.$$

Zieht man diese Gleichungen von den obigen ab, so erhält man die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} A_0' - A_0 + A_1'x_1 + (A_2' - A_2)x_1^2 \\ \qquad + A_3'x_1^3 + A_4'x_1^4 + A_5'x_1^5 \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} A_0' - A_0 + A_1'x_2 + (A_2' - A_2)x_2^2 \\ \qquad + A_3'x_2^3 + A_4'x_2^4 + A_5'x_2^5 \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} A_0' - A_0 + A_1'x_3 + (A_2' - A_2)x_3^2 \\ \qquad + A_3'x_3^3 + A_4'x_3^4 + A_5'x_3^5 \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} A_0' - A_0 + A_1'x_4 + (A_2' - A_2)x_4^2 \\ \qquad + A_3'x_4^3 + A_4'x_4^4 + A_5'x_4^5 \end{array}\right\} = 0,$$

$$A_2=0,\quad A_3=0,\quad A_4=0,\quad A_5=0$$

erhalten. Ja man wird das mit grösserer oder geringerer Genauigkeit Erfülltsein der vorstehenden Gleichungen als ein Kriterium der bei der Bestimmung der beiden Constanten A_0 und A_2 mittelst der obigen Methode erreichten Genauigkeit zu betrachten sich berechtigt halten dürfen. Vielleicht würde man selbst geneigt sein, die reciproke Summe der Quadrate der Coefficienten A_1, A_3, A_4, A_5, nämlich den Bruch

$$\frac{1}{A_1^2+A_3^2+A_4^2+A_5^2},$$

als ein Maass der bei der Bestimmung der Constanten A_0 und A_2 erreichten Genauigkeit anzusehen. Alle diese Bemerkungen, die ich übrigens für jetzt nur ohne alles tieferes Eingehen der obigen Abhandlung anreihe, behalten natürlich nur dann ihre volle Gültigkeit, wenn das theoretisch demonstrirte Gesetz der Abhängigkeit der Grösse y von der Grösse x sich durch eine ganze rationale algebraische Function von x mathematisch ausdrücken lässt. Wie man sich aber in anderen Fällen zu verhalten haben würde,

---

$$\left.\begin{array}{l}A_0'-A_0+A_1'x_5+(A_2'-A_2)x_5^2\\ \qquad\qquad +A_3'x_5^3+A_4'x_5^4+A_5'x_5^5\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}A_0'-A_0+A_1'x_6+(A_2'-A_2)x_6^2\\ \qquad\qquad +A_3'x_6^3+A_4'x_6^4+A_5'x_6^5\end{array}\right\}=0;$$

und verschwänden nun die Coefficienten

$$A_0'-A_0,\ A_1',\ A_2'-A_2,\ A_3',\ A_4',\ A_5'$$

nicht sämmtlich, so wäre

$$A_0'-A_0+A_1'x+(A_2'-A_2)x^2+A_3'x^3+A_4'x^4+A_5'x^5$$

eine ganze rationale algebraische Function des fünften Grades von x, welche für die sechs ungleichen Werthe x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 von x verschwände, was nach dem im Archiv. Thl. XXXI. Nr. II. S. 30. unter III. bewiesenen Satze ungereimt ist. Also müssen die obigen Coefficienten sämmtlich verschwinden, oder es muss

$$A_0'=A_0,\quad A_1'=0,\quad A_2'=A_2,\quad A_3'=0,\quad A_4'=0,\quad A_5'=0$$

sein, wie oben behauptet wurde. Dass die Grössen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 sämmtlich unter einander ungleich sind, liegt in der Natur des Interpolationsproblems und versteht sich daher von selbst.

weiss jeder, wer mit der Methode der kleinsten Quadrate bekannt ist, worüber daher hier nichts weiter zu sagen ist.

Zweitens kann das Gesetz der Abhängigkeit der Grösse y von x überhaupt unbekannt sein, welches der gewöhnliche, bisher immer nur allein betrachtete Fall der Anwendung des Interpolationsproblems ist. Dann kann man also nur **hypothetisch** annehmen, dass die Abhängigkeit der Grösse y von x durch die Formel

$$y=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_{n-1}x^{n-1}$$

ausgedrückt werde, und die Coefficienten

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ldots A_{n-1}$$

mittelst unserer obigen Methode bestimmen. Von der Formel, welche man auf diese Weise findet, wird man aber immer nur sagen dürfen, dass durch dieselbe das Gesetz der Abhängigkeit der Grösse y von x, **innerhalb der beiden äussersten Gränzen der angestellten Beobachtungen oder Versuche**, mit desto grösserer Genauigkeit dargestellt werde, je mehr in den beiden Reihen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ldots x_n;$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ldots y_n$$

die Glieder in **stetiger oder continuirlicher Folge** fortschreiten. Mehr wird sich in diesem Falle nie behaupten lassen, wobei ich aber nochmals bemerke, dass ich für jetzt hier nicht die Absicht habe, diesen Gegenstand weitläufiger theoretisch auszuführen, sondern mich mit den obigen allgemeinen Andeutungen vorläufig begnüge.

XVI.

Zur Integration einiger linearen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung.

Von

Herrn Doctor *A. Weiler*,

Lehrer der Mathematik an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.

In dem 28sten Theile dieses Journals S. 271. giebt Herr Professor Wolfers die Entwickelung einiger schon von Euler aufgestellten Integralgleichungen. Dies war Veranlassung, die Integration der entsprechenden linearen Differentialgleichungen noch anders zu versuchen. In dem 30sten Theile S. 292. findet sich eine vollendete Darstellung dieser Integrationen von Herrn Professor Lobatto.

Es lassen sich unzählig viele andere lineare Differentialgleichungen angeben, deren Integrale in ähnlicher Weise wie die so eben erwähnten durch Potential-, Exponential- und logarithmische Funktionen ausgedrückt werden können. Je weniger allgemein derartige Differentialgleichungen sind, desto eher gelingt es, die Integration durch wenig Rechnung zu bewerkstelligen, da man sich dann um so leichter den besonderen Eigenthümlichkeiten der Differentialgleichung anschliesst. Wenn man aber eine grössere Auswahl solcher Integrationen vor sich hat, so findet sich durch die Vergleichung eine gewisse Uebereinstimmung in der Rechnung, und es gelingt alsdann nicht selten, verschiedene Differentialgleichungen in eine allgemeinere zusammenzufassen, deren Lösung nicht mehr Rechnung erfordert, als die eines besonderen Falles. Was die oben erwähnten Differentialgleichungen angeht, so kann man fragen, in welcher Form etwa allgemeinere lineare Differentialgleichungen sich aufstellen liessen, deren Integration

in der bezeichneten Weise sich gestaltet, da es dann überflüssig wäre, noch einmal auf die besonderen Fälle zurückzukommen. Ich glaube, dass man in dieser Absicht mit Vortheil die folgenden drei Formen gebraucht:

$$1. \quad \frac{d^2z}{dy^2}+\frac{by+c}{1}.\frac{dz}{dy}+\frac{fy^2+gy+h}{1}z=0,$$

$$2. \quad \frac{d^2z}{dy^2}+\frac{by+c}{y}.\frac{dz}{dy}+\frac{fy^2+gy+h}{y^2}z=0,$$

$$3. \quad \frac{d^2z}{dy^2}+\frac{by+c}{(y+a)y}.\frac{dz}{dy}+\frac{fy^2+gy+h}{(y+a)^2y^2}z=0.$$

Ich darf mich aber darauf beschränken, das Integrationsverfahren, was hier zum Ziele führt, und die Resultate, wozu man gelangt, nur anzudeuten, da ich dies ausführlicher in dem 51sten Bande des Crelle'schen Journals gegeben habe.

Die angegebenen Differentialgleichungen werden vor Allem in einfachere Formen umgewandelt, indem man anstatt der abhängigen Veränderlichen z sowohl als der unabhängigen Veränderlichen y neue Veränderliche einsetzt, welche als Funktionen der ursprünglichen gedacht werden. Auf diese Weise gelingt es, die Gleichungen 1. und 2. in allen Fällen auf die einfachere:

$$4. \quad y\frac{d^2z}{dy^2}+(y-a-b)\frac{dz}{dy}-az=0,$$

und die Gleichung 3. auf die einfachere:

$$5. \quad (y-1)y\frac{d^2z}{dy^2}+((1-a-b)y+c)\frac{dz}{dy}+abz=0$$

zurückzuführen. Die Gleichungen 4. und 5. liefern besondere Integrale in der Form:

$$z=\int_{v_1}^{v_2} V.(v-y)^p dv,$$

worin V eine bestimmte Funktion von v ist, die Integrationsgrenzen v_1 und v_2 und der Exponent p gegebene Werthe sind. Für die Gleichung 4. findet man:

$$6. \quad z=\int_{v_1}^{v_2} e^{-v}v^b(v-y)^a dv,$$

und die Integrationsgrenzen $v=\pm\infty$, $v=0$ und $v=y$. Für die Gleichung 5. aber ist:

$$7. \quad z = \int_{v_1}^{v_2} (v-1)^{b-c-1} v^{c-a} (v-y)^a dv,$$

und man hat die Integrationsgrenzen $v = \pm \infty$, $v = 0$, $v = 1$, $v = y$.

Die bestimmte Integration lässt sich in unzähligen Fällen mit Hilfe von Potential-, Exponential- und logarithmischen Funktionen durchführen, und auf diesem Wege gelangt man dann zu Integralformen von der verlangten Beschaffenheit. Man erhält Potential- und Exponentialfunktionen, wenn einer von den Exponenten a und b in der Gleichung 6. eine positive oder negative ganze Zahl ist. Die Gleichung 7. liefert eine Potentialfunktion, wenn eine von den vier Grössen a, b, $a-c$, $b-c$ eine positive oder negative ganze Zahl ist. Ausserdem gelangt man da zu zwei verschiedenen Potentialfunktionen, wenn von den nachstehenden sechs Paar Bedingungsgleichungen irgend eines erfüllt ist:

$$c+1 = \pm(a-b) = \frac{i}{2},$$

$$a+b-c = \pm(a-b) = \frac{i}{2},$$

$$a+b-c = \pm(c+1) = \frac{i}{2}.$$

Darin bedeutet der Buchstabe i eine positive oder negative ungerade Zahl. Doch ist eine von diesen zwölf Gleichungen für sich nicht hinreichend, damit ein einziges besonderes Integral der Art bestehe.

Es giebt übrigens auch Fälle, wo man nach vollzogener Transformation sogleich die einfachere Integralform anzugeben im Stande ist, ohne vorher auf jene bestimmten Integrationen einzugehen, deren man sich im allgemeinen Fall zu bedienen hat. Und hierher gehören auch die oben erwähnten, von den Herren Wolfers und Lobatto integrirten Gleichungen. Diejenigen Rechnungen, welche hier zum Behuf der Transformation vorgeschrieben sind, weichen nur wenig ab von den, von Herrn Lobatto gegebenen.

1. Die Gleichung

$$x^2 y'' + y = 0$$

bietet nichts Bemerkenswerthes, da sich zwei besondere Integrale in der Form $y = x^m$ vorfinden.

2. Für die Gleichung

$$x^4y'' + 2x^3y' + f^2y = 0$$

ist die Transformation $x = \frac{1}{z}$ vorgeschrieben. Dies führt auf die neue Gleichung $y'' + f^2y = 0$, welche selbst zwei besondere Integrale in der Form $y = e^{mz}$ liefert.

3. Die Gleichung

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{x^2y}{f^2}$$

ist zu transformiren mittels $y = xz$, und führt so wieder auf die einfachere Gleichung $f^2z'' = z$.

4. Der Gleichung

$$x^2(a-bx)y'' - 2x(2a-bx)y' + 2(3a-bx)y = 6a^2$$

genügt man durch $y = a + bx$. Man setze desshalb $y = v + bx + a$, und man erhält so die neue Gleichung:

$$x^2(a-bx)v'' - 2x(2a-bx)v' + 2(3a-bx)v = 0.$$

Man hat hier weiter zu setzen $v = x^2z$, und man gelangt zu:

$$(a-bx)z'' - 2bz' = 0$$

oder

$$\frac{z''}{z'} = \frac{2b}{a-bx}.$$

Daraus folgt aber

$$z' = \frac{c}{(a-bx)^2}$$

oder auch

$$z = \frac{c}{a-bx} + c_1,$$

wenn c und c_1 willkührliche Beständige sind. Man findet weiter:

$$v = \frac{cx^2}{a-bx} + c_1x^2,$$

oder

$$y = \frac{cx^2}{a-bx} + c_1x^2 + bx + a.$$

XVII.

Ueber den Mantel eines Kugelrumpfs.

Von

Herrn Doctor *Paul Escher*,

Privatdocenten der Mathematik am schweizerischen Polytechnikum zu Zürich.

Aufgabe. **Den Mantel M eines Kugelrumpfs zu berechnen, wenn die Halbmesser a und b der ihn begrenzenden Parallelkreise und die Höhe h des Rumpfs gegeben sind.**

I. Lösung (algebraisch). (Taf. II. Fig. 7.) Denken wir uns den Kugelrumpf zu einem Kugelabschnitt ergänzt, wodurch er als Unterschied zweier Kugelabschnitte erscheint; denken wir uns ferner durch die gemeinschaftliche Axe EF dieser drei Körper eine Ebene (einen grössten Kreis) gelegt, so erhalten wir als Schnitt des Rumpfs eine Figur $ABCD$, die als Unterschied zweier Kreisabschnitte $ABCED$ und CED erscheint, welche beziehungsweise die Schnitte der schon erwähnten Kugelabschnitte bilden. Ziehen wir nun vom Pol E aus die Sehnen EB und EC und bezeichnen die unbekannte Länge des Kugeldurchmessers EH mit x, und die von EG mit y, also die von EF mit $h+y$, so ist nach einem bekannten Satz der Stereometrie

der Mantel des Kugelabschnitts $ABCED$

$$=\pi.EB^2=\pi\{a^2+(h+y)^2\}=\pi\{a^2+h^2+2hy+y^2\},$$

der Mantel des Kugelabschnitts CED

$$=\pi.EC^2=\pi(b^2+y^2);$$

folglich der Mantel des Kugelrumpfs $ABCD$:

$$M = \pi\{a^2 - b^2 + h^2 + 2hy\}. \qquad (I)$$

Zur Bestimmung der Unbekannten y bemerken wir, dass einerseits

$$EB^2 = a^2 + (h+y)^2 \text{ und } EC^2 = b^2 + y^2,$$

andererseits

$$EB^2 = x(h+y) \text{ und } EC^2 = xy$$

ist, woraus folgt:

$$x = \frac{a^2}{h+y} + h + y \text{ und } x = \frac{b^2}{y} + y.$$

Wir erhalten somit:

$$\frac{a^2}{h+y} + h = \frac{b^2}{y},$$

$$a^2y + h^2y + hy^2 = b^2h + b^2y,$$

$$hy^2 + (a^2 - b^2 + h^2)y = b^2h.$$

Der eine Wurzelwerth letzterer Gleichung, nämlich

$$y = \frac{-(a^2 - b^2 + h^2) + \sqrt{(a^2 - b^2 + h^2)^2 + 4b^2h^2}}{2h}$$

liefert die durch y vertretene Länge der Linie EG. Substituiren wir diesen Werth von y in die Gleichung (I), so finden wir:

$$\begin{aligned} M &= \pi.\sqrt{(a^2 - b^2 + h^2)^2 + 4b^2h^2} \\ &= \pi.\sqrt{(a^4 + b^4 + h^4 - 2a^2b^2 + 2a^2h^2 - 2b^2h^2) + 4b^2h^2} \\ &= \pi.\sqrt{(a^4 + b^4 + h^4 + 2a^2b^2 + 2a^2h^2 + 2b^2h^2) - 4a^2b^2} \\ &= \pi.\sqrt{(a^2 + b^2 + h^2)^2 - (2ab)^2} \\ &= \pi.\sqrt{(a^2 + b^2 + h^2 + 2ab)(a^2 + b^2 + h^2 - 2ab)} \\ &= \pi.\sqrt{\{(a+b)^2 + h^2\}\{(a-b)^2 + h^2\}}. \end{aligned}$$

II. Lösung (algebraisch). Unter der Voraussetzung, dass in keinem Fall der Halbmesser b grösser als a, möge wiederum $ABCD$ (Taf. II. Fig. 8. und Fig. 9.) den Schnitt des Kugelrumpfs vorstellen, den wir erhalten, indem wir durch die Axe FG des Rumpfs eine Ebene legen. Ziehen wir nun vom Mittelpunkt O der Kugel aus die Halbmesser OA und OD, und bezeichnen wir die unbekannte Länge des Kugelhalbmessers mit r, so ist, weil

(1) $OG^2 = OD^2 - DG^2$ und $OF^2 = OA^2 - AF^2$,

$$OG = \pm\sqrt{z^2 - b^2} \text{ und } OF = \pm\sqrt{z^2 - a^2}$$

und, da ferner $OG \mp OF = \pm h$ ist,

$$\sqrt{z^2 - b^2} \mp \sqrt{z^2 - a^2} = h.$$

Quadriren wir beide Seiten dieser Gleichung, so erhalten wir

$$z^2 - b^2 + z^2 - a^2 \mp 2\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} = h^2$$

oder

$$\mp 2\sqrt{z^4 - a^2z^2 - b^2z^2 + a^2b^2} = (a^2 + b^2 + h^2) - 2z^2.$$

Indem wir nun auch die Seiten letzterer Gleichung quadriren, bekommen wir

$$4z^4 - 4a^2z^2 - 4b^2z^2 + 4a^2b^2 = (a^2 + b^2 + h^2)^2 - 4(a^2 + b^2 + h^2)z^2 + 4z^4,$$

woraus folgt:

$$4h^2z^2 = (a^2 + b^2 + h^2)^2 - 4a^2b^2$$

oder

$$(2hz)^2 = (a^2 + b^2 + h^2)^2 - (2ab)^2$$

$$= \{a^2 + b^2 + h^2 + 2ab\}.\{a^2 + b^2 + h^2 - 2ab\}$$

$$= \{(a + b)^2 + h^2\}.\{(a - b)^2 + h^2\}.$$

Wir finden somit

$$2hz = \sqrt{\{(a + b)^2 + h^2\}.\{(a - b)^2 + h^2\}},$$

und, indem wir diesen Werth von $2hz$ in die Gleichung

$$M = 2\pi hz$$

substituiren,

$$M = \pi\sqrt{\{(a + b)^2 + h^2\}\{(a - b)^2 + h^2\}}.$$

Zusatz zu den beiden ersten Lösungen. Ist $a = b$, so geht die Gleichung

$$M = \pi\sqrt{\{(a + b)^2 + h^2\}.\{(a - b)^2 + h^2\}}$$

über in

$$M = \pi h.\sqrt{4a^2 + h^2}.$$

III. Lösung (geometrisch). Nehmen wir zunächst an, dass $b < a$, dass also der Parallelkreis mit dem Halbmesser b weiter

vom Mittelpunkt O der Kugel entfernt liegt als der Parallelkreis mit dem Halbmesser s; setzen wir ferner voraus, dass die Figur $ABCD$ (Taf. II. Fig. 7. und Fig. 8.) den mittelst einer seiner Meridianebenen hervorgebrachten Schnitt des Rumpfs vorstellt, und ziehen wir nun den Durchmesser CH, sodann die Geraden AH, AC und BC, und schliesslich CJ senkrecht zu AB, so erhalten wir zwei einander ähnliche Dreiecke ACH und BCJ. Es verhält sich somit

$$CH:AC = BC:CJ,$$

woraus

$$AC.BC = CH.CJ$$

und

$$\pi.AC.BC = \pi.CH.CJ.$$

$\pi.CH.CJ$ stellt aber den Inhalt vom Mantel eines Cylinders vor, dessen Grundfläche den Kugeldurchmesser CH zum Durchmesser besitzt und dessen Höhe gleich der Rumpfhöhe CJ ist. Nach einem bekannten Satze der Stereometrie ist also der Mantel des Kugelrumpfs $M = \pi.CH.CJ$, und somit auch

$$M = \pi.AC.BC.$$

Bedenken wir hernach, dass die Längen von

$$CJ, \; AJ \text{ und } BJ$$

beziehungsweise durch

$$h, \; a+b \text{ und } a-b,$$

somit die Längen von

$$AC \quad \text{und} \quad BC$$

beziehungsweise durch

$$\sqrt{(a+b)^2+h^2} \text{ und } \sqrt{(a-b)^2+h^2}$$

vorgestellt sind, so finden wir (wie in den beiden vorigen Lösungen), dass

$$M = \pi\sqrt{\{(a+b)^2+h^2\}\{(a-b)^2+h^2\}}$$

ist.

In dem besondern Falle, als $a=b$ ist, also die unsern Kugelrumpf begrenzenden Parallelkreise gleichweit vom Kugelmittelpunkt entfernt liegen, bildet die Gerade AC einen Kugeldurchmesser, während die Gerade BC senkrecht auf AB steht und somit gleich der Höhe des Kugelrumpfs ist. Der vorhin erwähnte

Satz — wornach unter der Voraussetzung, dass $b < a$, der Mantel des Rumpfs gleich $\pi . AC . BC$ ist — bleibt also auch noch für den Fall, als $b = a$ ist, richtig. In letzterem Falle sind sodann die Längen von

BC und AC

beziehungsweise durch

$$h \text{ und } \sqrt{4a^2 + h^2}$$

vorgestellt, so dass wir also für den Mantel des Rumpfs die (bereits in dem vorangegangenen Zusatz citirte) Formel

$$M = \pi h . \sqrt{4a^2 + h^2}$$

erhalten.

Erster Zusatz zur dritten Lösung. Die dritte Lösung birgt die Erweisung eines Lehrsatzes, welcher ebensowohl unserer Aufgabe hätte vorangestellt werden können und folgendermassen sich aussprechen lässt:

Legen wir durch die Axe eines Kugelrumpfs eine Ebene, wodurch wir als Schnitt des Rumpfs eine von zwei parallelen Geraden und von zwei Bögen eines grössten Kreises begrenzte Figur erhalten; ziehen wir ferner an die Endpunkte der einen dieser Parallelen von einem Endpunkt der andern aus zwei gerade Linien, so ist der Mantel des Kugelrumpfs gleich dem Flächeninhalt einer Ellipse, welche letztere Verbindungslinien zu Halbaxen hat, oder gleich dem Mantel eines Cylinders, dessen Grundfläche die eine dieser Verbindungslinien zum Durchmesser besitzt und dessen Höhe gleich der anderen Verbindungslinie ist.

Zweiter Zusatz zur dritten Lösung. Lassen wir den Parallelkreis mit dem Halbmesser b (Taf. II. Fig. 7.) parallel seiner ursprünglichen Lage dem Pol E näher kommen, bis er schliesslich mit demselben zusammenfällt, so werden die Punkte C und D auf Punkt E zu liegen kommen und die Geraden AC und BC in die einander gleichen Geraden AE und BE übergehen. Statt des Rumpfs werden wir sodann den Kugelabschnitt $ABCED$ und statt einer Ellipse mit den Halbaxen AC und BC einen Kreis mit dem Halbmesser BE erhalten, und somit auf einen bekannten (den schon Eingangs der ersten Lösung citirten) Satz stossen, wornach der Mantel des Kugelabschnitts $ABCED$ gleich einem Kreis mit dem Halbmesser BE (gleich $\pi . BE^2$) ist.

Erster Zusatz zu allen drei Lösungen. Da man einen Kugelabschnitt, dessen Grundfläche den Halbmesser a besitzt, als einen Kugelrumpf betrachten kann, dessen Grundflächen die Halbmesser a und 0 haben, so muss sich die Formel für den Mantel des Kugelabschnitts aus der für den Mantel des Kugelrumpfs aufgestellten

$$M=\pi\sqrt{\{(a+b)^2+h^2\}.\{(a-b)^2+h^2\}}$$

ableiten lassen, indem wir in letzterer $b=0$ setzen. In der That geht dieselbe alsdann über in:

$$M=\pi(a^2+h^2).$$

Zweiter Zusatz zu allen drei Lösungen. Ist bei unserem Kugelrumpf der Parallelkreis mit dem Halbmesser a ein grösster Kreis, also a Halbmesser der ganzen Kugel, so existirt die Relation

$$b^2+h^2=a^2 \text{ oder } h=\sqrt{a^2-b^2},$$

und die Formel für den Mantel des Kugelrumpfs

$$M=\pi.\sqrt{\{(a+b)^2+h^2\}\{(a-b)^2+h^2\}}$$

geht über in

$$\begin{aligned}M&=\pi.\sqrt{(a^2+2ab+b^2+h^2).(a^2-2ab+b^2+h^2)}\\&=\pi.\sqrt{(2a^2+2ab)(2a^2-2ab)}\\&=2a\pi.\sqrt{(a+b).(a-b)}\\&=2a\pi.\sqrt{a^2-b^2}\\&=2\pi ah,\end{aligned}$$

wie es auch nach einem bekannten Satze der Stereometrie sein muss.

Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir, zu bemerken, dass in meinem dem Archiv*) vor vier Jahren einverleibten Aufsatz das dort vorkommende „Grenzgesetz für die Gleichheit der Differenz-Differenzen trigonometrischer Logarithmen" nicht richtig ist, sondern einer Correction bedarf, wovon ich mich, kurz nachdem jener Aufsatz die Presse verlassen, überzeugt habe.

*) Theil XXIII. Nr. III. Ich ersuche Herrn Escher, die Correction einzusenden. G.

XVIII.

Ueber das grösste Tetraeder, welches sich einem Ellipsoid einschreiben lässt.

Von
Herrn *Simon Spitzer*,
Professor an der Handels-Akademie zu Wien.

Seien

$$xyz, \quad x_1y_1z_1, \quad x_2y_2z_2, \quad x_3y_3z_3$$

die Coordinaten von vier auf einer Kugel vom Radius r liegenden Punkte, so ist der Körperinhalt des von diesen vier Punkten gebildeten Tetraeders:

$$(1) \qquad P = \pm\tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

(siehe die schöne Arbeit von **Joachimsthal** im 40. Bande von **Crelle's Journal**), und wenn

$$x_1y_1z_1, \quad x_2y_2z_2, \quad x_3y_3z_3$$

die Coordinaten der Eckpunkte der Grundfläche sind, so ist, falls diese gegeben sind, der Punkt x, y, z leicht zu finden, welcher, als Spitze des Tetraeders betrachtet, mit denselben das grösste Tetraeder bestimmt. Es liegt nämlich dieser Punkt in der Senkrechten, die über dem Mittelpunkte der Kreisebene geführt ist, welche durch $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$ geht. — Sind $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten eines nächst xyz auf der Kugel gelegenen Punktes, so hat man für das durch die vier Punkte

$$\xi\eta\zeta, \quad x_1y_1z_1, \quad x_2y_2z_2, \quad x_3y_3z_3$$

gehende Tetraeder:

$$(2)\qquad P_1=\pm\tfrac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & \xi & \eta & \zeta\\ 1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

und es ist offenbar

$$(3)\qquad P_1 > P.$$

Denkt man sich nun unter a, b, c beliebige positive Zahlen, so ist *):

$$P=\pm\frac{abc}{6r^3}\begin{vmatrix}1 & \frac{rx}{a} & \frac{ry}{b} & \frac{rz}{c}\\ 1 & \frac{rx_1}{a} & \frac{ry_1}{b} & \frac{rz_1}{c}\\ 1 & \frac{rx_2}{a} & \frac{ry_2}{b} & \frac{rz_2}{c}\\ 1 & \frac{rx_3}{a} & \frac{ry_3}{b} & \frac{rz_3}{c}\end{vmatrix}$$

ferner:

$$P_1=\pm\frac{abc}{6r^3}\begin{vmatrix}1 & \frac{r\xi}{a} & \frac{r\eta}{b} & \frac{r\zeta}{c}\\ 1 & \frac{rx_1}{a} & \frac{ry_1}{b} & \frac{rz_1}{c}\\ 1 & \frac{rx_2}{a} & \frac{ry_2}{b} & \frac{rz_2}{c}\\ 1 & \frac{rx_3}{a} & \frac{ry_3}{b} & \frac{rz_3}{c}\end{vmatrix}$$

und somit vermöge (3):

$$(4)\qquad \begin{vmatrix}1 & \frac{rx}{a} & \frac{ry}{b} & \frac{rz}{c}\\ 1 & \frac{rx_1}{a} & \frac{ry_1}{b} & \frac{rz_1}{c}\\ 1 & \frac{rx_2}{a} & \frac{ry_2}{b} & \frac{rz_2}{c}\\ 1 & \frac{rx_3}{a} & \frac{ry_3}{b} & \frac{rz_3}{c}\end{vmatrix} > \begin{vmatrix}1 & \frac{r\xi}{a} & \frac{r\eta}{b} & \frac{r\zeta}{c}\\ 1 & \frac{rx_1}{a} & \frac{ry_1}{b} & \frac{rz_1}{c}\\ 1 & \frac{rx_2}{a} & \frac{ry_2}{b} & \frac{rz_2}{c}\\ 1 & \frac{rx_3}{a} & \frac{ry_3}{b} & \frac{rz_3}{c}\end{vmatrix}$$

*) Man sehe: Theorie der Determinanten von Baltzer §. 3., 2.

Verwandelt man nun die Coordinaten

$$xyz;\ x_1y_1z_1;\ x_2y_2z_2;\ x_3y_3z_3;\ \xi\eta\zeta$$

der Reihe nach in

$$\frac{rx}{a},\ \frac{ry}{b},\ \frac{rz}{c};\quad \frac{rx_1}{a},\ \frac{ry_1}{b},\ \frac{rz_1}{c};\quad \frac{rx_2}{a},\ \frac{ry_2}{b},\ \frac{rz_2}{c};\quad \frac{rx_3}{a},\ \frac{ry_3}{b},\ \frac{rz_3}{c};$$

$$\frac{r\xi}{a},\ \frac{r\eta}{b},\ \frac{r\zeta}{c};$$

ebenso die laufenden Coordinaten der Kugel, welche

$$X,\ Y,\ Z$$

heissen mögen, in

$$\frac{rX}{a},\ \frac{rY}{b},\ \frac{rZ}{c};$$

so geht die Kugel vom Halbmesser r in ein Ellipsoid über, das die Halbaxen a, b, c hat; die Punkte, welche früher auf der Oberfläche der Kugel sich befanden, werden nun auf der Oberfläche des Ellipsoids sich befinden; und die Relation (4) drückt aus, dass das Tetraeder, welches die Coordinaten

$$\frac{rx}{a},\ \frac{ry}{b},\ \frac{rz}{c};\quad \frac{rx_1}{a},\ \frac{ry_1}{b},\ \frac{rz_1}{c};\quad \frac{rx_2}{a},\ \frac{ry_2}{b},\ \frac{rz_2}{c};\quad \frac{rx_3}{a},\ \frac{ry_3}{b},\ \frac{rz_3}{c}$$

hat, das grösste Tetraeder ist, welches sich über den Punkten

$$\frac{rx_1}{a},\ \frac{ry_1}{b},\ \frac{rz_1}{c};\quad \frac{rx_2}{a},\ \frac{ry_2}{b},\ \frac{rz_2}{c};\quad \frac{rx_3}{a},\ \frac{ry_3}{b},\ \frac{rz_3}{c}$$

auf dem Ellipsoide construiren lässt.

Sind demnach drei Punkte

$$\frac{rx_1}{a},\ \frac{ry_1}{b},\ \frac{rz_1}{c};\quad \frac{rx_2}{a},\ \frac{ry_2}{b},\ \frac{rz_2}{c};\quad \frac{rx_3}{a},\ \frac{ry_3}{b},\ \frac{rz_3}{c}$$

eines Ellipsoids, das die Halbaxen a, b, c hat, gegeben, so multiplicire man die Coordinaten dieser drei Punkte respective mit

$$\frac{a}{r},\ \frac{b}{r},\ \frac{c}{r};$$

man erhält dann die Coordinaten dreier Punkte, welche als der Oberfläche einer Kugel vom Radius r angehörend betrachtet werden können. Sucht man nun in der Kugel zu diesen drei Punkten den vierten Punkt, welcher, als Spitze eines Tetraeders betrachtet, das grösste Tetraeder bestimmt, so geben die Coordinaten dieses so gefundenen Punktes, respective durch

$$\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$$

dividirt, die Coordinaten des Punktes, welcher mit den drei gegebenen Punkten das grösste Tetraeder auf dem Ellipsoide bestimmt.

An das eben Bewiesene lässt sich Folgendes anschliessen:

Wird einer Kugel vom Halbmesser r ein regelmässiges Polyeder von n Ecken eingeschrieben (n kann mithin nur einen der folgenden fünf Werthe haben: 4, 6, 8, 12, 20), alsdann sämmtliche Coordinaten x, y, z, die laufenden der Kugel nämlich und die Coordinaten der Eckpunkte des Polyeders *), mit

$$\frac{r}{a}, \frac{r}{b}, \frac{r}{c}$$

multiplicirt, so entsteht aus der Kugel ein Ellipsoid, dessen Halbaxen a, b, c sind, und aus dem regelmässigen Polyeder entsteht ein unregelmässiges. Aber so wie das regelmässige Polyeder das grösste seiner Art ist (ich meine hiermit, dass das regelmässige Tetraeder das grösste Tetraeder ist, ferner der Würfel das grösste Parallelepiped u. s. w., das sich der Kugel einschreiben lässt), so ist auch das unregelmässige, dem Ellipsoide eingeschriebene Polyeder das grösste seiner Art, das sich dem Ellipsoid einschreiben lässt. Da ferner die Richtung der durch den Mittelpunkt der Kugel geführten orthogonalen Axen beliebig gewählt werden und für jede beliebig gewählte Richtung obige Construction durchgeführt werden kann, so gibt es unendlich viele grösste Polyeder von bestimmter Art, die sich dem Ellipsoide einschreiben lassen, — aber alle diese sind von derselben Grösse. Nennt man den Körperinhalt des regelmässigen, der Kugel eingeschriebenen Polyeders R, den Körperinhalt des unregelmässigen, dem Ellipsoide eingeschriebenen Polyeders U, so ist:

$$R = \frac{abc}{r^3} U.$$

Es lassen sich noch eine Reihe von Sätzen anführen, deren analoge, auf die ebenen Figuren bezüglichen, von Herrn Professor Grunert in seinen sehr interessanten, diesen Gegenstand betreffenden Mittheilungen veröffentlicht wurden.

---

*) Ich setze ein rechtwinkliches Coordinatensystem voraus, das seinen Ursprung im Mittelpunkte der Kugel hat.

XIX.

Ueber die Bestimmung der vier gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte.

Von

Herrn Dr. Carl Spitz,

Lehrer am Polytechnikum zu Carlsruhe.

I. Geometrische Veranschaulichung der Möglichkeit, die Aufgabe: die vier Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte zu bestimmen, auf die Auflösung einer cubischen Gleichung zurückzuführen.

§. 1.

Es seien, mit Zugrundelegung von Punktcoordinaten, A_1, A_2, A_3, A_4 (Taf. II. Fig. 10.) die vier Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte, so geht einfach aus der Betrachtung der Figur hervor, dass zu der Schaar jener Kegelschnitte auch folgende drei geradlinige gehören:

1) A_1A_2 und A_3A_4,
2) A_1A_4 ,, A_2A_3,
3) A_1A_3 ,, A_2A_4.

Sind nun

$$U=0 \text{ und } U'=0$$

die Gleichungen der zwei Kegelschnitte, so ist die ganze Schaar derselben enthalten in der Gleichung

$$U+\mu U'=0,$$

wenn man dem unbestimmten Coefficienten μ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegt.

Da jeder Kegelschnitt der Schaar durch den Werth von μ absolut bestimmt ist, und nach Obigem darunter *nur drei geradlinige* Kegelschnitte enthalten sind, so muss die Auffindung dieser letzteren, d. h. der entsprechenden Werthe von μ, offenbar von einer *cubischen Gleichung* abhängen.

Bezeichnen wir nun durch μ_1, μ_2, μ_3 die Wurzeln dieser Gleichung, so sind

$$U + \mu_1 U' = 0,$$
$$U + \mu_2 U' = 0,$$
$$U + \mu_3 U' = 0$$

die Gleichungen jener geradlinigen Kegelschnitte.

Zerlegt man jede derselben in zwei lineare Factoren, so erhält man die Gleichungen der oben angeführten Linienpaare 1, 2 und 3.

Um nun die Durchschnittspunkte der vorgelegten zwei Kegelschnitte

$$U = 0 \text{ und } U' = 0$$

zu finden, kann man entweder eines der erwähnten drei Linienpaare mit der Gleichung eines jener Kegelschnitte combiniren und findet dann dieselben durch Auflösung zweier quadratischen Gleichungen; oder aber man kann zwei jener Liniensysteme mit einander verbinden und findet nun die Durchschnitte durch Auflösung von vier linearen Gleichungen.

In dem ersten Falle hat man nur *eine* der drei Wurzeln der Gleichung in μ, also etwa die *reelle*, zu bestimmen nöthig, in dem letzteren dagegen ist eine vollständige Auflösung jener Gleichung, d. h. die Bestimmung von wenigstens zwei der Wurzeln, erforderlich.

Die Bestimmung der vier Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte kommt also stets auf die Auflösung einer *cubischen* Gleichung hinaus. Berücksichtigt man noch, dass sich die Wurzeln der biquadratischen Gleichungen mit Hilfe zweier Kegelschnitte geometrisch darstellen lassen, so ersieht man, dass in vorstehender Entwickelung zugleich die Darlegung der Möglichkeit der Reduction einer *biquadratischen* Gleichung auf eine cubische enthalten ist.

II. Entwicklung der Ausdrücke für die Coordinaten der Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte.

§. 2.

Mit Zugrundelegung eines beliebigen rechtwinkligen oder schiefwinkligen Punktcoordinatensystems seien

$$U = Ay^2 + 2Byx + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0,$$
$$U' = A'y^2 + 2B'yx + C'x^2 + 2D'y + 2E'x + F' = 0$$

die Gleichungen zweier Kegelschnitte, so ist in der Gleichung

$$U + \mu U' = 0$$

die ganze Schaar der Kegelschnitte enthalten, wenn μ wieder einen unbestimmten Coefficienten bezeichnet, der alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann, und wir haben nun zunächst den Coefficienten μ_0 so zu bestimmen, dass

$$U + \mu_0 U' = 0$$

einen geradlinigen Kegelschnitt, d. h. das System zweier Geraden darstellt.

Setzen wir der Kürze halber

$$A + \mu_0 A' = A_0,$$
$$B + \mu_0 B' = B_0,$$
$$C + \mu_0 C' = C_0,$$
u. s. w.,

so geht jene Gleichung über in

$$U_0 = A_0 y^2 + 2B_0 yx + C_0 x^2 + 2D_0 y + 2E_0 x + F_0 = 0, \quad (1)$$

oder wenn man zur weiteren Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l} B_0^2 - A_0 C_0 = p_0, \\ B_0 D_0 - A_0 E_0 = q_0, \\ D_0^2 - A_0 F_0 = r_0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

setzt, in

$$A_0 U_0 = (A_0 y + B_0 x + D_0)^2 - (p_0 x^2 + 2q_0 x + r_0) = 0,$$

welcher Gleichung man auch die Form geben kann:

$$A_0 p_0 U_0 = p_0 (A_0 y + B_0 x + D_0)^2 - (p_0 x + q_0)^2 + q_0^2 - p_0 r_0 = 0.$$

Da aber

$$U_0 = 0$$

das System zweier Geraden darstellen soll, so muss offenbar die Beziehung stattfinden:

$$q_0^2 - p_0 r_0 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Vermöge der Gleichungen (2) sind nun p_0, q_0, r_0 in Bezug auf μ_0 vom zweiten Grade, und es scheint somit die Gleichung (3) in Bezug auf μ_0 vom vierten Grade zu sein. Nach Weglassung des in ihr enthaltenen Factors A_0 nimmt dieselbe aber die Form an:

$$C_0 D_0^2 - 2B_0 D_0 E_0 + F_0 B_0^2 + A_0 E_0^2 - A_0 C_0 F_0 = 0, \quad (4)$$

und ist nun in Bezug auf μ_0 vom dritten Grade, weil vermöge der früheren Bezeichnungen A_0, B_0, C_0.... in Bezug auf μ_0 vom ersten Grade sind.

Berücksichtigen wir jetzt die Relation (3), so stellen sich die geradlinigen Kegelschnitte dar unter der Form:

$$p_0(A_0 y + B_0 x + D_0)^2 - (p_0 x + q_0)^2 = 0$$

oder

$$-[(A_0 y + B_0 x + D_0)\sqrt{p_0}]^2 + (p_0 x + q_0)^2 = 0.$$

§. 3.

Um die folgende Untersuchung nicht durch Einzelbetrachtungen zu zersplittern, sollen unter

$$a, \quad b, \quad c$$

entweder $+1$ oder -1 zu verstehen sein. Die Gleichungen der zwei Linien, welche einem beliebigen der zwei geradlinigen Kegelschnitte entsprechen, sind alsdann enthalten in der Gleichung,

$$a(A_0 y + B_0 x + D_0)\sqrt{p_0} + p_0 x + q_0 = 0.$$

Damit wir aber in der Folge niemals wegen der Zweideutigkeit des Ausdruckes $\sqrt{p_0}$ in Verlegenheit kommen, wählen wir für $\sqrt{p_0}$, mag dieser Ausdruck reell oder imaginär sein, einen beliebigen der zwei ihm zukommenden Werthe, welcher aber alsdann während der ganzen Untersuchung beizubehalten ist. Bezeichnen wir diesen Werth durch $\mathfrak{P}_0$, so stellt nun die Gleichung

$$a(A_0 y + B_0 x + D_0)\mathfrak{P}_0 + (p_0 x + q_0) = 0$$

die zwei Geraden eines der drei geradlinigen Kegelschnitte dar. Ordnen wir dieselbe nach y und x, so nimmt sie folgende Form an:

$$aA_0\mathfrak{P}_0 y + (p_0 + aB_0\mathfrak{P}_0)x + q_0 + aD_0\mathfrak{P}_0 = 0.$$

Bedeuten nun μ_1, μ_2, μ_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad U + \mu_0 U' = 0,$$

und setzen wir dem Obigen analog:

$$A + \mu_1 A' = A_1, \qquad B + \mu_1 B' = B_1,$$
$$A + \mu_2 A' = A_2, \qquad B + \mu_2 B' = B_2,$$
$$(4) \quad A + \mu_3 A' = A_3; \qquad B + \mu_3 B' = B_3;$$

$$D + \mu_1 D' = D_1,$$
$$D + \mu_2 D' = D_2,$$
$$D + \mu_3 D' = D_3;$$

ferner

$$\sqrt{p_1} = \mathfrak{P}_1, \quad \sqrt{p_2} = \mathfrak{P}_2, \quad \sqrt{p_3} = \mathfrak{P}_3,$$

wo p_1, p_2, p_3 analogen Ausdrücken entsprechen wie oben p_0, und auf $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ das oben über $\mathfrak{P}_0$ Ausgesagte in entsprechender Weise überzutragen ist; so sind, nach Einführung der Abkürzungen q_1, q_2, q_3 beziehungsweise für Ausdrücke, welche dem Ausdrucke, der q_0 entspricht, analog sind, die sechs Geraden der drei geradlinigen Kegelschnitte enthalten in den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} aA_1\mathfrak{P}_1 y + (p_1 + aB_1\mathfrak{P}_1)x + q_1 + aD_1\mathfrak{P}_1 = 0, \\ bA_2\mathfrak{P}_2 y + (p_2 + bB_2\mathfrak{P}_2)x + q_2 + bD_2\mathfrak{P}_2 = 0, \\ cA_3\mathfrak{P}_3 y + (p_3 + cB_3\mathfrak{P}_3)x + q_3 + cD_3\mathfrak{P}_3 = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots (5)$$

§. 4.

Um elegante Ausdrücke für die Coordinaten der vier Durchschnittspunkte der zwei Kegelschnitte zu erhalten, wollen wir dieselben als Durchschnitte zweier der geradlinigen Kegelschnitte bestimmen. Da nun aber durch jeden der vier Durchschnittspunkte drei Gerade der Gleichungen (5) gehen, so wird es zunächst auf die Beantwortung der Frage ankommen: „Wie muss man a, b, c annehmen, damit diese Geraden durch einen und denselben Punkt gehen.“

Setzen wir zur Abkürzung

$$aA_1\mathfrak{P}_1 = a_1, \qquad p_1 + aB_1\mathfrak{P}_1 = b_1,$$
$$bA_2\mathfrak{P}_2 = a_2, \qquad p_2 + bB_2\mathfrak{P}_2 = b_2,$$
$$cA_3\mathfrak{P}_3 = a_3; \qquad p_3 + cB_3\mathfrak{P}_3 = b_3;$$

$$q_1 + aD_1\mathfrak{P}_1 = d_1,$$
$$q_2 + bD_2\mathfrak{P}_2 = d_2,$$
$$q_3 + cD_3\mathfrak{P}_3 = d_3;$$

so gehen die Gleichungen (5) über in:

$$a_1y + b_1x + d_1 = 0,$$
$$a_2y + b_2x + d_2 = 0,$$
$$a_3y + b_3x + d_3 = 0.$$

Sollen diese drei Gerade durch einen und denselben Punkt gehen, so müssen, wenn man vorstehende Gleichungen der Reihe nach mit 1, α, β multiplicirt und die Resultate addirt, sich α und β so bestimmen lassen, dass das Resultat identisch Null wird. Führen wir die angedeutete Operation aus, so gelangen wir zu folgenden Gleichungen:

$$a_1 + \alpha a_2 + \beta a_3 = 0,$$
$$b_1 + \alpha b_2 + \beta b_3 = 0,$$
$$d_1 + \alpha d_2 + \beta d_3 = 0.$$

Bestimmen wir nun aus zwei dieser Gleichungen α und β und führen die betreffenden Werthe in die dritte Gleichung ein, so erhalten wir die Bedingungsgleichung

$$d_1 + \frac{a_3b_1 - a_1b_3}{a_2b_3 - a_3b_2}d_2 + \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2b_3 - a_3b_2}d_3 = 0$$

oder

$$a_1(b_2d_3 - b_3d_2) + a_2(b_3d_1 - b_1d_3) + a_3(b_1d_2 - b_2d_1) = 0. \quad (6)$$

Substituiren wir jetzt in die Ausdrücke

$$b_2d_3 - b_3d_2, \quad b_3d_1 - b_1d_3, \quad b_1d_2 - b_2d_1$$

für b_1, b_2, b_3; d_1, d_2, d_3 die betreffenden Werthe, so geht unter Berücksichtigung, dass nach unserer früheren Bezeichnung

$$B_2D_3 - B_3D_2 = (\mu_3 - \mu_2)(BD' - B'D),$$
$$B_3D_1 - B_1D_3 = (\mu_1 - \mu_3)(BD' - B'D),$$
$$B_1D_2 - B_2D_1 = (\mu_2 - \mu_1)(BD' - B'D)$$

und nach Einführung der betreffenden Werthe von a_1, a_2, a_3 die Gleichung (6) über in:

$$A_1 a \mathfrak{P}_1 [p_2 q_3 - p_3 q_2 + c(D_3 p_2 - B_3 q_2)\mathfrak{P}_3 + b(B_2 q_3 - D_2 p_3)\mathfrak{P}_2 + bc(\mu_3 - \mu_2)(BD' - B'D)\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3]$$
$$+ A_2 b \mathfrak{P}_2 [p_3 q_1 - p_1 q_3 + c(B_3 q_1 - D_3 p_1)\mathfrak{P}_3 + a(D_1 p_3 - B_1 q_3)\mathfrak{P}_1 + ac(\mu_1 - \mu_3)(BD' - B'D)\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3]$$
$$+ A_3 c \mathfrak{P}_3 [p_1 q_2 - p_2 q_1 + b(D_2 p_1 - B_2 q_1)\mathfrak{P}_2 + a(B_1 q_2 - D_1 p_2)\mathfrak{P}_1 + ab(\mu_2 - \mu_1)(BD' - B'D)\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2] = 0,$$

oder auch

$$a(p_2 q_3 - p_3 q_2) A_1 \mathfrak{P}_1 + b(p_3 q_1 - p_1 q_3) A_2 \mathfrak{P}_2 + c(p_1 q_2 - p_2 q_1) A_3 \mathfrak{P}_3$$
$$+ abc(BD' - B'D)[(\mu_3 - \mu_2)A_1 + (\mu_1 - \mu_3)A_2 + (\mu_2 - \mu_1)A_3]\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$$
$$+ ab[(A_2 D_1 - A_1 D_2)p_3 + (A_1 B_2 - A_2 B_1)q_3]\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$$
$$+ ac[(A_1 D_3 - A_3 D_1)p_2 + (A_3 B_1 - A_1 B_3)q_2]\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3$$
$$+ bc[(A_3 D_2 - A_2 D_3)p_1 + (A_2 B_3 - A_3 B_2)q_1]\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3 = 0.$$

Bemerken wir nun, dass

$$A_2 D_1 - A_1 D_2 = (\mu_1 - \mu_2)(AD' - A'D) = (\mu_1 - \mu_2)m,$$
$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = (\mu_2 - \mu_1)(AB' - A'B) = -(\mu_1 - \mu_2)n,$$

wo der Kürze halber

$$AD' - A'D = m \quad \text{und} \quad AB' - A'B = n$$

gesetzt ist, so wird der Coefficient von $ab\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = (\mu_1 - \mu_2)(mp_3 - nq_3)$.

Weil ferner

$$A_1 D_3 - A_3 D_1 = (\mu_3 - \mu_1)m,$$
$$A_3 B_1 - A_1 B_3 = -(\mu_3 - \mu_1)n,$$

so ist der Coefficient von $ac\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3 = (\mu_3 - \mu_1)(mp_2 - nq_2)$, und ebenso findet man den Coefficienten von $bc\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3 = (\mu_2 - \mu_3)(mp_1 - nq_1)$.

Unter Berücksichtigung, dass

$$(\mu_3 - \mu_2)A_1 + (\mu_1 - \mu_3)A_2 + (\mu_2 - \mu_1)A_3 = 0,$$

verwandelt sich also jetzt unsere Bedingungsgleichung (6) in

$$\begin{aligned} a(p_2q_3-p_3q_2)A_1\mathfrak{p}_1+b(p_3q_1-p_1q_3)A_2\mathfrak{p}_2+c(p_1q_2-p_2q_1)A_3\mathfrak{p}_3 \\ +ab(\mu_1-\mu_2)(mp_3-nq_3)\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2+ac(\mu_3-\mu_1)(mp_2-nq_2)\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3 \\ +bc(\mu_2-\mu_3)(mp_1-nq_1)\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3=0. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$ab=abc.c,$$
$$ac=abc.b,$$
$$bc=abc.a,$$

weil vermöge unserer Annahme $a^2=b^2=c^2=+1$ ist. Folglich können wir der vorstehenden Gleichung, wenn wir der Kürze halber

$$abc=K$$

setzen, auch folgende bessere Form geben:

$$\begin{aligned} a[(p_2q_3-p_3q_2)A_1\mathfrak{p}_1+K(\mu_2-\mu_3)(mp_1-nq_1)\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3] \\ +b[(p_3q_1-p_1q_3)A_2\mathfrak{p}_2+K(\mu_3-\mu_1)(mp_2-nq_2)\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3] \\ +c[(p_1q_2-p_2q_1)A_3\mathfrak{p}_3+K(\mu_1-\mu_2)(mp_3-nq_3)\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2]=0, \end{aligned}$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{\mathfrak{p}_1}[(p_2q_3-p_3q_2)A_1p_1+K(\mu_2-\mu_3)(mp_1-nq_1)\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3] \\ +\frac{b}{\mathfrak{p}_2}[(p_3q_1-p_1q_3)A_2p_2+K(\mu_3-\mu_1)(mp_2-nq_2)\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3] \\ +\frac{c}{\mathfrak{p}_3}[(p_1q_2-p_2q_1)A_3p_3+K(\mu_1-\mu_2)(mp_3-nq_3)\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3]=0. \end{aligned}\right\} (7)$$

Es ist aber

$$(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3)^2=p_1p_2p_3,$$

also, wie man auch $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ gewählt haben mag, $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ einer der zwei Werthe von $\sqrt{p_1p_2p_3}$. Bezeichnen wir diesen Werth durch Π, so nimmt die Gleichung (7) die Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{\mathfrak{p}_1}[(p_2q_3-p_3q_2)A_1p_1+K(\mu_2-\mu_3)(mp_1-nq_1)\Pi] \\ +\frac{b}{\mathfrak{p}_1}[(p_3q_1-p_1q_3)A_2p_2+K(\mu_3-\mu_1)(mp_2-nq_2)\Pi] \\ +\frac{c}{\mathfrak{p}_3}[(p_1q_2-p_2q_1)A_3p_3+K(\mu_1-\mu_2)(mp_3-nq_3)\Pi]=0. \end{aligned}\right\} (8)$$

Wir werden nun, um den Zusammenhang nicht zu unterbrechen, im nächsten Paragraphen nachweisen, dass die drei Klammerausdrücke der Gleichung (8), nämlich

$$\left.\begin{array}{l}(p_2q_3-p_3q_2)A_1p_1+K(\mu_2-\mu_3)(mp_1-nq_1)\Pi,\\(p_3q_1-p_1q_3)A_2p_2+K(\mu_3-\mu_1)(mp_2-nq_2)\Pi,\\(p_1q_2-p_2q_1)A_3p_3+K(\mu_1-\mu_2)(mp_3-nq_3)\Pi\end{array}\right\}\quad(9)$$

entweder alle für $K=+1$ oder alle für $K=-1$ Null sind, und zwar können wir es immer so einrichten, dass entweder das Eine oder das Andere der Fall ist; denn nehmen wir an, dass die Ausdrücke (9) für $K=+1$ Null sind, und wählen wir $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ so, dass jetzt

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3=-\Pi,$$

d. h. gleich dem anderen Werthe von $\sqrt{p_1p_2p_3}$ ist, was dadurch geschehen kann, dass man in den Gleichungen (5) statt

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3$$

setzt, entweder

$$-\mathfrak{p}_1,\ -\mathfrak{p}_2,\ -\mathfrak{p}_3,$$

oder

$$-\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,$$

oder

$$\mathfrak{p}_1,\ -\mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,$$

oder

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ -\mathfrak{p}_3;$$

so ersieht man unmittelbar aus der Form der Ausdrücke (9), dass dieselben jetzt alle für $K=-1$ Null werden.

Den erwähnten Nachweis einstweilen bei Seite gesetzt, können wir nun a, b, c so bestimmen, dass die drei Geraden (5) durch einen und denselben Punkt gehen.

Finden nämlich die drei Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}(p_2q_3-p_3q_2)A_1p_1+K(\mu_2-\mu_3)(mp_1-nq_1)\Pi=0,\\(p_3q_1-p_1q_3)A_2p_2+K(\mu_3-\mu_1)(mp_2-nq_2)\Pi=0,\\(p_1q_2-p_2q_1)A_3p_3+K(\mu_1-\mu_2)(mp_3-nq_3)\Pi=0\end{array}\right\}\quad(10)$$

zugleich für

$$K=abc=+1$$

statt, so wird die Bedingungsgleichung (8) offenbar immer erfüllt, man mag a, b, c wählen wie man will, wenn nur der Bedingung

$$abc = +1$$

Genüge geschieht. Man kann demnach für a, b, c der Reihe nach setzen:

a	b	c
$+1$	$+1$	$+1$
$+1$	-1	-1
-1	$+1$	-1
-1	-1	$+1$

Dieses gibt die vier Systeme von je drei Geraden, die durch einen und denselben der vier Durchschnittspunkte gehen. Finden aber die drei Gleichungen (10) für

$$K = abc = -1$$

statt, so ist die Gleichung (8) erfüllt, wenn man nur a, b, c der Bedingung $abc = -1$ entsprechend wählt. Die vier Systeme von je drei Geraden, die durch einen und denselben Durchschnittspunkt der zwei Kegelschnitte gehen, erhält man alsdann, wenn in den Gleichungen (5) der Reihe nach für

a	b	c
-1	-1	-1
$+1$	$+1$	-1
$+1$	-1	$+1$
-1	$+1$	$+1$

gesetzt wird.

§. 5.

Machen wir nun in diesem Paragraphen den oben erwähnten Nachweis, dass nämlich die drei Gleichungen (10) entweder alle für die Annahme von $K = +1$ oder alle für $K = -1$ bestehen, zum Gegenstande unserer Betrachtung *).

Da sich unter der Schaar der vorgelegten zwei Kegelschnitte

*) Wir sind zwar im Besitze eines direkten Nachweises, der sich unmittelbar an die Gleichung in μ anschliesst; allein derselbe ist sehr weitläufig und wurde darum hier durch obigen einfacheren ersetzt.

drei geradlinige befinden, so bestehen offenbar die zwei identischen Gleichungen

$$U+\alpha U'\equiv PQ,$$
$$U+\beta U'\equiv RS,$$

wo α und β irgend zwei der drei Wurzeln μ_1, μ_2, μ_3 bedeuten und P, Q, R, S lineare Functionen von x und y sind.

Aus vorstehenden Gleichungen erhält man:

$$\frac{\alpha-\beta}{-\beta}U\equiv PQ-\frac{\alpha}{\beta}RS,\quad (\alpha-\beta)\,U'\equiv PQ-RS.$$

Nehmen wir nun statt der Kegelschnittsgleichungen

$$U=0,\quad U'=0$$

die Gleichungen

$$\frac{\alpha-\beta}{-\beta}U=0,\quad (\alpha-\beta)\,U'=0;$$

so erhalten wir auch

$$PQ-\frac{\alpha}{\beta}RS=0,\quad PQ-RS=0$$

als Gleichungen der zwei Kegelschnitte. Jede derselben ist von der Form

$$PQ+\gamma RS=0.$$

Da P, Q, R, S lineare Functionen von x und y bedeuten, so kann man bekanntlich vier Grössen π, $\varkappa$, ϱ, σ finden, so dass die Gleichung besteht:

$$(\pi P)+(\varkappa Q)+(\varrho R)+(\sigma S)\equiv 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Schreibt man nun statt der Gleichung

$$PQ+\gamma RS=0$$

des ersten Kegelschnittes U:

$$(\pi P)(\varkappa Q)+\frac{\gamma\pi\varkappa}{\varrho\sigma}(\varrho R)(\sigma S)=0,$$

und ändert jetzt die Bezeichnung in der Weise, dass man P für (πP), Q für $(\varkappa Q)$, γ für $\frac{\gamma\pi\varkappa}{\varrho\sigma}$, R für (ϱR) und S für (σS) setzt, so verwandelt sich die Gleichung des Kegelschnittes U in

$$PQ+\gamma RS=0,$$

und die Bedingungsgleichung (11) in

$$P+Q+R+S\equiv 0.$$

Man kann demnach, anstatt die Gleichungen

$$U=0,\quad U'=0$$

unmittelbar anzuwenden, dieselben dadurch, dass man sie vorher noch mit passenden Coefficienten multiplicirt, auf die Form bringen:

$$PQ+\gamma RS=0,\quad PQ+\gamma' RS=0; \qquad (12)$$

wo zwischen P, Q, R, S die identische Gleichung besteht:

$$P+Q+R+S\equiv 0. \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Multipliciren wir die erstere der Gleichungen (12) mit 4, so nimmt sie die Form an:

$$(P+Q)^2-(P-Q)^2+\gamma[(R+S)^2-(R-S)^2]=0,$$

und wenn man berücksichtigt, dass vermöge der Gleichung (13)

$$(P+Q)^2\equiv(R+S)^2,$$

so geht sie über in

$$(1+\gamma)(P+Q)^2-(P-Q)^2-\gamma(R-S)^2=0,$$

worin $P+Q$, $P-Q$, $R-S$ wiederum lineare Functionen von x und y sind.

Wir ziehen hieraus den Schluss:

Anstatt die Gleichungen (12) der zwei Kegelschnitte in Anwendung zu bringen, kann man dieselben vor Beginn der Operation mit 4 multipliciren und dann, indem man

$$P+Q=\mathfrak{p},$$
$$P-Q=\mathfrak{q},$$
$$R-S=\mathfrak{r};$$

ferner in der ersteren

$$1+\gamma=\lambda_1,$$
$$-1=\lambda_2,$$
$$-\gamma=\lambda_3;$$

und in der letzteren

$$1+\gamma'=\lambda_1',$$
$$-1=\lambda_2',$$
$$-\gamma'=\lambda_3'$$

setzt, unter die Form bringen:

$$U = \lambda_1 p^2 + \lambda_2 q^2 + \lambda_3 r^2 = 0,$$
$$U' = \lambda_1' p^2 + \lambda_2' q^2 + \lambda_3' r^2 = 0.$$

Um jedoch nicht zu viele unbestimmte Coefficienten in die Rechnung einzuführen, wollen wir unter

$$p, \; q, \; r, \; \lambda_1, \; \lambda_2, \; \lambda_3$$

der Reihe nach verstehen:

$$p\sqrt{\lambda_1'}, \quad q\sqrt{\lambda_2'}, \quad r\sqrt{\lambda_3'}, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1'}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_2'}, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_3'}$$

und erhalten dann die Gleichungen der zwei Kegelschnitte unter der Form:

$$\left.\begin{aligned} U &= \lambda_1 p^2 + \lambda_2 q^2 + \lambda_3 r^2 = 0, \\ U' &= p^2 + q^2 + r^2 = 0; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

wo p, q, r als lineare Functionen von x und y von der Form sind:

$$\left.\begin{aligned} p &= a_1 y + b_1 x + c_1, \\ q &= a_2 y + b_2 x + c_2, \\ r &= a_3 y + b_3 x + c_3. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Bildet man jetzt die Gleichung

$$U + \mu_0 U' = 0$$

und nimmt für μ_0 der Reihe nach die Werthe

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= -\lambda_1, \\ \mu_2 &= -\lambda_2, \\ \mu_3 &= -\lambda_3; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

so wird jedesmal der Kegelschnitt

$$U + \mu_0 U' = 0$$

zu einem geradlinigen.

Entwickelt man die Gleichung

$$U + \mu_1 U' = (\lambda_2 - \lambda_1) q^2 + (\lambda_3 - \lambda_1) r^2 = 0,$$

indem man für q und r aus (15) die betreffenden Werthe einführt, und ordnet nach Potenzen von y und x, so erhält man:

$$[(\lambda_2-\lambda_1)\mathfrak{a}_2^2+(\lambda_3-\lambda_1)\mathfrak{a}_3^2]y^2+2[(\lambda_2-\lambda_1)\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2+(\lambda_3-\lambda_1)\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3]yx$$
$$+[(\lambda_2-\lambda_1)\mathfrak{b}_2^2+(\lambda_3-\lambda_1)\mathfrak{b}_3^2]x^2+2[(\lambda_2-\lambda_1)\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2+(\lambda_3-\lambda_1)\mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_3]y$$
$$+2[(\lambda_2-\lambda_1)\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2+(\lambda_3-\lambda_1)\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3]x+(\lambda_2-\lambda_1)\mathfrak{c}_2^2+(\lambda_3-\lambda_1)\mathfrak{c}_3^2=0;$$

also ist:

$$\left.\begin{aligned}
A_1&=(\lambda_2-\lambda_1)\mathfrak{a}_2^2+(\lambda_3-\lambda_1)\mathfrak{a}_3^2,\\
B_1&=(\lambda_2-\lambda_1)\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2+(\lambda_3-\lambda_1)\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3,\\
C_1&=(\lambda_2-\lambda_1)\mathfrak{b}_2^2+(\lambda_3-\lambda_1)\mathfrak{b}_3^2,\\
D_1&=(\lambda_2-\lambda_1)\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2+(\lambda_3-\lambda_1)\mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_3,\\
E_1&=(\lambda_2-\lambda_1)\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2+(\lambda_3-\lambda_1)\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3,\\
F_1&=(\lambda_2-\lambda_1)\mathfrak{c}_2^2+(\lambda_3-\lambda_1)\mathfrak{c}_3^2.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(17)$$

Nach §. 2. (2) ist aber

$$p_1=B_1^2-A_1C_1,$$
$$q_1=B_1D_1-A_1E_1,$$

und man erhält demnach unter Berücksichtigung der Relationen (17):

$$p_1=-(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3-\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2)^2,$$

und analog:

$$p_2=-(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3-\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1)^2;$$
$$p_3=-(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2-\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1)^2;$$

ferner:

$$q_1=(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_3-\mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_2)(\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2-\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3),$$

und analog:

$$q_2=(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_3-\mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_1)(\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1-\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3),$$
$$q_3=(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_2-\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_1)(\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1-\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2).$$

Diese Gleichungen gehen aber, wenn man

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_2-\lambda_3&=l',\\
\lambda_3-\lambda_1&=l'',\\
\lambda_1-\lambda_2&=l'''
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(18)$$

setzt, wo zwischen l', l'', l''' die Relation besteht:

$$l'+l''+l'''=0,$$

und zur weiteren Abkürzung folgende Bezeichnungen einführt;

$$\left.\begin{array}{l} a_2\mathfrak{b}_3 - a_3\mathfrak{b}_2 = c', \\ a_3\mathfrak{b}_1 - a_1\mathfrak{b}_3 = c'', \\ a_1\mathfrak{b}_2 - a_2\mathfrak{b}_1 = c'''; \end{array}\right\} \quad (19) \qquad \left.\begin{array}{l} a_2\mathfrak{c}_3 - a_3\mathfrak{c}_2 = b', \\ a_3\mathfrak{c}_1 - a_1\mathfrak{c}_3 = b'', \\ a_1\mathfrak{c}_2 - a_2\mathfrak{c}_1 = b'''; \end{array}\right\} \quad (20)$$

wo zwischen c', c'', c''', b', b'', b''', wie man sich leicht überzeugt, die vier Relationen bestehen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1c' + a_2c'' + a_3c''' = 0, \\ \mathfrak{b}_1c' + \mathfrak{b}_2c'' + \mathfrak{b}_3c''' = 0, \\ a_1b' + a_2b'' + a_3b''' = 0, \\ \mathfrak{c}_1b' + \mathfrak{c}_2b'' + \mathfrak{c}_3b''' = 0; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

über in:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = l''l'''c'^2, \\ p_2 = l'l'''c''^2, \\ p_3 = l'l''c'''^2. \end{array}\right\} \quad (22) \qquad \left.\begin{array}{l} q_1 = l''l'''b'c', \\ q_2 = l'l'''b''c'', \\ q_3 = l'l''b'''c'''. \end{array}\right\} \quad (23)$$

Hieraus ergibt sich nun leicht:

$$\begin{array}{l} p_2q_3 - p_3q_2 = l'^2l''l'''c''c'''(b'''c'' - b''c'''), \\ p_3q_1 - p_1q_3 = l'l''^2l'''c'c'''(b'c''' - b'''c'), \\ p_1q_2 - p_2q_1 = l'l''l'''^2c'c''(b''c' - b'c''); \end{array}$$

oder wenn man der Kürze halber setzt:

$$\left.\begin{array}{l} b'''c'' - b''c''' = \alpha', \\ b'c''' - b'''c' = \alpha'', \\ b''c' - b'c'' = \alpha'''; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

wo vermöge der Relationen (21) zwischen α', α'', α''' die Beziehungen stattfinden:

$$\begin{array}{lll} a_1\alpha'' = a_2\alpha', & a_2\alpha' = a_1\alpha'', & a_3\alpha' = a_1\alpha''', \\ a_1\alpha''' = a_3\alpha', & a_2\alpha''' = a_3\alpha'', & a_3\alpha'' = a_2\alpha''', \end{array}$$

auch:

$$\begin{array}{l} p_2q_3 - p_3q_2 = l'^2l''l'''c''c'''\alpha', \\ p_3q_1 - p_1q_3 = l'l''^2l'''c'c'''\alpha'', \\ p_1q_2 - p_2q_1 = l'l''l'''^2c'c''\alpha'''. \end{array}$$

Um die noch übrigen Theile der Gleichungen (10) zu entwickeln, ersehen wir sogleich aus den Relationen (22), dass

$$p_1p_2p_3 = (l'l''l'''c'c''c''')^2.$$

Da es uns aber frei steht, für Π einen beliebigen der zwei Werthe von $\sqrt{p_1p_2p_3}$ zu wählen, so wollen wir setzen:

$$\Pi = l'l''l'''c'c''c'''.$$

Zur Bestimmung von A_1, A_2, A_3 entwickeln wir in den Gleichungen der drei geradlinigen Kegelschnitte:

$$U + \mu_1 U' = 0,$$

$$U + \mu_2 U' = 0,$$

$$U + \mu_3 U' = 0$$

die Coefficienten von y^2 und finden:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= a_3{}^2 l'' - a_2{}^2 l''', \\ A_2 &= a_1{}^2 l''' - a_3{}^2 l', \\ A_3 &= a_2{}^2 l' - a_1{}^2 l''. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Aus (16) folgt unter Berücksichtigung der Relationen (18) sogleich:

$$\mu_2 - \mu_3 = -l',$$

$$\mu_3 - \mu_1 = -l'',$$

$$\mu_1 - \mu_2 = -l'''.$$

Führen wir ferner noch in die zwei Gleichungen (14) für p, q, r die linearen Functionen (15) ein und entwickeln die Coefficienten von y^2, yx und y, so ergeben sich leicht folgende Beziehungen:

$$A = \lambda_1 a_1{}^2 + \lambda_2 a_2{}^2 + \lambda_3 a_3{}^2,$$

$$B = \lambda_1 a_1 b_1 + \lambda_2 a_2 b_2 + \lambda_3 a_3 b_3,$$

$$C = \lambda_1 a_1 c_1 + \lambda_2 a_2 c_2 + \lambda_3 a_3 c_3;$$

$$A' = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2,$$

$$B' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

$$D' = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3.$$

Bildet man hieraus die Ausdrücke:

$$m = AD' - A'D,$$

$$n = AB' - A'B;$$

so wird

$$m = a_1 a_2 (a_1 c_2 - a_2 c_1)(\lambda_1 - \lambda_2)$$
$$+ a_1 a_3 (a_1 c_3 - a_3 c_1)(\lambda_1 - \lambda_3)$$
$$+ a_2 a_3 (a_2 c_3 - a_3 c_2)(\lambda_2 - \lambda_3),$$

$$n = a_1 a_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)(\lambda_1 - \lambda_2)$$
$$+ a_1 a_3 (a_1 b_3 - a_3 b_1)(\lambda_1 - \lambda_3)$$
$$+ a_2 a_3 (a_2 b_3 - a_3 b_2)(\lambda_2 - \lambda_3);$$

oder wenn man von den Abkürzungen (18), (19) und (17) Gebrauch macht:

$$\left.\begin{aligned} m &= a_1 a_2 b''' l''' + a_1 a_3 b'' l'' + a_2 a_3 b' l', \\ n &= a_1 a_2 c''' l''' + a_1 a_3 c'' l'' + a_2 a_3 c' l'. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (26)$$

Berücksichtigt man nun die Relationen (24) und (25), so erhält man durch Einführung der betreffenden Werthe aus (22), (23) und (26) nach einigen leichten Umformungen:

$$mp_1 - nq_1 = l'' l''' c' \alpha' A_1,$$
$$mp_2 - nq_2 = l' l''' c'' \alpha'' A_2,$$
$$mp_3 - nq_3 = l' l'' c''' \alpha''' A_3.$$

Substituirt man nun endlich in die Gleichungen (10) die betreffenden Werthe aus vorstehenden Entwicklungen, so gehen dieselben über in

$$l'^2 l''^2 l'''^2 c'^2 c'' c''' \alpha' A_1 - K . l'^2 l''^2 l'''^2 c'^2 c'' c''' \alpha' A_1 = 0,$$
$$l'^2 l''^2 l'''^2 c' c''^2 c''' \alpha'' A_2 - K . l'^2 l''^2 l'''^2 c' c''^2 c''' \alpha'' A_2 = 0,$$
$$l'^2 l''^2 l'''^2 c' c'' c'''^2 \alpha''' A_3 - K . l'^2 l''^2 l'''^2 c' c'' c'''^2 \alpha''' A_3 = 0,$$

und finden somit zugleich für $K = +1$ statt.

Hätte man für $\sqrt{p_1 p_2 p_3}$ den Werth $-\Pi$ angenommen, so würde man auf dieselbe Weise gefunden haben, dass jede der drei Gleichungen (10) übergegangen wäre in

$$1 + K = 0,$$

und obige Behauptung ist demnach gerechtfertigt.

Um das Vorgetragene noch durch ein Zahlenbeispiel zu erläutern, seien

$$U = 7y^2 - 3yx + 5x^2 - 8y - 2x + 3 = 0,$$
$$U' = 8y^2 + yx + 8x^2 - 11y - 7x + 5 = 0$$

die Gleichungen der zwei vorgelegten Kegelschnitte, so wird die Gleichung in μ:

$$\mu^3+\frac{9}{4}\mu^2+\frac{13}{8}\mu+\frac{3}{8}=0,$$

also

$$\mu_1=-1,\quad \mu_2=-\frac{1}{2},\quad \mu_3=-\frac{3}{4},$$

somit

$$\mu_2-\mu_3=\frac{1}{4},\quad \mu_3-\mu_1=\frac{1}{4},\quad \mu_1-\mu_2=-\frac{1}{2};$$

ferner

$$m=AD'-A'D=-\frac{13}{2},\quad n=AB'-A'B=\frac{31}{2}$$

und

$$\begin{array}{lll}
A_1=-1, & A_2=\ \ 3, & A_3=\ \ 1, \\
B_1=-2, & B_2=-\frac{7}{4}, & B_3=-\frac{15}{8}, \\
C_1=-3, & C_2=\ \ 1, & C_3=-1, \\
D_1=\ \ \frac{3}{2}, & D_2=-\frac{5}{4}, & D_3=\ \ \frac{1}{8}, \\
E_1=\ \ \frac{5}{2}, & E_2=\ \ \frac{3}{4}, & E_3=\ \ \frac{13}{8};
\end{array}$$

$$p_1=B_1^2-A_1C_1=1,\qquad q_1=B_1D_1-A_1E_1=-\frac{1}{2},$$

$$p_2=B_2^2-A_2C_2=\frac{1}{16},\qquad q_2=B_2D_2-A_2E_2=-\frac{1}{16},$$

$$p_3=B_3^2-A_3C_3=\frac{289}{64};\qquad q_3=B_3D_3-A_3E_3=-\frac{119}{64};$$

demnach

$$p_2q_3-p_3q_2=\frac{85}{512},\qquad mp_1-nq_1=\frac{5}{4},$$

$$p_3q_1-p_1q_3=-\frac{51}{128},\qquad mp_2-nq_2=\frac{9}{16},$$

$$p_1q_2-p_2q_1=-\frac{1}{32},\qquad mp_3-nq_3=\frac{17}{32};$$

$$\Pi=\sqrt{p_1p_2p_3}=\pm\frac{17}{32}.$$

Führen wir nun die hier entwickelten Werthe für die betreffenden Ausdrücke in den Gleichungen (10) ein und wählen hierbei für Π den Werth $+\frac{17}{32}$, so ergibt sich durch einfache Rechnung, dass jene Gleichungen in diesem Falle für $K=+1$ bestehen.

Setzen wir in den Gleichungen (5) für

der Reihe nach

a	b	c
$+1$	$+1$	$+1$
$+1$	-1	-1
-1	$+1$	-1
-1	-1	$+1$

so erhalten wir folgende vier Systeme von je drei Geraden, die durch die vier Durchschnittspunkte der zwei Kegelschnitte gehen:

$$1.\ \begin{cases} y+x-1=0, \\ 2y-x-1=0, \\ 4y+x-3=0. \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} y+x-1=0, \\ 3y-2x-1=0, \\ y-4x+1=0. \end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} y+3x-2=0, \\ 2y-x-1=0, \\ y-4x+1=0. \end{cases} \qquad 4.\ \begin{cases} y+3x-2=0, \\ 3y-2x-1=0, \\ 4y+x-3=0. \end{cases}$$

Die vier Durchschnittspunkte der zwei Kegelschnitte selbst bestimmen sich aus:

$$1)\quad y=\frac{2}{3},\quad x=\frac{1}{3}.$$

$$2)\quad y=\frac{3}{5},\quad x=\frac{2}{5}.$$

$$3)\quad y=\frac{5}{7},\quad x=\frac{3}{7}.$$

$$4)\quad y=\frac{7}{11},\quad x=\frac{5}{11}.$$

§. 6.

Da wir jetzt wissen, unter welchen Bedingungen die Geraden der Gleichungen (5) durch einen und denselben Punkt gehen, so wollen wir nun die allgemeine Bestimmung der Werthe der Coordinaten der Durchschnittspunkte vornehmen.

Diese Bestimmung kann dadurch geschehen, dass man nur je zwei Gleichungen des Systems benützt. Aber die Ausdrücke, welche man auf diese Weise für x und y erhält, sind keine symmetrischen Functionen der drei Wurzeln, sondern hängen bloss von je zwei Wurzeln der cubischen Gleichung ab. Wir wollen desshalb immer die drei entsprechenden Gleichungen benützen, wodurch wir x und y ausgedrückt erhalten durch symmetrische Functionen aller drei Wurzeln der cubischen Gleichung. Zu dem Zwecke müssen wir aber vorerst die Gleichungen (5) der Reihe nach durch $a\mathfrak{p}_1$, $b\mathfrak{p}_2$, $c\mathfrak{p}_3$ dividiren und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} A_1y+(a\mathfrak{p}_1+B_1)x+a\frac{q_1}{\mathfrak{p}_1}+D_1=0,\\ A_2y+(b\mathfrak{p}_2+B_2)x+b\frac{q_2}{\mathfrak{p}_2}+D_2=0,\\ A_3y+(c\mathfrak{p}_3+B_3)x+c\frac{q_3}{\mathfrak{p}_3}+D_3=0.\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

Multipliciren wir nun diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$\mu_2-\mu_3,\quad \mu_3-\mu_1,\quad \mu_1-\mu_2$$

und bemerken zugleich, dass nach unserer Bezeichnungsart folgende drei Gleichungen stattfinden:

$$\left.\begin{aligned}(\mu_2-\mu_3)A_1+(\mu_3-\mu_1)A_2+(\mu_1-\mu_2)A_3=0,\\ (\mu_2-\mu_3)B_1+(\mu_3-\mu_1)B_2+(\mu_1-\mu_2)B_3=0,\\ (\mu_2-\mu_3)D_1+(\mu_3-\mu_1)D_2+(\mu_1-\mu_2)D_3=0;\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned}&[(\mu_2-\mu_3)a\mathfrak{p}_1+(\mu_3-\mu_1)b\mathfrak{p}_2+(\mu_1-\mu_2)c\mathfrak{p}_3]x\\ &+(\mu_2-\mu_3)a\frac{q_1}{\mathfrak{p}_1}+(\mu_3-\mu_1)b\frac{q_2}{\mathfrak{p}_2}+(\mu_1-\mu_2)c\frac{q_3}{\mathfrak{p}_3}=0.\end{aligned}\quad(29)$$

Auf gleiche Weise wie eben für x lässt sich auch aus den drei Gleichungen (27) eine Gleichung zur Bestimmung von y entwickeln. Man könnte nämlich jede derselben mit einem unbestimmten Coefficienten multipliciren, dann alle drei addiren und nun die drei Coefficienten so bestimmen, dass der Coefficient von x verschwindet. Wir ziehen jedoch folgenden einfacheren Weg zur Auffindung von y vor.

Anstatt die Gleichung des Kegelschnittes

$$U+\mu_0U'=0$$

wie früher auf die Form

$$A_0 p_0 U_0 = p_0 (A_0 y + B_0 x + D_0)^2 - (p_0 x + q_0)^2 + q_0 - p_0 r_0 = 0$$

zu bringen, wollen wir derselben jetzt die Form geben:

$$C_0 p_0 U_0 = p_0 (C_0 x + B_0 y + E_0)^2 - (p_0 y + s_0)^2 + s_0 - p_0 t_0 = 0,$$

wo der Kürze halber

$$B_0 E_0 - C_0 D_0 = s_0,$$
$$E_0^2 - C_0 F_0 = t_0$$

gesetzt ist. Diese Gleichung wird aber das System zweier Geraden, wenn

$$s_0^2 - p_0 t_0 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

welches dieselbe Bedingungsgleichung zwischen den fünf Coefficienten des Kegelschnittes ergibt, wie früher die Gleichung (3).

Die Gleichungen der zwei Geraden, welche den einen geradlinigen Kegelschnitt bilden und sich oben (§. 3.) unter der Form darboten:

$$a(A_0 y + B_0 x + D_0)\mathfrak{P}_0 + p_0 x + q_0 = 0,$$

stellen sich jetzt unter der Form dar:

$$a'(C_0 x + B_0 y + E_0)\mathfrak{P}_0 + p_0 y + s_0 = 0,$$

wo a' wiederum $+1$ oder -1 bedeutet.

Wir haben nun zunächst die Beziehungen aufzusuchen, welche zwischen a und a' stattfinden müssen, damit die vorstehenden zwei Gleichungen identisch sind. Eine einfache Untersuchung führt zu dem Resultate, dass dieses der Fall ist, wenn

$$a' = -a.$$

Es lassen sich somit die drei Gleichungen (27) auch auf folgende Weise schreiben:

$$(p_1 - aB_1\mathfrak{P}_1)y - aC_1\mathfrak{P}_1 x + s_1 - aE_1\mathfrak{P}_1 = 0,$$
$$(p_2 - bB_2\mathfrak{P}_2)y - bC_2\mathfrak{P}_2 x + s_2 - bE_2\mathfrak{P}_2 = 0,$$
$$(p_3 - cB_3\mathfrak{P}_3)y - cC_3\mathfrak{P}_3 x + s_3 - cE_3\mathfrak{P}_3 = 0.$$

Dividirt man diese Gleichungen der Reihe nach durch

$$a\mathfrak{P}_1, \quad b\mathfrak{P}_2, \quad c\mathfrak{P}_3;$$

so nehmen sie folgende Formen an:

$$\left.\begin{array}{l}(a\mathfrak{P}_1-B_1)y-C_1x+a\dfrac{s_1}{\mathfrak{P}_1}-E_1=0,\\[2ex](b\mathfrak{P}_2-B_2)y-C_2x+b\dfrac{s_2}{\mathfrak{P}_2}-E_2=0,\\[2ex](c\mathfrak{P}_3-B_3)y-C_3x+c\dfrac{s_3}{\mathfrak{P}_3}-E_3=0.\end{array}\right\}\quad\ldots\quad(31)$$

Multiplicirt man nun diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$\mu_2-\mu_3,\quad \mu_3-\mu_1,\quad \mu_1-\mu_2,$$

addirt die erhaltenen Resultate und berücksichtigt, dass ausser den Relationen (28) auch noch die Beziehung stattfindet:

$$(\mu_2-\mu_3)C_1+(\mu_3-\mu_1)C_2+(\mu_1-\mu_2)C_3=0,$$

so gelangt man zu der Gleichung:

$$[(\mu_2-\mu_3)a\mathfrak{P}_1+(\mu_3-\mu_1)b\mathfrak{P}_2+(\mu_1-\mu_2)c\mathfrak{P}_3]y$$
$$+(\mu_2-\mu_3)a\frac{s_1}{\mathfrak{P}_1}+(\mu_3-\mu_1)b\frac{s_2}{\mathfrak{P}_2}+(\mu_1-\mu_2)c\frac{s_3}{\mathfrak{P}_3}=0.\quad(32)$$

Aus den Gleichungen (3) und (30) ergibt sich:

$$\frac{q_0}{\mathfrak{P}_0}=\pm\sqrt{r_0},\quad \frac{s_0}{\mathfrak{P}_0}=\pm\sqrt{t_0}.$$

Bezeichnen wir nun die Werthe von $\pm\sqrt{r_0}$ und $\pm\sqrt{t_0}$, nachdem deren Zeichen so gewählt sind, dass die Gleichungen (27) und (31) bestehen, beziehungsweise durch $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{C}_0$, so gehen die Gleichungen (29) und (32) zur Bestimmung von x und y über in folgende:

$$[(\mu_2-\mu_3)a\mathfrak{P}_1+(\mu_3-\mu_2)b\mathfrak{P}_2+(\mu_1-\mu_2)c\mathfrak{P}_3]x$$
$$+(\mu_2-\mu_3)a\mathfrak{B}_1+(\mu_3-\mu_2)b\mathfrak{B}_2+(\mu_1-\mu_2)c\mathfrak{B}_3=0$$

und

$$[(\mu_2-\mu_3)a\mathfrak{P}_1+(\mu_3-\mu_2)b\mathfrak{P}_2+(\mu_1-\mu_2)c\mathfrak{P}_3]x$$
$$+(\mu_2-\mu_3)a\mathfrak{C}_1+(\mu_3-\mu_2)b\mathfrak{C}_2+(\mu_1-\mu_2)c\mathfrak{C}_3=0,$$

woraus wir endlich für x und y die Werthe erhalten:

$$x=-\frac{(\mu_2-\mu_3)a\mathfrak{B}_1+(\mu_3-\mu_2)b\mathfrak{B}_2+(\mu_1-\mu_2)c\mathfrak{B}_3}{(\mu_2-\mu_3)a\mathfrak{P}_1+(\mu_3-\mu_2)b\mathfrak{P}_2+(\mu_1-\mu_2)c\mathfrak{P}_3},$$

$$y=-\frac{(\mu_2-\mu_3)a\mathfrak{C}_1+(\mu_3-\mu_2)b\mathfrak{C}_2+(\mu_1-\mu_2)c\mathfrak{C}_3}{(\mu_2-\mu_3)a\mathfrak{P}_1+(\mu_3-\mu_2)b\mathfrak{P}_2+(\mu_1-\mu_2)c\mathfrak{P}_3}.$$

Es sind dieses die allgemeinsten Ausdrücke der Coordinaten der Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte, wenn μ_1, μ_2, μ_3 die drei Wurzeln der cubischen Gleichung sind, welche den zwei Kegelschnitten zukommt.

Wenden wir diese Ausdrücke auf die Berechnung der Coordinaten der Durchschnittspunkte der zwei Kegelschnitte des im vorhergehenden Paragraphen angeführten Beispiels an, so haben wir zunächst:

$$\mu_2-\mu_3=\frac{1}{4},\qquad \mathfrak{p}_1=1,\qquad \mathfrak{N}_1=\frac{q_1}{\mathfrak{p}_1}=-\frac{1}{2},$$

$$\mu_3-\mu_1=\frac{1}{4},\qquad \mathfrak{p}_2=\frac{1}{4},\qquad \mathfrak{N}_2=\frac{q_2}{\mathfrak{p}_2}=-\frac{1}{4},$$

$$\mu_1-\mu_2=-\frac{1}{2},\qquad \mathfrak{p}_3=\frac{17}{8},\qquad \mathfrak{N}_3=\frac{q_3}{\mathfrak{p}_3}=-\frac{119}{136};$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1=-\frac{1}{2}, \\ s_2=-\frac{1}{16}, \\ s_3=-\frac{187}{64}, \end{array}\right\} \text{ also } \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{C}_1=\frac{s_1}{\mathfrak{p}_1}=-\frac{1}{2}, \\ \mathfrak{C}_2=\frac{s_2}{\mathfrak{p}_2}=-\frac{1}{4}, \\ \mathfrak{C}_3=\frac{s_3}{\mathfrak{p}_3}=-\frac{187}{136}; \end{array}\right.$$

und hierdurch erhalten wir für $abc=+1$ oder

1) für $a=+1$, $b=+1$, $c=+1$:

$$x=\frac{1}{3},\quad y=\frac{2}{3};$$

2) für $a=+1$, $b=-1$, $c=-1$:

$$x=\frac{2}{5},\quad y=\frac{3}{5};$$

3) für $a=-1$, $b=+1$, $c=-1$:

$$x=\frac{3}{7},\quad y=\frac{5}{7}:$$

4) für $a=-1$, $b=-1$, $c=+1$:

$$x=\frac{5}{11},\quad y=\frac{7}{11};$$

was genau mit den oben gefundenen Resultaten übereinstimmt.

Man überzeugt sich leicht, dass für die Annahme von $abc=-1$ dieselben Werthe für x und y wären erzielt worden.

XX.

Note sur quelques formules qui peuvent être utiles dans la théorie des surfaces courbes.

Par
Monsieur *G. F. W. Baehr*
à Groningue.

---

1. Angle sous lequel se coupent, au point x, y, z, deux courbes données sur une surface $F(x, y, z) = 0$. Soit

$$\eta - y = m(\xi - x)$$

une des équations de la tangente à l'une des courbes; celle du plan tangent étant

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

on aura, en éliminant $\eta - y$, pour l'autre équation:

$$\zeta - z = (p + mq)(\xi - x).$$

Ainsi les équations de cette tangente seront:

$$\frac{\xi - x}{1} = \frac{\eta - y}{m} = \frac{\zeta - z}{p + mq},$$

et par conséquent on aura, en faisant

$$M = \surd\{1 + m^2 + (p + mq)^2\},$$

pour les cosinus de ses angles directeurs:

$$\frac{1}{M}, \frac{m}{M}, \frac{p + mq}{M}.$$

Pareillement ces cosinus pour la tangente à l'autre courbe, dont une des équations est $\eta - y = m'(\xi - x)$, seront

$$\frac{1}{M'},\ \frac{m'}{M'},\ \frac{p+m'q}{M'};$$

où l'on a fait

$$M'=\sqrt{\{1+m'^2+(p+m'q)^2\}}.$$

On aura donc pour le cosinus de l'angle φ entre ces deux tangentes, c'est-à-dire, de l'angle sous lequel se coupent les deux courbes données,

$$\mathrm{Cos}\,\varphi=\frac{1+mm'+(p+mq)(p+m'q)}{MM'}$$

ou,

$$\mathrm{Cos}\,\varphi=\frac{(1+p^2)+(1+q^2)mm'+pq(m+m')}{MM'}\ \ldots\ (1)$$

Applications. L'équation différentielle des lignes de courbure est

$$\frac{dy^2}{dx^2}\{(1+q^2)s-pqt\}+\frac{dy}{dx}\{(1+q^2)z-(1+p^2)t\}-\{(1+p^2)s-pqz\}=0,$$

donc, d'après les propriétés des racines de l'équation du second degré:

$$m+m'=-\frac{(1+q^2)z-(1+p^2)t}{(1+q^2)s-pqt},$$

$$mm'=-\frac{(1+p^2)s-pqr}{(1+q^2)s-pqt};$$

substituant ces valeurs dans (1) on trouve:

$$\mathrm{Cos}\,\varphi=\frac{0}{MM'}=0,$$

et par conséquent $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, c'est-à-dire, les lignes de courbure se coupent à angle droit, propriété que l'on démontre ordinairement en rapportant l'équation de la surface au plan tangent, et faisant à cet effet dans l'équation différentielle des lignes de courbure $p=0$, $q=0$.

L'équation différentielle des lignes de niveau est, en supposant que le plan xy soit horizontal,

$$pdx+qdy=0,$$

et celle des lignes de plus grande pente:

$$pdy-qdx=0;$$

on a donc dans ce cas:

$$m = -\frac{p}{q}, \quad m' = \frac{q}{p};$$

et l'on trouve, en substituant ces valeurs dans (1),

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{0}{MM'}, \quad \varphi = \tfrac{1}{2}\pi;$$

donc aussi ces lignes se coupent à angle droit.

Avec les valeurs des cosinus des angles directeurs des deux tangentes on trouvera facilement:

$$\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{(m-m')\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{MM'},$$

et par conséquent:

$$\mathrm{Tang}\,\varphi = \frac{(m-m')\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{(1+p^2)+(1+q^2)mm'+pq(m+m')};$$

faisant

$$\sqrt{(1+p^2+q^2)} = \lambda \text{ et } \mathrm{Tang}\,\varphi = \alpha,$$

la dernière formule donnera:

$$m = \frac{\lambda m' + \alpha(1+p^2+pqm')}{\lambda - \alpha\{(1+q^2)m' + pq\}}, \quad (2)$$

qui pourra servir à obtenir immédiatement l'équation différentielle d'une courbe, qui doit couper suivant une certaine loi un système de courbes donné sur une surface.

Supposons que l'on veuille avoir la ligne loxodromique sur un ellipsoïde, dont

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

soit l'équation, et que les plans passant par l'axe des z sont les méridiens; alors α est contant, et l'on a:

$$m' = \frac{y}{x}.$$

L'équation de la surface donne:

$$p = -\frac{c^2x}{a^2z}, \quad q = -\frac{c^2y}{b^2z}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{\{b^4c^4x^2 + a^4c^4y^2 + a^4b^4z^2\}}}{a^2b^2z},$$

et substituant ces valeurs dans (2), on trouve:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{Ayz + \alpha b^2 Bx}{Axz - \alpha a^2 Cy},$$

où l'on a fait:

$$A = a^2b^2\sqrt{(b^4c^4x^2 + a^4c^4y^2 + a^4b^4z^2)}, \quad B = b^2c^4x^2 + a^2c^4y^2 + a^4b^2z^2,$$
$$C = b^2c^4x^2 + a^2c^4y^2 + a^2b^4z^2.$$

Si l'on introduit des coordonnées polaires, en faisant

$$x = \varrho \operatorname{Cos}\theta, \quad y = \varrho \operatorname{Sin}\theta,$$

la dernière équation se change dans:

$$\frac{\operatorname{Sin}\theta \frac{d\varrho}{d\theta} + \varrho \operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Cos}\theta \frac{d\varrho}{d\theta} - \varrho \operatorname{Sin}\theta} = \frac{Az \operatorname{Sin}\theta + \alpha b^2 B \operatorname{Cos}\theta}{Az \operatorname{Cos}\theta - \alpha a^2 C \operatorname{Sin}\theta},$$

et après la réduction:

$$\alpha(a^2 C \operatorname{Sin}^2\theta + b^2 B \operatorname{Cos}^2\theta)\frac{d\varrho}{d\theta} = A\varrho z + \alpha\varrho(b^2B - a^2C)\operatorname{Sin}\theta . \operatorname{Cos}\theta.$$

Cette équation n'est intégrable que dans le cas où l'on a $a=b$, ce qui donne en même temps $B = C$, alors elle devient:

$$\alpha a^2 B \frac{d\varrho}{d\theta} = A\varrho z,$$

tandis que l'on a:

$$z = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - \varrho^2)}, \quad B = a^2c^2(a^4 - (a^2 - c^2)\varrho^2), \quad A = a^4\sqrt{B};$$

ce qui change la dernière équation dans:

$$\frac{d\varrho}{\varrho}\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - c^2)\varrho^2}{a^2 - \varrho^2}} = \frac{a}{\alpha} d\theta,$$

équation connue de la loxodrome sur un ellipsoide de révolution.

2. **Pour passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes aussi rectangulaires, qui a la même origine que le premier**, on fait dans l'équation d'une surface courbe:

$$\left.\begin{aligned} x &= ax' + by' + cz', \\ y &= a'x' + b'y' + c'z', \\ z &= a''x' + b''y' + c''z', \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

où x, y et z sont les coordonnées du premier et x', y' et z' celles du nouveau système, tandis que a, a' et a'' sont les cosinus

des angles directeurs du nouveau axe des x', etc. Il peut arriver que l'on veuille faire cette substitution dans une équation différentielle, où entrent les coëfficients différentiels:

$$p=\frac{dz}{dx},\quad q=\frac{dz}{dy},\quad r=\frac{dp}{dx},\quad s=\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx},\quad t=\frac{dq}{dy},\ \text{etc.};$$

il s'agit de savoir ce que l'on doit alors substituer à ces symboles, en faisant de même dans le nouveau système:

$$p'=\frac{dz'}{dx'},\quad q'=\frac{dz'}{dy'},\quad r'=\frac{dp'}{dx'},\quad s'=\frac{dp'}{dy'}=\frac{dq'}{dx'},\quad t'=\frac{dq'}{dy'},\ \text{etc.};$$

et à cet effet il faut exprimer p, q, r, etc. en fonctions de p', q', r', etc. Si dans les formules (3) on change les quantités de l'une des deux lignes suivantes dans leurs correspondantes de l'autre,

(4)

$$\begin{matrix} x & y & z & a & b & c & a' & b' & c' & a'' & b'' & c'' & p & q & r & s & t \\ x' & y' & z' & a & a' & a'' & b & b' & b'' & c & c' & c'' & p' & q' & r' & s' & t' \end{matrix}$$

on obtient leurs inverses:

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + a'y + a''z, \\ y' &= bx + b'y + b''z, \\ z' &= cx + c'y + c''z; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5)$$

tandis-que l'on a entre les quantités a, b, c, etc. les six rélations:

$$\left.\begin{aligned} a^2+a'^2+a''^2&=1 \qquad & ab+a'b'+a''b''&=0 \\ b^2+b'^2+b''^2&=1 \qquad & ac+a'c'+a''c''&=0 \\ c^2+c'^2+c''^2&=1 \qquad & bc+b'c'+b''c''&=0 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

dont on déduit de la même manière les inverses:

$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=1 \qquad & aa'+bb'+cc'&=0 \\ a'^2+b'^2+c'^2&=1 \qquad & aa''+bb''+cc''&=0 \\ a''^2+b''^2+c''^2&=1 \qquad & a'a''+b'b''+c'c''&=0 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

et ces rélations ont encore pour conséquences:

(8)

$$\begin{aligned} &ab'-a'b=c'' \qquad & &a'b''-b'a''=c \qquad & &a''b-ab''=c' \\ &bc'-b'c=a'' \qquad & &b'c''-b''c'=a \qquad & &b''c-bc''=a' \\ &ca'-c'a=b'' \qquad & &c'a''-c''a'=b \qquad & &c''a-ca''=b' \end{aligned}$$

qui restent les mêmes quand on y fait le changement indiqué ci-dessus. On peut trouver directement ces dernières de la manière suivante. Supposons que les deux systèmes d'axes rectangulaires soient pris dans le même ordre, de sorte qu'en faisant tourner un des systèmes autour de l'origine commune o, on puisse faire coïncider les directions des x, y, z respectivement avec celles des x', y' et z' positifs. Si alors on prend, à partir de l'origine o, sur les directions positives des x' et des y', des longueurs ox' et oy' égales à l'unité, et qu'on joigne les extrémités x' et y', on aura un triangle rectangle $x'oy'$, dont la surface est $\frac{1}{2}$ et la surface de sa projection sur le plan xy sera c'', si l'angle qui a c'' pour cosinus est aigu. Dans ce cas aussi les projections de ox' et oy' sur le plan xy seront entre-elles dans le même ordre que les axes ox et oy; et, remarquant que les coordonnées de la projection du point x' parallèle à ces axes sont respectivement a et a', tandis que celles du point y' sont b et b', on aura dans tous les cas pour la surface de la projection du triangle $x'oy'$ sur xy:

$$\tfrac{1}{2}\{bb'+(a-b)(a'+b')-aa'\} \quad (9)$$

ce qui se réduit à:

$$\tfrac{1}{2}(ab'-a'b);$$

égalant donc les deux expressions de la surface de la projection on obtient

$$ab'-a'b=c'',$$

qui est la première des relations (3). Si l'angle qui a c'' pour cosinus était obtus, la surface de la projection, qui doit être une quantité positive, serait $-\frac{1}{2}c''$, mais dans ce cas aussi les projections de ox' et oy' sur xy seraient entre-elles dans un ordre inverse de celle des axes ox et oy, de sorte qu'il faudrait en même temps changer le signe de (9).

De la première des relations (8) on déduit les autres: premièrement, en remarquant que les quantités a, b, c se succèdent dans l'ordre b, c, a et c, a, b, de sorte que l'on peut changer dans cette première relation a en b, b en c, c en a et aussi a en c, b en a, c en b, ce qui donne la deuxième et la troisième relation de la première colonne; secondement, en remarquant que les groupes (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') se succèdent dans l'ordre $(a'b'c')$, $(a''b''c'')$, (abc) et $(a''b''c'')$, (abc), $(a'b'c')$, de sorte que l'on peut augmenter chaque lettre d'un accent, à condition d'effacer tous les accents lorsque leur nombre deviendrait trois, ce qui donne les relations de la deuxième et de la

troisième colonne. Supposons maintenant qu'une fonction $F(x, y, z)$ se change en $\varphi(x', y', z')$, lorsqu'on y substitue à x, y, z les valeurs (3), alors on aura par la différentiation de fonctions de fonctions:

$$\frac{dF}{dx}=\frac{d\varphi}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dx}+\frac{d\varphi}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx}+\frac{d\varphi}{dz'}\cdot\frac{dz'}{dx} \qquad \frac{d\varphi}{dx'}=\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dx'}+\frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dx'}+\frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dx'}$$

$$\frac{dF}{dy}=\frac{d\varphi}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dy}+\frac{d\varphi}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dy}+\frac{d\varphi}{dz'}\cdot\frac{dz'}{dy} \qquad \frac{d\varphi}{dy'}=\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dy'}+\frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dy'}+\frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dy'}$$

$$\frac{dF}{dz}=\frac{d\varphi}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dz}+\frac{d\varphi}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dz}+\frac{d\varphi}{dz'}\cdot\frac{dz'}{dz} \qquad \frac{d\varphi}{dz'}=\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dz'}+\frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dz'}+\frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dz'}.$$

Dans ces différentiations x, y, z sont considerées comme des variables indépendantes entre elles, et de même elles ne supposent aucune liaison entre x', y' et z', de sorte que les valeurs (5) donnent pour la première colonne:

$$\frac{dx'}{dx}=a, \quad \frac{dx'}{dy}=a', \quad \frac{dx'}{dz}=a'', \quad \frac{dy'}{dx}=b, \ldots \text{ etc.},$$

et les valeurs (3) pour la seconde colonne:

$$\frac{dx}{dx'}=a, \quad \frac{dx}{dy'}=b, \quad \frac{dx}{dz'}=c, \quad \frac{dy}{dx'}=a', \ldots \text{ etc.};$$

et par conséquent l'on aura:

(10)

$$\frac{dF}{dx}=a\,\frac{d\varphi}{dx'}+b\,\frac{d\varphi}{dy'}+c\,\frac{d\varphi}{dz'}, \qquad \frac{d\varphi}{dx'}=a\frac{dF}{dx}+a'\frac{dF}{dy}+a''\frac{dF}{dz},$$

$$\frac{dF}{dy}=a'\frac{d\varphi}{dx'}+b'\frac{d\varphi}{dy'}+c'\frac{d\varphi}{dz'}, \qquad \frac{d\varphi}{dy'}=b\frac{dF}{dx}+b'\frac{dF}{dy}+b''\frac{dF}{dz},$$

$$\frac{dF}{dz}=a''\frac{d\varphi}{dx'}+b''\frac{d\varphi}{dy'}+c''\frac{d\varphi}{dz'}, \qquad \frac{d\varphi}{dz'}=c\frac{dF}{dx}+c'\frac{dF}{dy}+c''\frac{dF}{dz}.$$

Mais en considérant z comme fonction de x et de y, donnée par l'équation $F(x, y, z)=0$, z' sera une fonction de x' et de y', donnée par l'équation $\varphi(x', y', z')=0$, et l'on aura:

$$\left.\begin{aligned} p=\frac{dz}{dx}&=-\frac{dF}{dx}:\frac{dF}{dz}, \quad q=-\frac{dF}{dy}:\frac{dF}{dz}, \\ p'=\frac{dz'}{dx'}&=-\frac{d\varphi}{dx'}:\frac{d\varphi}{dz'}, \quad q'=-\frac{d\varphi}{dy'}:\frac{d\varphi}{dz'}; \end{aligned}\right\} (11)$$

de sorte qu'en divisant la première et la seconde équation de la première colonne (10) par la troisième, et divisant les deux termes de la fraction du second membre par $\frac{d\varphi}{dz'}$, on trouvera, en ayant égard aux relations (11):

$$p=-\frac{ap'+bq'-c}{a''p'+b''q'-c''},\quad q=-\frac{a'p'+b'q'-c'}{a''p'+b''q'-c''}\qquad (12)$$

et opérant de la même manière avec les équations de la seconde colonne (10), ayant égard aux relations (11), on trouve les inverses:

$$p'=-\frac{ap+a'q-a''}{cp+c'q-c''},\quad q'=-\frac{bp+b'q-b''}{cp+c'q-c''}.\qquad (13)$$

Différentiant la première formule (12) par rapport à x, on a:

$$\frac{dp}{dx}=r=-\frac{(a''p'+b''q'-c'')(a\frac{dp'}{dx}+b\frac{dq'}{dx})-(ap'+bq'-c)(a''\frac{dp'}{dx}+b''\frac{dq'}{dx})}{(a''p'+b''q'-c'')^2}$$

ou

$$r=\frac{\{(a''b-ab'')q'+(c''a-ca'')\}\frac{dp'}{dx}-\{(a''b-ab'')p'+(b''c-bc'')\}\frac{dq'}{dx}}{(a''p'+b''q'-c'')^2}$$

et, en vertu des relations (3):

$$r=\frac{(c'q'+b')\frac{dp'}{dx}-(c'p'+a')\frac{dq'}{dx}}{(a''p'+b''q'-c'')^2}.\qquad (14)$$

Mais on a:

$$\frac{dp'}{dx}=\frac{dp'}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dx}+\frac{dp'}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx},\quad \frac{dq'}{dx}=\frac{dq'}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dx}+\frac{dq'}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx}$$

où il faut considérer z et z' comme des variables dépendantes, de sorte que maintenant les équations (5) donnent:

$$\frac{dx'}{dx}=a+a''\frac{dz}{dx}=a+a''p,\quad \frac{dy'}{dx}=b+b''\frac{dz}{dx}=b+b''p$$

ce qui change les précédentes dans:

$$\frac{dp'}{dx}=r'(a+a''p)+s'(b+b''p),\quad \frac{dq'}{dx}=s'(a+a''p)+t'(b+b''p);$$

mais la valeur (12) de p donne:

$$a + a''p = \frac{(ab'' - a''b)q' + (a''c - ac'')}{a''p' + b''q' - c''} = -\frac{c'q' + b'}{a''p' + b''q' - c''},$$

$$b + b''p = \frac{(a''b - ab'')p' + (b''c - bc'')}{a''p' + b''q' - c''} = \frac{c'p' + a'}{a''p' + b''q' - c''};$$

de sorte que les dernières équations deviennent:

$$\frac{dp'}{dx} = \frac{-r'(c'q'+b') + s'(c'p'+a')}{a''p' + b''q' - c''}, \quad \frac{dq'}{dx} = \frac{-s'(c'q'+b') + t'(c'p'+a')}{a''p' + b''q' - c''},$$

et enfin en portant ces valeurs dans (14) on trouvera la première des trois formules suivantes:

(15)

$$r = \frac{(c'q'+b')^2 r' - 2(c'q'+b')(c'p'+a')s' + (c'p'+a')^2 t'}{(a''p' + b''q' - c'')^3},$$

$$s = \frac{\left\{\begin{array}{c}(c'q'+b')(cq'+b)r' - [(cq'+b)(c'p'+a') + (c'q'+b')(cp'+a)]s' \\ + (c'p'+a')(cp'+a)t'\end{array}\right\}}{(a''p' + b''q' - c'')^3},$$

$$t = -\frac{(cp'+b)^2 r' - 2(cq'+b)(cp'+a)s' + (cp'+a)^2 t'}{(a''p' + b''q' - c'')^3};$$

dont les deux dernières se trouvent de la même manière, en différentiant p ou q par rapport à y ou x et q par rapport à y.

Echangeant entre elles les quantités des deux lignes (4), on trouve les inverses:

(16)

$$r' = -\frac{(b''q+b')^2 r - 2(b''q+b')(b''p+b)s + (b''p+b)^2 t}{(cp + c'q - c'')^3},$$

$$s' = \frac{\left\{\begin{array}{c}(b''q+b')(a''q+a')r - [(a''q+a')(b''p+b) + (b''q+b')(a''p+a)]s \\ + (a''p+a)(b''p+b)t\end{array}\right\}}{(cp + c'q - c'')^3},$$

$$t' = -\frac{(a''q+a')^2 r - 2(a''q+a')(a''p+a)s + (a''p+a)^2 t}{(cp + c'q - c'')^3}.$$

Multipliant les membres correspondants de celles des équations (10) qui sont écrites dans une même ligne horizontale, et divisant les produits par $\frac{dF}{dz} \cdot \frac{d\varphi}{dz}$, on trouve encore les relations:

de sorte qu'en divisant la première et la seconde équation de la première colonne (10) par la troisième, et divisant les deux termes de la fraction du second membre par $\frac{d\varphi}{dz'}$, on trouvera, en ayant égard aux relations (11):

$$p=-\frac{ap'+bq'-c}{a''p'+b''q'-c''},\quad q=-\frac{a'p'+b'q'-c'}{a''p'+b''q'-c''}\tag{12}$$

et opérant de la même manière avec les équations de la seconde colonne (10), ayant égard aux relations (11), on trouve les inverses:

$$p'=-\frac{ap+a'q-a''}{cp+c'q-c''},\quad q'=-\frac{bp+b'q-b''}{cp+c'q-c''}.\tag{13}$$

Différentiant la première formule (12) par rapport à x, on a:

$$\frac{dp}{dx}=r=-\frac{(a''p'+b''q'-c'')(a\frac{dp'}{dx}+b\frac{dq'}{dx})-(ap'+bq'-c)(a''\frac{dp'}{dx}+b''\frac{dq'}{dx})}{(a''p'+b''q'-c'')^2}$$

ou

$$r=\frac{\{(a''b-ab'')q'+(c''a-ca'')\}\frac{dp'}{dx}-\{(a''b-ab'')p'+(b''c-bc'')\}\frac{dq'}{dx}}{(a''p'+b''q'-c'')^2}$$

et, en vertu des relations (3):

$$r=\frac{(c'q'+b')\frac{dp'}{dx}-(c'p'+a')\frac{dq'}{dx}}{(a''p'+b''q'-c'')^2}.\tag{14}$$

Mais on a:

$$\frac{dp'}{dx}=\frac{dp'}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dx}+\frac{dp'}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx},\quad \frac{dq'}{dx}=\frac{dq'}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dx}+\frac{dq'}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx},$$

où il faut considérer z et z' comme des variables dépendantes, de sorte que maintenant les équations (5) donnent:

$$\frac{dx'}{dx}=a+a''\frac{dz}{dx}=a+a''p,\quad \frac{dy'}{dx}=b+b''\frac{dz}{dx}=b+b''p$$

ce qui change les précédentes dans:

$$\frac{dp'}{dx}=r'(a+a''p)+s'(b+b''p),\quad \frac{dq'}{dx}=s'(a+a''p)+t'(b+b''p);$$

mais la valeur (12) de p donne:

$$a+a''p=\frac{(ab''-a''b)q'+(a''c-ac'')}{a''p'+b''q'-c''}=-\frac{c'q'+b'}{a''p'+b''q'-c''},$$

$$b+b''p=\frac{(a''b-ab'')p'+(b''c-bc'')}{a''p'+b''q'-c''}=\frac{c'p'+a'}{a''p'+b''q'-c''};$$

de sorte que les dernières équations deviennent:

$$\frac{dp'}{dx}=\frac{-r'(c'q'+b')+s'(c'p'+a')}{a''p'+b''q'-c''},\quad \frac{dq'}{dx}=\frac{-s'(c'q'+b')+t'(c'p'+a')}{a''p'+b''q'-c''},$$

et enfin en portant ces valeurs dans (14) on trouvera la première des trois formules suivantes:

(15)

$$r=-\frac{(c'q'+b')^2r'-2(c'q'+b')(c'p'+a')s'+(c'p'+a')^2t'}{(a''p'+b''q'-c'')^3},$$

$$s=\frac{\left\{\begin{array}{c}(c'q'+b')(cq'+b)r'-[(cq'+b)(c'p'+a')+(c'q'+b')(cp'+a)]s'\\+(c'p'+a')(cp'+a)t'\end{array}\right\}}{(a''p'+b''q'-c'')^3},$$

$$t=-\frac{(cp'+b)^2r'-2(cq'+b)(cp'+a)s'+(cp'+a)^2t'}{(a''p'+b''q'-c'')^3};$$

dont les deux dernières se trouvent de la même manière, en différentiant p où q par rapport à y ou x et q par rapport à y.

Echangeant entre elles les quantités des deux lignes (4), on trouve les inverses:

(16)

$$r'=-\frac{(b''q+b')^2r-2(b''q+b')(b''p+b)s+(b''p+b)^2t}{(cp+c'q-c'')^3},$$

$$s'=\frac{\left\{\begin{array}{c}(b''q+b')(a''q+a')r-[(a''q+a')(b''p+b)+(b''q+b')(a''p+a)]s\\+(a''p+a)(b''p+b)t\end{array}\right\}}{(cp+c'q-c'')^3},$$

$$t'=-\frac{(a''q+a')^2r-2(a''q+a')(a''p+a)s+(a''p+a)^2t}{(cp+c'q-c'')^3}.$$

Multipliant les membres correspondants de celles des équations (10) qui sont écrites dans une même ligne horizontale, et divisant les produits par $\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\varphi}{dz}$, on trouve encore les relations:

de sorte qu'en divisant la première et la seconde équation de la première colonne (10) par la troisième, et divisant les deux termes de la fraction du second membre par $\frac{d\varphi}{dz'}$, on trouvera, en ayant égard aux relations (11):

$$p=-\frac{ap'+bq'-c}{a''p'+b''q'-c''},\quad q=-\frac{a'p'+b'q'-c'}{a''p'+b''q'-c''} \qquad (12)$$

et opérant de la même manière avec les équations de la seconde colonne (10), ayant égard aux relations (11), on trouve les inverses:

$$p'=-\frac{ap+a'q-a''}{cp+c'q-c''},\quad q'=-\frac{bp+b'q-b''}{cp+c'q-c''}. \qquad (13)$$

Différentiant la première formule (12) par rapport à x, on a:

$$\frac{dp}{dx}=r=-\frac{(a''p'+b''q'-c'')(a\frac{dp'}{dx}+b\frac{dq'}{dx})-(ap'+bq'-c)(a''\frac{dp'}{dx}+b''\frac{dq'}{dx})}{(a''p'+b''q'-c'')^2}$$

ou

$$r=\frac{\{(a''b-ab'')q'+(c''a-ca'')\}\frac{dp'}{dx}-\{(a''b-ab'')p'+(b''c-bc'')\}\frac{dq'}{dx}}{(a''p'+b''q'-c'')^2}$$

et, en vertu des relations (3):

$$r=\frac{(c'q'+b')\frac{dp'}{dx}-(c'p'+a')\frac{dq'}{dx}}{(a''p'+b''q'-c'')^2}. \qquad (14)$$

Mais on a:

$$\frac{dp'}{dx}=\frac{dp'}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dx}+\frac{dp'}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx},\quad \frac{dq'}{dx}=\frac{dq'}{dx}\cdot\frac{dx'}{dx}+\frac{dq'}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx}.$$

où il faut considérer z et z' comme des variables dépendantes, de sorte que maintenant les équations (5) donnent:

$$\frac{dx'}{dx}=a+a''\frac{dz}{dx}=a+a''p,\quad \frac{dy'}{dx}=b+b''\frac{dz}{dx}=b+b''p$$

ce qui change les précédentes dans:

$$\frac{dp'}{dx}=r'(a+a''p)+s'(b+b''p),\quad \frac{dq'}{dx}=s'(a+a''p)+t'(b+b''p);$$

mais la valeur (12) de p donne:

$$R'^2(r't'-s'^2)-R'((1+q'^2)r'-2p'q's'+(1+p'^2)t')\sqrt{(1+p'^2+q'^2)}$$
$$+(1+p'^2+q'^2)^2=0,$$

devront être égales, on en conclut que les coëfficients correspondants dans les deux équations ne différeront entre-eux que par un facteur commun N, c'est-à-dire que l'on aura:

(21)

$$\frac{rt-s^2}{r't'-s'^2}=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+q'^2)r'-2p'q's'+(1+p'^2)t'}\cdot\frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{\sqrt{(1+p'^2+q'^2)}}$$
$$=\frac{(1+p^2+q^2)^2}{(1+p'^2+q'^2)^2}=N,$$

où l'on a, en vertu de (20):

$$N=\left(\frac{d\varphi}{dz'}:\frac{dF}{dz}\right)^4;$$

les deux équations de la dernière ligne horizontale (10) donnent

$$\left(\frac{d\varphi}{dz'}:\frac{dF}{dz}\right)^2=\frac{cp+c'q-c''}{a''p'+b''q'-c''}$$

et par la dernière relation (17) on aura

$$\frac{cp+c'q-c''}{a''p'+b''q'-c''}=(cp+c'q-c'')^2=\frac{1}{(a''p'+b''q'-c'')^2},$$

donc

$$N=(cp+c'q-c'')^4=\frac{1}{(a''p'+b''q'-c'')^4}.$$

On vérifiera aisément les formules (21) par des substitutions et des réductions convenables.

3. On sait que sur chaque surface il existe deux systêmes de courbes, telles que des rayons, venant d'un seul point lumineux et réfléchis sur chacune d'elles, forment une surface développable dont l'arrête de rebroussement est une courbe caustique. Généralement par chaque point de la surface passent deux de ces courbes, appelées lignes de réflexion, qui se couperont à angle droit seulement si le rayon incident est dans une des sections principales de la surface, qui passent par le point d'incidence.

Ainsi les points de la surface, où les lignes de réflexion se coupent à angle droit, devront être déterminés par la condition

que l'une des sections principales pour ces points contienne le point lumineux.

Soient à cet effet α, β et γ les coordonnées du point lumineux; x, y et z celles d'un point d'incidence quelconque, alors, en désignant par ξ, η, ζ des coordonnées courantes:

$$\xi - x = A(\eta - y) + B(\zeta - z)$$

sera l'équation d'un plan quelconque passant par le point d'incidence; pour que ce plan contienne aussi le point lumineux, et par conséquent le rayon incident, il faudra avoir entre A et B la relation:

$$\alpha - x = A(\beta - y) + B(\gamma - z),$$

et pour que ce plan contienne aussi la normale au point x, y, z dont les équations sont

$$\xi - x = -p(\zeta - z); \quad \eta - y = -q(\zeta - z)$$

et que par conséquent il puisse être un plan principal, il faudra avoir

$$-p = -Aq + B;$$

ces deux conditions donnent:

$$A = \frac{(\alpha - x) + p(\gamma - z)}{(\beta - y) + q(\gamma - z)}, \quad B = \frac{q(\alpha - x) - p(\beta - y)}{(\beta - y) + q(\gamma - z)}$$

et par conséquent:

$$[(\beta - y) + q(\gamma - z)](\xi - x)$$
$$= [(\alpha - x) + p(\gamma - z)](\eta - y) + [q(\alpha - x) - p(\beta - y)][(\zeta - z)$$

sera l'équation d'un plan normal qui passe par un point quelconque de la surface et par le point rayonnant.

Pour que ce plan soit celui d'une section principale, il faut que sa commune intersection avec le plan tangent au point x, y, z, dont

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

est l'équation, soit tangente à une des lignes de courbures qui passent par le même point. En éliminant ζ ou plutôt $\zeta - z$, on trouve pour l'équation de la projection de cette intersection sur le plan xy:

$$[p(\gamma - z) - pq(\beta - y) + (1 + q^2)(\alpha - x)](\eta - y)$$
$$- [q(\gamma - z) + (1 + p^2)(\beta - y) - pq(\alpha - x)](\xi - x) = 0$$

et la tangente θ de l'angle qu'elle fait avec l'axe des x est ainsi

$$\theta=\frac{q(\gamma-z)+(1+p^2)(\beta-y)-pq(\alpha-x)}{p(\gamma-z)-pq(\beta-y)+(1+q^2)(\alpha-x)};$$

il faut donc que l'équation différentielle des lignes de courbure

$$\frac{dy^2}{dx^2}\{(1+q^2)s-pqt\}+\frac{dy}{dx}\{(1+q^2)r-(1+p^2)t\}-\{(1+p^2)s-pqr\}=0$$

soit satisfaite si l'on y porte pour $\frac{dy}{dx}$ la valeur de θ.

Faisant cette substitution on a:

$$\begin{gathered}[q(\gamma-z)+(1+p^2)(\beta-y)-pq(\alpha-x)]^2[(1+q^2)s-pqt]\\ +[q(\gamma-z)+(1+p^2)(\beta-y)-pq(\alpha-x)]\\ \times[p(\gamma-z)-pq(\beta-y)+(1+q^2)(\alpha-x)][(1+q^2)r-(1+p^2)t]\\ -[p(\gamma-z)-pq(\beta-y)+(1+q^2)(\alpha-x)]^2[(1+p^2)s-pqr]=0,\end{gathered}$$

ce qui se réduit à:

$$\begin{gathered}(22)\\ [(q^2-p^2)s+pq(r-t)](\gamma-z)^2\\ +[\{2q(1+p^2)s-p(1+p^2)t+pr(1-q^2)\}(\beta-y)\\ -\{2p(1+q^2)s-q(1+q^2)r+q(1-p^2)t\}(\alpha-x)](\zeta-z)\\ +[(1+p^2)s-pqr](\beta-y)^2+[r(1+q^2)-t(1+p^2)](\beta-y)(\alpha-x)\\ +[pqt-(1+q^2)s](\alpha-x)^2=0.\end{gathered}$$

Si dans cette équation on porte les valeurs de p, q, r, s, t, tirées de l'équation d'une surface $F(x, y, z)=0$, elle déterminera, conjointement avec cette dernière, une ou plusieurs courbes sur la surface, qui satisfont à la condition posée. On n'aura qu'à éliminer une des coordonnées entre les deux équations, pour avoir la projection de ces courbes sur le plan qui est perpendiculaire à cette coordonnée.

Pour la sphère l'équation (22) devient identique, ce qu'on pouvait prévoir, et on peut encore vérifier qu'en général les courbes qu'elles détermine passent par les ombilics de la surface. En effet pour ces points, s'ils existent, on a les conditions:

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t},$$

avec les-quelles tous les coëfficients entre les crochets deviennent égaux à zéro.

XXI.

Sur le sens géométrique des quantités imaginaires.

Par

Monsieur *G. Zehfuss*,

Dr. phil. à Darmstadt.

Il y a plusieurs géomètres qui ont proposés de répréseuter d'une manière symbolique la quantité $x+y\sqrt{-1}$ par la distance droite entre l'origine des coordonnées et le point, dont les coordonnées rectangulaires sont x et y. Il est vrai, que cette théorie, qui à reçue un grand dégré de perfectionnement le premier par M. Argand (voyez le 6. Vol. des Ann. de Gergonne) en 1806, donne beaucoup de résultats justes, et quelquefois même une voie pour faire de nouvelles découvertes. Mais néanmoins il est facile de se convaincre, que cette théorie est en défaut dans quelques cas, et nous nous bornerons de n'en citer que deux, pour démontrer que le principe fondamental de cette théorie n'est pas nécessairement vrai, à moins qu'on prétende, qu'elle devait conduire toujours à des résultats justes; et que la méthaphysique de cette méthode s'appuie en quelque sorte sur une propriété de l'espace, qui n'a pas lieu nécessairement, mais pour ainsi dire par accident.

1) Si la direction latérale de l'axe des Y par rapport à celle des X produit les quantités simplement imaginaires et de la forme

$y\sqrt{-1}$, il se présente la question: „Quelle sorte de quantités sont representées par la troisième direction latérale Z, rectangulaire aux deux directions des X et des Y?“ On sait, que jusqu'ici on n'a inventé que des quantités réelles et des quantités imaginaires. Les lignes dirigées parallèlement à l'axe des Z devaient donc répresenter un nouveau genre de quantités, dont jusqu'ici on ne peut point du tout se faire une idée. Mais nous croyons, qu'il n'y a pas une telle espèce, et nous allons démontrer, que la théorie ordinaire des quantités géométriquement imaginaires, appliquée conséquemment sur ce cas donné, présente une contradiction rémarquable.

Car la ligne $z=1$ est rectangulaire aux deux lignes $x=1$ et $x=-1$, et par suite sa valeur géométrique devait être $\sqrt{1.-1}=\sqrt{-1}$, mais de la même manière on trouve, parcequ'elle est aussi rectangulaire aux deux lignes $y=\sqrt{-1}$ et $y=-\sqrt{-1}$, qu'elle devait être égale à $\sqrt{\sqrt{-1}.-\sqrt{-1}}=\pm 1$. — Mais si même nous ignorons cette contradiction, nous pouvons trouver une autre raison, que les résultats précédents sont inadmissibles tous les deux. Car si p. E. nous adoptons l'hypothèse, que les lignes dirigées parallèlement à l'axe des Z soient réelles, comme celles qui se trouvent sur l'axe des X, chaque construction géométrique devait donner le même résultat, si nous portions la quantité réelle, l'abscisse x d'un ou de plusieurs points, arbitrairement sur l'axe des X ou sur celle des Z. Mais il est évident, que chaque figure géométrique changera beaucoup de forme, en transportant un ou plusieurs de ses points intégrants de l'axe des X sur celle des Z.

2) Le principe, de désigner chaque quantité géométrique α orthogonale à deux autres directement opposées, $+\alpha$ et $-\alpha$, par $\alpha\sqrt{-1}$, est susceptible aussi d'une application aux arcs de cercle. Concevons un arc de cercle α, décrit d'un rayon égal à l'unité, et qui aie pour centre l'origine O des coordonnées. A partir du bout A du rayon 1, nous décrivons de même un arc de cercle opposé à l'arc α, et qui est pour ainsi dire la prolongation en sens contraire de l'arc α, et désigné par $-\alpha$. — Maintenant nous ferons faire le système de ces deux arcs une révolution autour de leur rayon commun, ou autour de l'axe des X, de sorte que le plan renfermant le rayon 1 et l'arc α, ou le plan des $(+X, +Y)$, parcourt dans ses diverses positions tout l'espace. Mais entre ces positions il y en aura une orthogonale au plan primitif XY, c'est-à-dire celle du plan XZ, et dans cette position nous aurons un arc α orthogonal aux deux

arcs primitifs $+\alpha$ et $-\alpha$, et qui d'après le principe fondamental des quantités géométriquement imaginaires serait à désigner par $\alpha\sqrt{-1}$. Maintenant il est clair, que quoique le sinus prend diverses positions dans l'espace, le cosinus de l'arc α, pendant la rotation de cet arc, conserve toujours la même position sur l'axe des X. Si donc nous régardons la position intermédiaire ci-dessus mentionnée de larc α, nous avons $\cos\alpha = \cos(\alpha\sqrt{-1})$, équation évidemment fausse.

XXII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Doctor Völler in Saalfeld.

1) Durch einen Punkt in einem Kreise lassen sich unendlich viele Sehnen legen. Unter allen diesen Chorden ist — wie die Planimetrie lehrt — der Durchmesser die grösste, diejenige, welche in diesem Punkte halbirt wird, die kleinste, und alle andern sind kleiner, als die erstere, aber grösser, als die letztere.

Wenn nun die Grösse des Durchmessers mit a, die der kleinsten Sehne mit b bezeichnet wird, so ist der Neigungswinkel zu bestimmen, welchen diejenige Chorde mit dem Durchmesser bildet, die, durch den angenommenen Punkt gehend, gleich $\frac{a+b}{2}$.

2) Ist der Neigungswinkel einer durch den gegebenen Punkt gehenden Chorde gleich 45^0, wie gross ist dann die absolute Länge dieser Linie?

3) Unter welchem Winkel schneidet ferner diejenige Sehne den Durchmesser in dem angenommenen Punkte, deren absolute Länge $a-b$, und wann ist überhaupt diese Aufgabe noch möglich?

Es versteht sich von selbst, dass in allen diesen Aufgaben für die Grössen a und b bestimmte Zahlenwerthe beigefügt werden.

XXIII.

Miscellen.

Von dem Herausgeber.

Der allgemeiner vorzüglich durch seine Berechnung von π bekannte englische Mathematiker Abraham Sharp war in vielen Beziehungen ein so wunderlicher Mann, dass die folgenden Notizen über denselben wohl von einigem Interesse sein dürften:

Abraham Scharp, 1651 zu Little-Horton in Yorkshire von angesehenen Eltern geboren, kam zu einem Kaufmann in Manchester in die Lehre, zeigte aber schon frühzeitig einen so entschiedenen Hang für exakte Wissenschaften, dass er den Kaufmannsstand bald aufgab und in Liverpool eine Schule errichtete, wo er sich einzig mit Mathematik und Astronomie beschäftigte. Zufällig lernte er hier einen Londoner Kaufmann kennen, in dessen Hause der damals schon als Astronom bekannte Flamsteed wohnte; um in die Nähe dieses Mannes zu kommen, engagirte sich Scharp bei dem Kaufmann als Buchhalter, und so entstand seine Bekanntschaft mit Flamsteed, mit dem er dann bis an dessen Tod in freundschaftlichen Verhältnissen blieb.

Er kam im Jahre 1688 als Gehülfe auf die berühmte Greenwicher Sternwarte, wo er im Beobachten, Rechnen, Verfertigung von Instrumenten und Construction des Himmels-Atlas die wesentlichsten Dienste leistete. Allein die angestrengte Thätigkeit untergrub seine Gesundheit, so dass er sich genöthigt sah, in seine väterliche Wohnung nach Horton zurückzugehen, wo er bald selbst eine Sternwarte errichtete und mit zahlreichen, durchaus selbst verfertigten Instrumenten versah. Seine 1717 herausgegebene „Treatise of Geometry improved“ hat noch jetzt für den Mathematiker Werth, einmal durch die darinnen befindlichen sehr genauen Tafeln für Kreisbogen und für die Logarithmen bis 1100 auf 61 Decimalen, und dann durch seine eigenthümliche Behandlungsart körperlicher Vielecke. Alle dabei befindlichen Figu-

ren, die er selbst zeichnete und in Kupfer stach, besitzen eine ungemeine Nettigkeit und Schönheit. Auch das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser berechnete er im Jahre 1699 zu seinem Vergnügen auf 72 Decimalen, und fand im Laufe seiner zahlreichen numerischen Rechnungen für die Construction von logarithmischen und trigonometrischen Tafeln manche wesentliche Verbesserungen. Seine Berechnung der Sinus, Tangenten und Secanten für jede Secunde der ersten Minute, befinden sich noch in den Archiven der königlichen Societät, und sind besonders auch wegen der grossen Eleganz seiner Handschrift merkwürdig.

Mit Flamsteed, Newton, Halley, Wallis, Hodgson, Sherwin und mehreren anderen Gelehrten der damaligen Zeit stand Scharp im Briefwechsel, wie die bei seinen Verwandten vorhandenen Briefe zeigen, die darum noch merkwürdiger sind, weil Scharp meistens auf die leeren Stellen der erhaltenen Briefe seine Antwort im Concept schrieb. Er war als geschickter und unermüdlicher Rechner so allgemein bekannt, dass Flamsteed, Halley, Moore und mehrere der damaligen englischen Mathematiker sich jederzeit an Scharp wandten, um schwierige Rechnungen vollendet zu haben.

In seinem häuslichen Leben hatte er manches Eigenthümliche, was wohl einer Erwähnung verdient. Scharp blieb unverheirathet und führte ein ganz abgesondertes, fast einsiedlerisches Leben. Vier oder fünf Stuben, die er in seinem Hause zu Little-Horton zu verschiedenen wissenschaftlichen Zwecken bestimmt hatte, durften ohne seine ausdrückliche Erlaubniss von keinem seiner Verwandten betreten werden; die einzigen Fremden, die er zuweilen sah, waren zwei Einwohner von Bradford, ein Mathematiker und ein unterrichteter Apotheker, denen er seinen Wunsch, sie zu sehen, verabredetermassen dadurch zu erkennen gab, dass er einen Stein gegen einen bestimmten Platz der Mauer seines Hauses rieb. (In Hutton's mathemat. Dict. T. II. p. 387. heisst es: „these were admitted, when he chose to be seen by them, by the signal of rubbing a stone against a certain part of the outside wall of his house".) Sonntags besuchte er jederzeit die Kirche (the dissenting chapel) zu Bradford, und war dann allemal mit einer Menge half pence versehen, die er sich einzeln ohne Rückblick und ohne Frage aus den auf den Rücken gelegten Händen nehmen liess. In seinen Mahlzeiten herrschte keine bestimmte Ordnung; in dem Zimmer, wo er gewöhnlich arbeitete, war eine kleine Oeffnung mit einem Schieber angebracht, auf den sein Bedienter, ohne ein Wort zu sagen, die Speisen setzte, die aber oft am Abend unberührt wieder weggetragen wurden, wenn

irgend eine interessante Arbeit ihm keine Unterbrechung gestattet hatte. Merkwürdig ist es, dass das ausgezeichnete mechanische Genie unsers Abraham Scharp sich in seiner Familie weiter fortpflanzte, indem er ein Grossonkel des berühmten Ramsden war. Er starb am 18. Juli 1742 und erreichte trotz einer schwächlichen Gesundheit das hohe Alter von 91 Jahren.

Schreiben des Herrn Professor Dr. Wolfers in Berlin an den Herausgeber.

Am Schlusse des dritten Theiles von Euler's Integral-Rechnung befindet sich die Abhandlung: Evolutio casuum prorsus singularium circa integrationem aequationum differentialium. In §. 3. behandelt der Verfasser einige Differential-Gleichungen, worunter die Gleichung

$$\frac{dx}{a^2+x^2}+\frac{dy}{a^2+y^2}=0$$

sich befindet. Aus deren gewöhnlichem Integrale

$$\text{arc.tg.}x+\text{arc.tg.}y=\text{Const.}$$

findet man, trotz Euler's „non tam facile", leicht die algebraische Form des Integrales

$$\frac{x+y}{a^2-xy}=C.$$

Im §. 6. sagt er aber, dass man dieses Integral ohne Zweifel hätte finden können, ehe es bekannt war, dass $\int\frac{dx}{1+x^2}=\text{arc.tg.}x$ sei. Seine Worte lauten: „eademque integratio sine dubio inveniri potuisset, antequam constaret formulae $\frac{dx}{1+x^2}$ integrale esse arcum circuli tangenti x respondentem." Hierdurch wurde ich darauf hingewiesen, den integrabel machenden Multiplicator der Gleichung

$$\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0$$

zu suchen, ohne vorher durch Kreisbogen zu gehen. Es wird aber in der That, wenn ich die Function kurz durch dF bezeichne:

$$dF=\frac{(1+y^2)dx+(1+x^2)dy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{d.(x+y)+y(d.xy-xdy)+x(d.xy-ydx)}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$=\frac{d.(x+y)+(x+y)d.xy-xy(dx+dy)}{(1+x^2)(1+y^2)},$$

$$dF = \frac{(1-xy)d.(x+y)-(x+y)d.(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Aus dieser Form sieht man sogleich, dass dieselbe integrabel wird, wenn man sie in

$$M = \frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1-xy)^2}$$

multiplicirt, worauf dann

$$\int MdF = \frac{x+y}{1-xy}$$

wird.

Da diess so gut gelungen war, versuchte ich es, auch die ähnliche Form

$$dF = \frac{dx}{1-x^2} + \frac{dy}{1-y^2},$$

ohne nach der gewöhnlichen Weise durch Logarithmen zu gehen, zu integriren. Es wird in der That

$$\begin{aligned} dF &= \frac{(1-y^2)dx + (1-x^2)dy}{(1-x^2)(1-y^2)} \\ &= \frac{d.(x+y) - y(d.xy - xdy) - x(d.xy - ydx)}{(1-x^2)(1-y^2)} \\ &= \frac{d.(x+y) - (x+y)d.xy + xy(dx+dy)}{(1-x^2)(1-y^2)} \\ &= \frac{(1+xy)d.(x+y) - (x+y)d.(1+xy)}{(1-x^2)(1-y^2)}. \end{aligned}$$

Hier wird daher der integrabel machende Multiplicator

$$M = \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(xy+1)^2} \text{ und dann } \int MdF = \frac{x+y}{xy+1}$$

sein. Diese Form stimmt mit derjenigen überein, welche man erhalten würde, wenn man aus der gegebenen Gleichung

$$\frac{dx}{1-x^2} + \frac{dy}{1-y^2} = 0 \text{ zunächst als Integral } \log.\frac{1+x}{1-x} + \log.\frac{1+y}{1-y} = \text{Const.}$$

ableitete und diese Gleichung auf eine algebraische Form brächte.

Berichtigung

zu dem Aufsatze in Thl. XXX. Nr. XXI. des Archivs über $\int_0^\infty \frac{\sin x^m}{x^n} dx$.

S. 181. oben und S. 182. oben statt die gesonderten Integrationen lies die geforderten Integrationen.

XXIV.

Ueber die Inhaltsberechnung der Körper.

Von

Herrn Doctor *Ligowski*,

Lehrer an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und am See-Kadetten-Institut zu Berlin.

Die folgenden Entwickelungen sollen eine Fortsetzung des, im 26sten Bande des Archivs gegebenen Beitrags zur Inhaltsberechnung der Körper sein.

Es wird zunächst das Volumen eines Körpers gesucht, dessen Durchschnittsfläche in der Höhe x in Bezug auf x vom $n$ten Grade ist; alsdann werden mit Hülfe des gefundenen Resultats Formeln für das Volumen solcher Körper entwickelt, in welchen nur die Höhe und eine Anzahl Durchschnittsflächen vorkommen. Die sich ergebenden Ausdrücke stimmen mit den Formeln für die mechanische Quadratur, sowohl der gewöhnlichen, als auch der von Gauss gefundenen, überein.

Es sei die Durchschnittsfläche eines Körpers in der Höhe x gegeben durch

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots a_n x^n.$$

Von $x=0$ bis $x=x$ sei die grösste aller Durchschnittsflächen G und die kleinste K, dann ist, wenn V das Volumen des Körperstücks von der Höhe x bezeichnet:

$$G.x > V > K.x.$$

Da $f(x)$ eine stetige Function ist, so wird auf der Strecke x eine Durchschnittsfläche M liegen, welche so beschaffen ist, dass

$$V = M . x$$

ist. Diese Fläche M ist eine Function von x, und zwar von der Form:

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \dots A_n x^n,$$

daher

$$V = A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3 \dots A_n x^{n+1}.$$

Um die Coeffizienten $A_0, A_1, \dots, A_n$ zu bestimmen, betrachten wir ein zweites Stück des Körpers von der Höhe $y > x$, und bezeichnen das Volumen desselben durch V', dann ist:

$$V' = A_0 y + A_1 y^2 + A_2 y^3 \dots A_n y^{n+1}$$

und

$$V' - V = A_0 (y - x) + A_1 (y^2 - x^2) + A_2 (y^3 - x^3) \dots A_n (y^{n+1} - x^{n+1}).$$

Es sei $f(y) > f(x)$, dann lässt sich $y - x$ immer so klein wählen, dass

$$(y - x) f(y) > V' - V > (y - x) f(x)$$

oder

$$f(y) > \frac{V' - V}{y - x} > f(x)$$

ist. Wäre $f(y) < f(x)$, dann erhielte man:

$$f(y) < \frac{V' - V}{y - x} < f(x),$$

d. h. der Quotient $\frac{V' - V}{y - x}$ liegt stets zwischen den Werthen von $f(y)$ und $f(x)$, und fällt mit diesen zusammen, wenn $y = x$ wird. Da nun

$$\frac{V' - V}{y - x} = A_0 + A_1 \left(\frac{y^2 - x^2}{y - x}\right) + A_2 \left(\frac{y^3 - x^3}{y - x}\right) + \dots A_n \left(\frac{y^{n+1} - x^{n+1}}{y - x}\right),$$

so ist auch:

$$f(x) = A_0 + 2A_1 x + 3A_2 x^2 + \dots (n+1) A_n x^n.$$

Dieser Ausdruck für $f(x)$ muss aber identisch mit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$$

sein, daher ist

$$A_0 = a_0,$$

$$A_1 = \frac{a_1}{2},$$

$$A_2 = \frac{a_2}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n = \frac{a_n}{n+1},$$

und somit das Volumen

$$V = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \frac{a_3 x^4}{4} + \ldots \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Um kürzere Formeln für das Volumen der betrachteten Körper zu erhalten, setzen wir:

$$V = x(K_0 f(\mu_0 x) + K_1 f(\mu_1 x) + K_2 f(\mu_2 x) + \ldots K_r f(\mu_r x)).$$

Setzt man für $f(\mu_0 x)$, $f(\mu_1 x)$.... die Ausdrücke

$$a_0 + a_1 \mu_0 x + a_2 \mu_0^2 x^2 \ldots a_n \mu_0^n x^n,$$

$$a_0 + a_1 \mu_1 x + a_2 \mu_1^2 x^2 \ldots a_n \mu_1^n x^n, \text{ u. s. w.}$$

ein, und vergleicht den für V angenommenen Ausdruck mit dem vorstehend entwickelten, dann ergeben sich zur Bestimmung der $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_r$ und $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
K_0 + K_1 + K_2 + K_3 \ldots K_r = 1, \\
K_0\mu_0 + K_1\mu_1 + K_2\mu_2 + K_3\mu_3 \ldots K_r\mu_r = \frac{1}{2}, \\
K_0\mu_0^2 + K_1\mu_1^2 + K_2\mu_2^2 + K_3\mu_3^2 \ldots K_r\mu_r^2 = \frac{1}{3}, \\
K_0\mu_0^3 + K_1\mu_1^3 + K_2\mu_2^3 + K_3\mu_3^3 \ldots K_r\mu_r^3 = \frac{1}{4}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
K_0\mu_0^n + K_1\mu_1^n + K_2\mu_2^n + K_3\mu_3^n \ldots K_r\mu_r^n = \frac{1}{n+1}.
\end{array}\right\} \text{(a)}$$

Die Anzahl der Unbekannten ist $2(r+1)$, und da die Anzahl der Gleichungen $n+1$ ist, so muss, damit die Unbekannten bestimmte Werthe erhalten, $2(r+1) = n+1$ sein.

Subtrahirt man bei den Gleichungen (a) jede von der vorhergehenden, und verfährt mit den neu erhaltenen Gleichungen eben

so, und mit den gefundenen Differenzen in derselben Weise, und so weiter, so lange sich subtrahiren lässt, dann erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} K_0+K_1+K_2+K_3\ldots\ldots\ldots\ldots K_r \qquad =1, \\ K_0(1-\mu_0)+K_1(1-\mu_1)+K_2(1-\mu_2)\ldots K_r(1-\mu_r)=\tfrac{1}{2}, \\ K_0(1-\mu_0)^2+K_1(1-\mu_1)^2+K_2(1-\mu_2)^2\ldots K_r(1-\mu_r)^2=\tfrac{1}{3}, \\ K_0(1-\mu_0)^3+K_1(1-\mu_1)^3+K_2(1-\mu_2)^3\ldots K_r(1-\mu_r)^3=\tfrac{1}{4}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_0(1-\mu_0)^n+K_1(1-\mu_1)^n+K_2(1-\mu_2)^n\ldots K_r(1-\mu_r)^n=\frac{1}{n+1}. \end{array}\right\} \text{(b)}$$

Aus der Vergleichung dieser neuen Gleichungen mit den zuerst aufgestellten ergiebt sich, dass je zwei der unbekannten Zahlen μ zur Summe 1 geben, und dass, wenn μ_p und μ_q zwei solche Unbekannte sind, für welche $\mu_p+\mu_q=1$ ist, die Coeffizienten K_p und K_q einander gleich sind. Ferner folgt auch hieraus, dass bei ungerader Anzahl der μ ein Werth von μ gleich $\frac{1}{2}$ ist. Durch diese Eigenschaften der Unbekannten wird die Auflösung der Gleichungen ungemein erleichtert.

Setzt man in den Gleichungen (a) $n=1$, dann ergiebt sich:

$$K_0=1 \text{ und } \mu_0=\tfrac{1}{2};$$

für $n=3$ ist:

$$K_0=K_1=\tfrac{1}{2} \text{ und } \mu_0=\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}),$$

sowie

$$\mu_1=\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{\tfrac{1}{3}});$$

für $n=5$:

$$K_0=K_2=\tfrac{5}{18},\quad K_1=\tfrac{8}{18} \text{ und } \mu_0=\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{\tfrac{3}{5}}),\quad \mu_1=\tfrac{1}{2},\quad \mu_2=\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{\tfrac{3}{5}}).$$

Die Formeln für V sind demnach unter der gemachten Annahme:

1) $f(x)=a_0+a_1x;$

$$V=x.f\left(\frac{x}{2}\right);$$

2) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3,$

$$V=\frac{x}{2}(f(\mu_0x)+f(\mu_1x)),\quad \mu_0=\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}),\quad \mu_1=\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{\tfrac{1}{3}});$$

3) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5,$

$$V=\frac{x}{18}\left(5f(\mu_0x)+8f\left(\frac{x}{2}\right)+5f(\mu_2x)\right),\quad \mu_0=\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{\tfrac{3}{5}}),$$

$$\mu_2=\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{\tfrac{3}{5}}).$$

Vorstehende Formeln stimmen mit den von **Gauss** für die mechanische Quadratur gegebenen überein.

Nimmt man für μ_0 den Werth 0 und für μ_r den Werth 1 an, dann ergeben sich

für $n=1$: $K_0=K_1=\frac{1}{2}$;

„ $n=3$: $K_0=K_2=\frac{1}{6}$, $K_1=\frac{4}{6}$ und $\mu_1=\frac{1}{2}$;

„ $n=5$: $K_0=K_3=\frac{1}{12}$, $K_1=K_2=\frac{5}{12}$;

$\mu_1=\frac{1}{2}(1-\sqrt{\tfrac{1}{5}})$, $\mu_2=\frac{1}{2}(1+\sqrt{\tfrac{1}{5}})$;

und daher:

1) für $f(x)=a_0+a_1x$,

$$V=\frac{x}{2}(f_0+f(x));$$

2) „ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$,

$$V=\frac{x}{6}\left(f(0)+4f\left(\frac{x}{2}\right)+f(x)\right);$$

3) „ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$,

$$V=\frac{x}{12}(f(0)+5f(\mu_1x)+5f(\mu_2x)+f(x)),\quad \mu_1=\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{\tfrac{1}{5}}),\quad \mu_2=\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{\tfrac{1}{5}}).$$

Die Formel 2) ist die bekannte **Simpson'sche** Regel, welche also auch gilt, wenn die Durchschnittsfläche $f(x)$ vom dritten Grade ist. Setzt man $\mu_0=0$, $\mu_1=\frac{1}{5}$, $\mu_3=\frac{4}{5}$ und $\mu_4=1$, dann muss $\mu_2=\frac{1}{2}$ sein, und für die Coeffizienten K_0, K_1,.... ergeben sich:

$$K_0=K_4=\frac{27}{432},\quad K_1=K_3=\frac{125}{432}\ \text{und}\ K_2=\frac{128}{432};$$

und mithin für $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$:

$$V=\frac{x}{432}\left(27f(0)+125f\left(\frac{x}{5}\right)+128f\left(\frac{x}{2}\right)+125f\left(\frac{4x}{5}\right)+27f(x)\right).$$

Unter den unendlich vielen Annahmen, welche sich für die μ_0, μ_1.... machen lassen, betrachten wir noch den Fall, in welchem für μ_0, μ_1, μ_2.... der Reihe nach $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots \frac{r}{n} \ldots$ und 1 gesetzt wird. Dann ergeben sich zur Bestimmung der Unbekannten K_0, K_1, K_2,.... die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
K_0 + K_1 + K_2 + K_3 \ldots\ldots K_n = 1, \\
\frac{1}{n} K_1 + \frac{2}{n} K_2 + \frac{3}{n} K_3 \ldots\ldots K_n = \frac{1}{2}, \\
\left(\frac{1}{n}\right)^2 K_1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 K_2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 K_3 \ldots\ldots K_n = \frac{1}{3}, \\
\left(\frac{1}{n}\right)^3 K_1 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 K_2 + \left(\frac{3}{n}\right)^3 K_3 \ldots\ldots K_n = \frac{1}{4}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left(\frac{1}{n}\right)^n K_1 + \left(\frac{2}{n}\right)^n K_2 + \left(\frac{3}{n}\right)^n K_3 \ldots\ldots K_n = \frac{1}{n+1}.
\end{array}\right\} \quad (c)$$

Setzt man der Reihe nach für n: 1, 2, 3, 4 und 5, so folgt:

1) $K_0 = K_1 = \frac{1}{2}$.

2) $K_0 = K_1 = \frac{1}{6}$, $\quad K_2 = \frac{4}{6}$.

3) $K_0 = K_3 = \frac{1}{8}$, $\quad K_1 = K_2 = \frac{3}{8}$.

4) $K_0 = K_4 = \frac{7}{90}$, $\quad K_1 = K_3 = \frac{32}{90}$, $\quad K_2 = \frac{12}{90}$.

5) $K_0 = K_5 = \frac{19}{288}$, $\quad K_1 = K_4 = \frac{75}{288}$, $\quad K_2 = K_3 = \frac{50}{288}$.

Man hat daher für V folgende Ausdrücke:

1) wenn $f(x) = a_0 + a_1 x$,

$$V = \frac{x}{2}\left(f(0) + f(x)\right);$$

2) „ $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$,

$$V = \frac{x}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x)\right);$$

3) „ $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$,

$$V = \frac{x}{8}\left(f(0) + 3f\left(\frac{x}{3}\right) + 3f\left(\frac{2x}{3}\right) + f(x)\right);$$

4) „ $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$,

$$V = \frac{x}{90}\left(7f(0) + 32f\left(\frac{x}{4}\right) + 12f\left(\frac{x}{2}\right) + 32f\left(\frac{3x}{4}\right) + 7f(x)\right);$$

5) wenn $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$,

$$V = \frac{x}{288}\left(19f(0) + 75f\left(\frac{x}{5}\right) + 50f\left(\frac{2x}{5}\right) + 50f\left(\frac{3x}{5}\right) + 75f\left(\frac{4x}{5}\right) + 19f(x)\right).$$

Diese Formeln entsprechen dann der gewöhnlichen mechanischen Quadratur.

Nimmt man für einige der μ oder für alle bestimmte Werthe an, dann vergrössert sich die Anzahl der in den Formeln vorkommenden Durchschnittsflächen (wenn n dasselbe bleibt), welches für die Berechnung des Volumens unbequemer wird; in dieser Beziehung ist also die zuerst gemachte Annahme die vortheilhafteste.

Der bessern Uebersicht wegen stellen wir die für V gefundenen Formeln zusammen:

I. $f(x) = a_0 + a_1 x$,

1) $V = \frac{x}{2}(f(0) + f(x))$;

2) $V = \frac{x}{2} \cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$;

II. $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$,

1) $V = \frac{x}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x)\right)$;

III. $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$,

1) $V = \frac{x}{2}(f(\mu_0 x) + f(\mu_1 x))$, $\mu_0 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\tfrac{1}{3}})$, $\mu_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}})$;

2) $V = \frac{x}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x)\right)$;

3) $V = \frac{x}{8}\left(f(0) + 3f\left(\frac{x}{3}\right) + 3f\left(\frac{2x}{3}\right) + f(x)\right)$;

IV. $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$,

1) $V = \frac{x}{90}\left(7f(0) + 32f\left(\frac{x}{4}\right) + 12f\left(\frac{x}{2}\right) + 32f\left(\frac{3x}{4}\right) + 7f(x)\right)$;

V. $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$,

1) $V = \frac{x}{18}\left(5f(\mu_0 x) + 8f\left(\frac{x}{2}\right) + 5f(\mu_2 x)\right)$, $\mu_0 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\tfrac{3}{5}})$,

$\mu_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\tfrac{3}{5}})$;

2) $V=\frac{x}{12}(f(0)+5f(\mu_1 x)+5f(\mu_2 x)+f(x))$, $\mu_1=\frac{1}{2}(1-\sqrt{\frac{1}{5}})$,
$\mu_2=\frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{1}{5}})$;

3) $V=\frac{x}{432}\left(27f(0)+125f\left(\frac{x}{5}\right)+128f\left(\frac{x}{2}\right)+125f\left(\frac{4x}{5}\right)+27f(x)\right)$;

4) $V=\frac{x}{288}\left(19f(0)+75f\left(\frac{x}{5}\right)+50f\left(\frac{2x}{5}\right)+50f\left(\frac{3x}{5}\right)\right.$
$\left.+75f\left(\frac{4x}{5}\right)+19f(x)\right)$.

Wendet man die verstehenden Formeln auf Functionen von höheren Graden an, als für welche sie gelten, so erhält man, wenn x sehr klein ist, angenäherte Werthe für das gesuchte Volumen. Diese Annäherungen haben aber keinen Werth, sobald man nicht im Stande ist, ihre Genauigkeit anzugeben. Berechnet man nach den Formeln 1) und 2) in No. III. und No. V. das Volumen eines Körpers, dessen Durchschnittsfläche vom $n$ten Grade ist, und vergleicht die erhaltenen Ausdrücke mit

$$V=a_0 x+\frac{a_1 x^2}{2}+\frac{a_2 x^3}{3}\dots\frac{a_n x^{n+1}}{n+1},$$

so ergiebt sich, dass, wenn von den Formeln 1) und 2) in No. III. und No. V. die eine das Volumen V zu gross giebt, dann die andere ein zu kleines Resultat liefert, so dass also der genaue Werth von V sowohl zwischen

$$\frac{x}{2}(f(\mu_0 x)+f(\mu_1 x)) \text{ und } \frac{x}{6}\left(f(0)+4f\left(\frac{x}{2}\right)+f(x)\right),$$

als auch zwischen

$$\frac{x}{18}\left(5f(\mu_0 x)+8f\left(\frac{x}{2}\right)+5f(\mu_1 x)\right) \text{ und } \frac{x}{12}(f(0)+5f(\mu_1 x)+5f(\mu_2 x)+f(x))$$

liegt.

Wenn x nicht so klein ist, dass eine hinreichende Annäherung erwartet werden kann, dann muss man den Körper in mehrere Stücke zerlegen und auf jedes der Stücke die obigen Formeln anwenden. Theilt man den Körper in zwei Stücke von der Höhe $\frac{x}{2}$, so erhält man aus 1) und 2) in No. III. und No. V. die Näherungsformeln:

(d)

1) $\frac{x}{4}\left(f(\mu_0 \frac{x}{2}) + f(\mu_1 \frac{x}{2}) + f((1+\mu_0)\frac{x}{2}) + f((1+\mu_1)\frac{x}{2})\right)$,

2) $\frac{x}{12}\left(f(0) + 4f\left(\frac{x}{4}\right) + 2f\left(\frac{x}{2}\right) + 4f\left(\frac{3x}{4}\right) + f(x)\right)$,

3) $\frac{x}{36}\left(5f(\mu_0 \frac{x}{2}) + 8f\left(\frac{x}{4}\right) + 5f(\mu_2 \frac{x}{2}) + 5f((1+\mu_0)\frac{x}{2}) + 8f\left(\frac{3x}{4}\right) + 5f((1+\mu_2)\frac{x}{2})\right)$,

4) $\frac{x}{24}\left(f(0) + 5f(\mu_1 \frac{x}{2}) + 5f(\mu_2 \frac{x}{2}) + 2f\left(\frac{x}{2}\right) + 5f((1+\mu_1)\frac{x}{2}) + 5f((1+\mu_2)\frac{x}{2}) + f(x)\right)$.

Der genaue Werth des gesuchten Volumens liegt dann wieder zwischen den Resultaten, welche aus 1) und 2), so wie auch zwischen denen, welche aus 3) und 4) berechnet sind.

Wir wenden die entwickelten Formeln zur Berechnung von

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \text{lognat}\,2$$

an. Die beiden Formeln 1) und 2) in No. III. ergeben:

0,692 und 0,694;

da der genaue Werth zwischen diesen beiden Näherungswerthen liegt, so sind die beiden ersten Dezimalen genau.

Für dasselbe Integral liefern die Formeln 1) und 2) in No. V.:

0,69312 und 0,69318,

also vier Dezimalstellen richtig.

Ferner erhält man aus den Formeln 1) und 2) (d):

0,69308 und 0,69325,

und aus 3) und 4) (d):

0,693146 und 0,693148,

also im ersten Falle drei, im zweiten fünf Stellen richtig.

XXV.

Neue analytische Entwickelung der Theorie der stereographischen Projection, mit neuen Sätzen und Formeln, und neuen Eigenschaften derselben.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Die Theorie der stereographischen Projection ist wegen der Wichtigkeit dieser Entwerfungsart und wegen der grossen Anzahl merkwürdiger Eigenschaften, welche dieselbe besitzt, schon häufig sowohl mittelst der synthetischen, als auch mittelst der analytischen Geometrie entwickelt worden. Indess scheinen mir diese Entwickelungen, namentlich in Bezug auf die mannigfaltigen Anwendungen, welche sich von den nach stereographischer Projection entworfenen Karten machen lassen, nicht allen Anforderungen zu genügen, und überhaupt dem grösseren Theile nach mehr den rein theoretischen, als den praktischen Gesichtspunkt festzuhalten, indem sie hauptsächlich darauf ausgingen, durch möglichst einfache Betrachtungsweisen in grösster Kürze zu den bekanntesten Sätzen zu gelangen, was natürlich auch seinen eigenthümlichen, wohlbegründeten Werth hat, aber nicht immer den praktischen Zwecken vollkommen entspricht, welche insbesondere bei der analytischen Entwickelungsweise verlangen, dass den betreffenden Formeln durch Aufnahme aller erforderlichen Elemente in dieselben eine solche Gestalt gegeben werde, welche sie zur leichten unmittelbaren praktischen Anwendung geschickt macht. Insbesondere haben bei Weitem die meisten Schriftsteller über

diesen Gegenstand einen nach meiner Meinung für die praktische Anwendung sehr wichtigen Satz ganz übersehen *), welcher zwar schon von Lambert gefunden, jedenfalls aber in etwas unbequemer, seine praktische Wichtigkeit nicht auf der Stelle mit völliger Klarheit hervortreten lassender Weise dargestellt worden ist. Neben seiner praktischen Wichtigkeit scheint mir gerade dieser wenig bekannte Satz zugleich die beste Grundlage für die ganze theoretische Entwickelung der Eigenschaften der stereographischen Projection abzugeben, so dass man dabei von demselben am zweckmässigsten seinen Auslauf nimmt. Dies sind die Gründe, welche mich veranlasst haben, die Theorie der stereograpischen Projection nach den aus dem Vorhergehenden sich von selbst ergebenden Grundsätzen in dieser Abhandlung, welche zugleich auch eine grössere Anzahl neuer Formeln und Ausdrücke enthalten wird, einer neuen analytischen Behandlung zu unterwerfen.

§. 2.

Indem wir den allgemeinen Begriff der stereographischen Projection als bekannt voraussetzen, legen wir durch den Mittelpunkt der Kugel als Grundlage für unsere folgenden Betrachtungen ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz, dessen Anfang also der Mittelpunkt der Kugel ist. Die Tafel nehmen wir, was der Allgemeinheit der Betrachtung keinen Eintrag thun wird, der Ebene der xy parallel an; die Coordinaten ihres Durchschnittspunkts mit der Axe der z seien $0, 0, a$. Das Auge werde in der Axe der z angenommen, und seine Coordinaten seien $0, 0, a_1$. Den Halbmesser der Kugel bezeichnen wir durch r, und nennen den Durchschnittspunkt der Tafel mit der Axe der z im Folgenden den Mittelpunkt der Tafel.

§. 3.

Hiernach wollen wir uns nun zuvörderst mit der Bestimmung des Bildes eines beliebigen Punktes der Kugelfläche im Allgemeinen beschäftigen. Zu dem Ende denke man sich von dem Mit-

*) Selbst in dem sonst sehr vollständigen, von Mollweide bearbeiteten Artikel: Stereographische Projection im Klügel'schen Wörterbuche. Thl. IV. S. 467. fehlt dieser Satz; eben so in Astronomie théorique et pratique par Delambre. T. III. Chap. XXXVII. in Traité de Topographie etc. par Puissant. Liv. II. Chap. I. und in anderen grösseren Werken.

telpunkte der Kugel, also von dem Anfange der xyz, nach dem abzubildenden Punkte der Kugelfläche eine Gerade gezogen, also einen Halbmesser der Kugel, und bezeichnen deren Bestimmungswinkel, nämlich die von dieser Geraden oder diesem Halbmesser der Kugel mit den positiven Theilen der Axe der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel respective mit α_0, β_0, γ_0; so sind die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des abzubildenden Punktes in dem angenommenen Systeme offenbar:

1) $x_0 = r\cos\alpha_0,\quad y_0 = r\cos\beta_0,\quad z_0 = r\cos\gamma_0.$

Bezeichnen wir nun die Bestimmungswinkel der von dem Auge nach dem abzubildenden Punkte gezogenen Geraden, welches wieder die von dieser Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen Winkel sind, respective durch θ_0, ω_0, ϖ_0; so sind überhaupt die Gleichungen der durch das Auge und den abzubildenden Punkt gelegten Geraden:

$$\frac{x}{\cos\theta_0} = \frac{y}{\cos\omega_0} = \frac{z-a_1}{\cos\varpi_0}$$

oder auch:

$$\frac{x-r\cos\alpha_0}{\cos\theta_0} = \frac{y-r\cos\beta_0}{\cos\omega_0} = \frac{z-r\cos\gamma_0}{\cos\varpi_0}.$$

Wenn wir also die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser Geraden mit der Tafel, welchen Punkt wir überhaupt das Bild des abzubildenden Punktes $(x_0y_0z_0)$ der Kugelfläche auf der Tafel nennen wollen, durch $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ bezeichnen; so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{x}_0}{\cos\theta_0} = \frac{\mathfrak{y}_0}{\cos\omega_0} = \frac{\mathfrak{z}_0-a_1}{\cos\varpi_0},$$

$$\frac{\mathfrak{x}_0-r\cos\alpha_0}{\cos\theta_0} = \frac{\mathfrak{y}_0-r\cos\beta_0}{\cos\omega_0} = \frac{\mathfrak{z}_0-r\cos\gamma_0}{\cos\varpi_0};$$

und folglich, weil offenbar $\mathfrak{z}_0 = a$ ist, die Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{x}_0}{\cos\theta_0} = \frac{\mathfrak{y}_0}{\cos\omega_0} = \frac{a-a_1}{\cos\varpi_0},$$

$$\frac{\mathfrak{x}_0-r\cos\alpha_0}{\cos\theta_0} = \frac{\mathfrak{y}_0-r\cos\beta_0}{\cos\omega_0} = \frac{a-r\cos\gamma_0}{\cos\varpi_0};$$

woraus sich durch Division:

$$\frac{\mathfrak{x}_0 - r\cos\alpha_0}{\mathfrak{x}_0} = \frac{\mathfrak{y}_0 - r\cos\beta_0}{\mathfrak{y}_0} = \frac{a - r\cos\gamma_0}{a - a_1},$$

also, wie man leicht findet:

$$2) \ldots \mathfrak{x}_0 = \frac{(a_1 - a)r\cos\alpha_0}{a_1 - r\cos\gamma_0}, \quad \mathfrak{y}_0 = \frac{(a_1 - a)r\cos\beta_0}{a_1 - r\cos\gamma_0}, \quad \mathfrak{z}_0 = a$$

ergiebt.

Offenbar sind $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$ die Coordinaten des Bildes des in Rede stehenden Punktes der Kugelfläche in Bezug auf zwei durch den Mittelpunkt der Tafel als Anfang parallel mit den Axen der x, y gelegten, also in der Tafel liegenden Coordinatenaxen, und können folglich unmittelbar zur Construction des Bildes auf der Tafel benutzt werden.

§. 4.

Wenn der abzubildende Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ ursprünglich durch seine polaren Coordinaten L_0, B_0, die sich in bekannter Weise auf ein gewisses, durch den Mittelpunkt der Kugel als Anfang gelegtes rechtwinkliges Coordinatensystem der X, Y, Z beziehen, bestimmt ist; so wollen wir bezeichnen:

die Winkel, welche der positive Theil der Axe der x mit den positiven Theilen der Axe der

$$X,\ Y,\ Z$$

einschliesst, respective durch

$$\lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2;$$

die Winkel, welche der positive Theil der Axe der y mit den positiven Theilen der Axe der

$$X,\ Y,\ Z$$

einschliesst, respective durch

$$\mu,\ \mu_1,\ \mu_2;$$

die Winkel, welche der positive Theil der Axe der z mit den positiven Theilen der Axe der

$$X,\ Y,\ Z$$

einschliesst, respective durch

$$\nu,\ \nu_1,\ \nu_2;$$

indem man keinen dieser Winkel grösser als 180° nimmt.

Dann hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten im Allgemeinen die folgenden Gleichungen:

$$x = X\cos(xX) + Y\cos(xY) + Z\cos(xZ),$$
$$y = X\cos(yX) + Y\cos(yY) + Z\cos(yZ),$$
$$z = X\cos(zX) + Y\cos(zY) + Z\cos(zZ);$$

also in Folge der eingeführten Bezeichnungen:

$$x = X\cos\lambda + Y\cos\lambda_1 + Z\cos\lambda_2,$$
$$y = X\cos\mu + Y\cos\mu_1 + Z\cos\mu_2,$$
$$z = X\cos\nu + Y\cos\nu_1 + Z\cos\nu_2;$$

und wenn nun X_0, Y_0, Z_0 die Coordinaten des abzubildenden Punktes im Systeme der XYZ sind, so ist:

$$x_0 = X_0\cos\lambda + Y_0\cos\lambda_1 + Z_0\cos\lambda_2,$$
$$y_0 = X_0\cos\mu + Y_0\cos\mu_1 + Z_0\cos\mu_2,$$
$$z_0 = X_0\cos\nu + Y_0\cos\nu_1 + Z_0\cos\nu_2.$$

Nach 1) ist aber

$$x_0 = r\cos\alpha_0,\quad y_0 = r\cos\beta_0,\quad z_0 = r\cos\gamma_0$$

und offenbar ist

$$X_0 = r\cos L_0\cos B_0,\quad Y_0 = r\sin L_0\cos B_0,\quad Z_0 = r\sin B_0;$$

also hat man zur Bestimmung der Winkel α_0, β_0, γ_0 die folgenden Formeln:

3)

$$\cos\alpha_0 = \cos\lambda\cos L_0\cos B_0 + \cos\lambda_1\sin L_0\cos B_0 + \cos\lambda_2\sin B_0,$$
$$\cos\beta_0 = \cos\mu\cos L_0\cos B_0 + \cos\mu_1\sin L_0\cos B_0 + \cos\mu_2\sin B_0,$$
$$\cos\gamma_0 = \cos\nu\cos L_0\cos B_0 + \cos\nu_1\sin L_0\cos B_0 + \cos\nu_2\sin B_0.$$

Wenn man in der Polarprojection, wo die Ebene des Aequators die Tafel ist, den positiven Theil der Axe der x nach dem Anfange der Längen, den positiven Theil der Axe der y nach dem neunzigsten Grade der Längen, und den positiven Theil der Axe der z nach dem Auge hin gerichtet sein lässt; so ist offenbar:

$$\lambda = 0,\quad \lambda_1 = 90^0,\quad \lambda_2 = 90^0;$$
$$\mu = 90^0,\quad \mu_1 = 0,\quad \mu_2 = 90^0;$$
$$\nu = 90^0,\quad \nu_1 = 90^0,\quad \nu_2 = \begin{cases}0\\180^0\end{cases}$$

also:

$$\cos\lambda = 1,\ \cos\lambda_1 = 0,\ \cos\lambda_2 = 0;$$

$$\cos\mu = 0,\ \cos\mu_1 = 1,\ \cos\mu_2 = 0;$$

$$\cos\nu = 0,\ \cos\nu_1 = 0,\ \cos\nu_2 = \pm 1;$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem das Auge in dem positiven oder negativen Theile der Axe der Z liegt, bei der gewöhnlichen stereographischen Projection den Nordpol oder Südpol der Erde einnimmt. Also ist nach 3) mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen:

$$4) \quad \begin{cases} \cos\alpha_0 = \cos L_0 \cos B_0, \\ \cos\beta_0 = \cos L_0 \cos B_0, \\ \cos\gamma_0 = \pm \sin B_0; \end{cases}$$

folglich nach 2):

$$5) \quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{(a_1 - a) r \cos L_0 \cos B_0}{a_1 \mp r \sin B_0}, \\ y_0 = \dfrac{(a_1 - a) r \sin L_0 \cos B_0}{a_1 \mp r \sin B_0}, \\ z_0 = a. \end{cases}$$

Für die Aequatorialprojection, wenn die Ebene des ersten Meridians die Tafel ist, der positive Theil der Axe der x durch den Anfang der Längen geht, der positive Theil der Axe der y nach dem Nordpole und der positive Theil der Axe der z nach dem Auge hin gerichtet ist, ist offenbar:

$$\lambda = 0,\quad \lambda_1 = 90^0,\quad \lambda_2 = 90^0;$$

$$\mu = 90^0,\ \mu_1 = 90^0,\quad \mu_2 = 0;$$

$$\nu = 90^0,\ \nu_1 = \begin{cases} 0^0 \\ 180^0 \end{cases},\ \nu_2 = 90^0;$$

also:

$$\cos\lambda = 1,\ \cos\lambda_1 = 0,\ \cos\lambda_2 = 0;$$

$$\cos\mu = 0,\ \cos\mu_1 = 0,\quad \cos\mu_2 = 1;$$

$$\cos\nu = 0,\ \cos\nu_1 = \pm 1,\ \cos\nu_2 = 0;$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem das Auge in dem positiven oder negativen Theile der Axe der Y liegt,

bei der gewöhnlichen stereographischen Projection den 90sten oder 270sten Grad der Längen einnimmt. Folglich ist nach 3) mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen:

$$6) \quad \ldots \quad \begin{cases} \cos\alpha_0 = \cos L_0 \cos B_0, \\ \cos\beta_0 = \sin B_0, \\ \cos\gamma_0 = \pm \sin L_0 \cos B_0; \end{cases}$$

und daher nach 2):

$$7) \quad \ldots \quad \begin{cases} \mathfrak{x}_0 = \dfrac{(a_1 - a) r \cos L_0 \cos B_0}{a_1 \mp r \sin L_0 \cos B_0}, \\ \mathfrak{y}_0 = \dfrac{(a_1 - a) r \sin B_0}{a_1 \mp r \sin L_0 \cos B_0}, \\ \mathfrak{z}_0 = a. \end{cases}$$

Für den Punkt der Kugelfläche, dessen Bild die Mitte der Tafel ist, ist offenbar

$$\alpha_0 = 90^0, \ \beta_0 = 90^0, \ \gamma_0 = \begin{cases} 0 \\ 180^0; \end{cases}$$

also

$$\cos\alpha_0 = 0, \ \cos\beta_0 = 0, \ \cos\gamma_0 = \pm 1;$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der in Rede stehende Punkt in dem positiven oder negativen Theile der Axe der z liegt; folglich ist nach 3), wenn wir die polaren Coordinaten dieses Punktes der Kugelfläche durch L, B bezeichnen:

8)

$$\cos\lambda \cos L \cos B + \cos\lambda_1 \sin L \cos B + \cos\lambda_2 \sin B = 0,$$

$$\cos\mu \cos L \cos B + \cos\mu_1 \sin L \cos B + \cos\mu_2 \sin B = 0,$$

$$\cos\nu \cos L \cos B + \cos\nu_1 \sin L \cos B + \cos\nu_2 \sin B = \pm 1;$$

mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher. Die beiden ersten dieser drei Gleichungen kann man auf die folgende Form bringen:

$$\cos\lambda \cos L + \cos\lambda_1 \sin L = -\cos\lambda_2 \tang B,$$

$$\cos\mu \cos L + \cos\mu_1 \sin L = -\cos\mu_2 \tang B;$$

woraus sich durch Division sogleich

$$\frac{\cos\lambda+\cos\lambda_1\operatorname{tang}L}{\cos\mu+\cos\mu_1\operatorname{tang}L}=\frac{\cos\lambda_2}{\cos\mu_2}$$

ergiebt. Also ist, wie man leicht findet:

9)

$$\operatorname{tang}L=-\frac{\cos\lambda\cos\mu_2-\cos\lambda_2\cos\mu}{\cos\lambda_1\cos\mu_2-\cos\lambda_2\cos\mu_1},$$

$$\operatorname{tang}B=-\frac{\cos\lambda\cos L+\cos\lambda_1\sin L}{\cos\lambda_2}=-\frac{\cos\mu\cos L+\cos\mu_1\sin L}{\cos\mu_2}.$$

Weil man nur weiss, dass L zwischen 0 und 360° liegt, so liefern diese Formeln jederzeit zwei Systeme von Werthen der Coordinaten L, B, von denen man dasjenige zu wählen hat, durch welches die dritte der Gleichungen 8) erfüllt wird.

§. 5.

Bezeichnen wir die Entfernung des Bildes $(\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0)$ des Punktes $(x_0y_0z_0)$ der Kugelfläche von dem Mittelpunkte der Tafel durch E_0, so ist offenbar:

$$E_0{}^2=\mathfrak{x}_0{}^2+\mathfrak{y}_0{}^2,$$

also nach 2):

$$E_0{}^2=\frac{(a_1-a)^2r^2(\cos\alpha_0{}^2+\cos\beta_0{}^2)}{(a_1-r\cos\gamma_0)^2},$$

und folglich, weil

$$\cos\alpha_0{}^2+\cos\beta_0{}^2+\cos\gamma_0{}^2=1,\quad \cos\alpha_0{}^2+\cos\beta_0{}^2=\sin\gamma_0{}^2$$

ist:

$$E_0{}^2=\left\{\frac{(a_1-a)r\sin\gamma_0}{a_1-r\cos\gamma_0}\right\}^2.$$

Wenn die Tafel von der von dem in der Axe der z liegenden Auge nach dem Punkte der Kugelfläche gezogenen Geraden getroffen wird, so haben offenbar sowohl x_0 und $\mathfrak{x}_0$, als auch y_0 und $\mathfrak{y}_0$, gleiche Vorzeichen. Wenn dagegen die Tafel von der von dem Auge nach dem Punkte auf der Kugelfläche gezogenen Geraden nicht, folglich von der dieser Geraden, von dem Auge an gerechnet, entgegengesetzten Geraden getroffen wird, so haben sowohl x_0 und $\mathfrak{x}_0$, als auch y_0 und $\mathfrak{y}_0$, entgegengesetzte Vorzeichen. Es haben folglich sowohl x_0 und $\mathfrak{x}_0$, als auch y_0 und $\mathfrak{y}_0$, also nach 1) und 2) sowohl

$$r\cos\alpha_0 \text{ und } \frac{(a_1-a)r\cos\alpha_0}{a_1-r\cos\gamma_0},$$

als auch

$$r\cos\beta_0 \text{ und } \frac{(a_1-a)r\cos\beta_0}{a_1-r\cos\gamma_0},$$

gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen, oder die Grösse

$$\frac{a_1-a}{a_1-r\cos\gamma_0}$$

ist positiv oder negativ, jenachdem das Bild in der von dem Auge nach dem Punkte auf der Kugelfläche gezogenen Geraden, oder in der dieser Geraden, von dem Auge an gerechnet, entgegengesetzten Geraden liegt. Weil nun nach dem Obigen

$$E_0{}^2=\left\{\frac{a_1-a}{a_1-r\cos\gamma_0}.r\sin\gamma_0\right\}^2,$$

weil ferner E_0 seiner Natur nach stets positiv, und weil auch wegen des immer zwischen 0 und 180° liegenden Winkels γ_0 die Grösse $r\sin\gamma_0$ stets positiv ist; so ist

$$10) \quad \ldots\ldots \quad E_0=\pm\frac{(a_1-a)r\sin\gamma_0}{a_1-r\cos\gamma_0},$$

wenn man in dieser Formel das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem das Bild in der von dem Auge nach dem Punkte auf der Kugelfläche gezogenen Geraden, oder in der dieser Geraden, von dem Auge an gerechnet, entgegengesetzten Geraden liegt. Betrachten wir aber E_0 nicht, wie bisher, immer als positiv, sondern von jetzt an als positiv oder als negativ, jenachdem das Bild in der von dem Auge nach dem Punkte auf der Kugelfläche gezogenen Geraden, oder in der dieser Geraden, von dem Auge an gerechnet, entgegengesetzten Geraden liegt; so können wir allgemein:

$$11) \quad \ldots\ldots\ldots \quad E_0=\frac{(a_1-a)r\sin\gamma_0}{a_1-r\cos\gamma_0}$$

setzen.

Für $a_1=r$ ist

$$E_0=\frac{(r-a)\sin\gamma_0}{1-\cos\gamma_0},$$

also, wie man leicht findet:

$$12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad E_0=(r-a)\cot\tfrac{1}{2}\gamma_0.$$

§. 6.

Um aus der Gleichung 11) den Winkel γ_0 zu finden, setze man:

$$\sin\gamma_0=\frac{2\tang\frac{1}{2}\gamma_0}{1+\tang\frac{1}{2}\gamma_0^2},\quad \cos\gamma_0=\frac{1-\tang\frac{1}{2}\gamma_0^2}{1+\tang\frac{1}{2}\gamma_0^2}.$$

Dann ist, wie man leicht findet,

$$E_0=\frac{2(a_1-a)r\tang\frac{1}{2}\gamma_0}{a_1-r+(a_1+r)\tang\frac{1}{2}\gamma_0^2},$$

und folglich:

$$\tang\tfrac{1}{2}\gamma_0^2-2\frac{(a_1-a)r}{(a_1+r)E_0}\tang\tfrac{1}{2}\gamma_0+\frac{a_1-r}{a_1+r}=0.$$

Durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung erhält man:

$$13)\ \ldots\ \tang\tfrac{1}{2}\gamma_0=\frac{(a_1-a)r}{(a_1+r)E_0}\pm\sqrt{\frac{(a_1-a)^2r^2}{(a_1+r)^2E_0^2}-\frac{a_1-r}{a_1+r}}$$

oder:

$$14)\quad \tang\tfrac{1}{2}\gamma_0=\frac{(a_1-a)r\pm\sqrt{(a_1-a)^2r^2-(a_1^2-r^2)E_0^2}}{(a_1+r)E_0}.$$

Das Product der beiden Werthe von $\tang\frac{1}{2}\gamma_0$ ist

$$\frac{a_1-r}{a_1+r}=\frac{a_1^2-r^2}{(a_1+r)^2},$$

und dieses Product ist also negativ, null, positiv, jenachdem

$$a_1^2<r^2,\quad a_1^2=r^2,\quad a_1^2>r^2$$

ist. Nehmen wir, was offenbar verstattet ist, der Kürze wegen a_1 als positiv an, so ist das in Rede stehende Product

negativ, null, positiv,

jenachdem

$$a_1<r,\quad a_1=r,\quad a_1>r$$

ist.

Wenn $a_1=r$ ist, so ist nach 12):

$$E_0=(r-a)\cot\tfrac{1}{2}\gamma_0,$$

also:

$$15) \quad \dots \quad \cot\tfrac{1}{2}\gamma_0=\frac{E_0}{r-a},\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma_0=\frac{r-a}{E_0};$$

woraus, weil $\frac{1}{2}\gamma_0$ zwischen 0^0 und 90^0 liegt, γ_0 ohne Zweideutigkeit gefunden wird. Weil

$$\cos\gamma_0=-\frac{1-\cot\frac{1}{2}\gamma_0^2}{1+\cot\frac{1}{2}\gamma_0^2}$$

ist, so ist nach 15):

$$16) \dots \cos\gamma_0=-\frac{1-\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2}{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2}=\frac{E_0^2-(r-a)^2}{E_0^2+(r-a)^2}.$$

Weil ferner, da $\frac{1}{2}\gamma_0$ zwischen 0^0 und 90^0 liegt,

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma_0=\frac{\cot\frac{1}{2}\gamma_0}{\sqrt{1+\cot\frac{1}{2}\gamma_0^2}},\quad \sin\tfrac{1}{2}\gamma_0=\frac{1}{\sqrt{1+\cot\frac{1}{2}\gamma_0^2}}$$

ist, so ist

$$\sin\gamma_0=2\sin\tfrac{1}{2}\gamma_0\cos\tfrac{1}{2}\gamma_0=\frac{2\cot\frac{1}{2}\gamma_0}{1+\cot\frac{1}{2}\gamma_0^2},$$

also nach 15):

$$17) \dots \sin\gamma_0=\frac{\frac{2E_0}{r-a}}{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2}=\frac{2E_0(r-a)}{E_0^2+(r-a)^2}.$$

Endlich ist nach 16) und 17) auch:

$$18) \quad \operatorname{tang}\gamma_0=\frac{2E_0(r-a)}{E_0^2-(r-a)^2},\quad \cot\gamma_0=\frac{E_0^2-(r-a)^2}{2E_0(r-a)}.$$

Wenn $a_1<r$ ist, so haben die beiden Werthe von $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma_0$, da ihr Product negativ ist, entgegengesetzte Vorzeichen, und man muss also, da $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma_0$ nur positiv sein kann, in der Formel 14) das Zeichen nehmen, welches $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma_0$ positiv liefert. Wenn $a_1>r$ ist, so hat $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma_0$ zwei positive Werthe, weil das Product beider Werthe positiv ist und $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma_0$ nur positiv sein kann. Weil $a_1>r$ ist, so liegt das Auge ausserhalb der Kugel. Wenn $a_1>a$, also $(a_1-a)r$ positiv ist, so liefern in dem Ausdrucke 14) beide Zeichen den Zähler von $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma_0$ positiv, und

E_0 ist also positiv. Das obere Zeichen liefert für tang $\frac{1}{2}\gamma_0$ einen grösseren Werth als das untere. Also muss man in diesem Falle offenbar das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem der abgebildete Punkt der Kugelfläche, welchem E_0 entspricht, in der von dem Auge abgewandten oder in der dem Auge zugewandten Halbkugelfläche liegt. Wenn $a_1 < a$, also $(a_1 - a)r$ negativ ist, so liefern in dem Ausdrucke 14) beide Zeichen den Zähler von tang $\frac{1}{2}\gamma_0$ negativ, und E_0 ist also negativ. Das obere Zeichen liefert für tang $\frac{1}{2}\gamma_0$ einen kleineren Werth als das untere. Also muss man in diesem Falle das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem der abgebildete Punkt der Kugelfläche, welchem E_0 entspricht, in der dem Auge zugewandten oder in der von dem Auge abgewandten Halbkugelfläche liegt.

Bemerken wollen wir noch, dass man bei der Bestimmung des Winkels γ_0 sich auch auf folgende Art verhalten kann. Leicht bringt man die Gleichung 11) auf folgende Form:

$$\sin\gamma_0 + \frac{E_0}{a_1 - a}\cos\gamma_0 = \frac{a_1 E_0}{(a_1 - a)r}.$$

Berechnet man nun φ_0 mittelst der Formel

$$\tan\varphi_0 = \frac{E_0}{a_1 - a},$$

so ist

$$\sin(\gamma_0 + \varphi_0) = \frac{a_1 E_0}{(a_1 - a)r}\cos\varphi_0,$$

oder, weil

$$\cos\varphi_0 = \frac{a_1 - a}{E_0}\sin\varphi_0$$

ist,

$$\sin(\gamma_0 + \varphi_0) = \frac{a_1}{r}\sin\varphi_0;$$

und man hat also zur Berechnung von γ_0 die folgenden Formeln:

$$19) \ldots \quad \tan\varphi_0 = \frac{E_0}{a_1 - a}, \quad \sin(\gamma_0 + \varphi_0) = \frac{a_1}{r}\sin\varphi_0.$$

§. 7.

Wir betrachten jetzt zwei Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ und $(x_1 y_1 z_1)$ auf der Kugelfläche und bezeichnen die diese beiden Punkte mit einander verbindende Chorde durch $C_{0,1}$, so ist

$$C_{0,1}^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2.$$

Sind nun aber α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die nach den beiden in Rede stehenden Punkten gezogenen Halbmesser der Kugel mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliessen; so ist:

$$x_0 = r\cos\alpha_0,\quad y_0 = r\cos\beta_0,\quad z_0 = r\cos\gamma_0$$

und

$$x_1 = r\cos\alpha_1,\quad y_1 = r\cos\beta_1,\quad z_1 = r\cos\gamma_1;$$

also:

$$C_{0,1}{}^2 = r^2\{(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1)^2 + (\cos\beta_0 - \cos\beta_1)^2 + (\cos\gamma_0 - \cos\gamma_1)^2\},$$

woraus sich, weil

$$\cos\alpha_0{}^2 + \cos\beta_0{}^2 + \cos\gamma_0{}^2 = 1,\quad \cos\alpha_1{}^2 + \cos\beta_1{}^2 + \cos\gamma_1{}^2 = 1$$

ist, leicht ergiebt:

$$C_{0,1}{}^2 = 2r^2\{1 - (\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1)\}.$$

Bezeichnen wir aber durch $\varepsilon_{0,1}$ den 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen die beiden von dem Mittelpunkte der Kugel nach den Punkten $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ gezogenen Halbmesser der Kugel mit einander einschliessen, so ist bekanntlich

$$\cos\varepsilon_{0,1} = \cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1,$$

also:

$$C_{0,1}{}^2 = 2r^2(1 - \cos\varepsilon_{0,1}) = 4r^2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2,$$

und folglich:

$$20)\quad \ldots\ldots\quad C_{0,1} = 2r\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1},$$

wie sich auch aus ganz einfachen geometrischen Gründen auf der Stelle ergiebt.

Die Bilder der Punkte $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ sind respective $(\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0)$ und $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1)$, deren Entfernungen vom Mittelpunkte der Tafel wir, analog mit dem Obigen, durch E_0 und E_1 bezeichnen, indem wir diese Entfernungen zugleich gehörig als positiv oder als negativ betrachten. Wenn wir nun aber die immer als positiv betrachtete Entfernung der beiden Bilder $(\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0)$ und $(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1)$ von einander auf der Tafel durch $E_{0,1}$ bezeichnen; so ist:

$$E_{0,1}{}^2 = (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_1)^2 + (\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{y}_1)^2 + (\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_1)^2,$$

also nach 2):

$$E_{0,1}{}^2 = (a_1-a)^2 r^2 \left\{ \begin{array}{l} \left[\dfrac{\cos\alpha_0}{a_1 - r\cos\gamma_0} - \dfrac{\cos\alpha_1}{a_1 - r\cos\gamma_1}\right]^2 \\ + \left[\dfrac{\cos\beta_0}{a_1 - r\cos\gamma_0} - \dfrac{\cos\beta_1}{a_1 - r\cos\gamma_1}\right]^2 \end{array} \right\},$$

woraus sich ferner, weil

$$\cos\alpha_0{}^2 + \cos\beta_0{}^2 = \sin\gamma_0{}^2, \quad \cos\alpha_1{}^2 + \cos\beta_1{}^2 = \sin\gamma_1{}^2$$

ist, leicht ergiebt:

$$E_{0,1}{}^2$$

$$= (a_1-a)^2 r^2 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin\gamma_0{}^2}{(a_1 - r\cos\gamma_0)^2} + \dfrac{\sin\gamma_1{}^2}{(a_1 - r\cos\gamma_1)^2} + \dfrac{2\cos\gamma_0\cos\gamma_1}{(a_1 - r\cos\gamma_0)(a_1 - r\cos\gamma_1)} \\ - \dfrac{2(\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1)}{(a_1 - r\cos\gamma_0)(a_1 - r\cos\gamma_1)} \end{array} \right\}$$

oder

$$E_{0,1}{}^2$$

$$= (a_1-a)^2 r^2 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin\gamma_0{}^2}{(a_1 - r\cos\gamma_0)^2} + \dfrac{\sin\gamma_1{}^2}{(a_1 - r\cos\gamma_1)^2} + \dfrac{2\cos\gamma_0\cos\gamma_1}{(a_1 - r\cos\gamma_0)(a_1 - r\cos\gamma_1)} \\ - \dfrac{2\cos\varepsilon_{0,1}}{(a_1 - r\cos\gamma_0)(a_1 - r\cos\gamma_1)} \end{array} \right\}.$$

Nun ist aber nach 11):

$$E_0 = \frac{(a_1-a)r\sin\gamma_0}{a_1 - r\cos\gamma_0}, \quad E_1 = \frac{(a_1-a)r\sin\gamma_1}{a_1 - r\cos\gamma_1};$$

also:

$$\frac{(a_1-a)r}{a_1 - r\cos\gamma_0} = \frac{E_0}{\sin\gamma_0}, \quad \frac{(a_1-a)r}{a_1 - r\cos\gamma_1} = \frac{E_1}{\sin\gamma_1};$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$21) \ldots E_{0,1}{}^2 = E_0{}^2 + E_1{}^2 + 2E_0E_1\cot\gamma_0\cot\gamma_1 - \frac{2E_0E_1\cos\varepsilon_{0,1}}{\sin\gamma_0\sin\gamma_1},$$

woraus umgekehrt:

$$22) \cos\varepsilon_{0,1} = \frac{(E_0{}^2 + E_1{}^2 - E_{0,1}{}^2 + 2E_0E_1\cot\gamma_0\cot\gamma_1)\sin\gamma_0\sin\gamma_1}{2E_0E_1}$$

oder

$$23) \ldots \cos\varepsilon_{0,1} = \cos\gamma_0\cos\gamma_1 + \frac{E_0{}^2 + E_1{}^2 - E_{0,1}{}^2}{2E_0E_1}\sin\gamma_0\sin\gamma_1$$

folgt.

Für $a_1 = r$ ist nach 17):

$$\sin\gamma_0 = \frac{2E_0(r-a)}{E_0{}^2+(r-a)^2}, \quad \sin\gamma_1 = \frac{2E_1(r-a)}{E_1{}^2+(r-a)^2};$$

also:

$$\frac{\sin\gamma_0\sin\gamma_1}{E_0E_1} = \frac{4(r-a)^2}{\{E_0{}^2+(r-a)^2\}\{E_1{}^2+(r-a)^2\}}.$$

Nach 16) ist aber:

$$1-\cos\gamma_0 = \frac{2(r-a)^2}{E_0{}^2+(r-a)^2}, \quad 1-\cos\gamma_1 = \frac{2(r-a)^2}{E_1{}^2+(r-a)^2};$$

also:

$$\frac{(1-\cos\gamma_0)(1-\cos\gamma_1)}{(r-a)^2} = \frac{4(r-a)^2}{\{E_0{}^2+(r-a)^2\}\{E_1{}^2+(r-a)^2\}},$$

und folglich

$$\frac{\sin\gamma_0\sin\gamma_1}{E_0E_1} = \frac{(1-\cos\gamma_0)(1-\cos\gamma_1)}{(r-a)^2},$$

also nach 23):

$$\cos\varepsilon_{0,1} = \cos\gamma_0\cos\gamma_1 + \frac{E_0{}^2+E_1{}^2-E_{0,1}{}^2}{2(r-a)^2}(1-\cos\gamma_0)(1-\cos\gamma_1).$$

Es ist aber nach 16):

$$\cos\gamma_0 = -\frac{1-\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2}{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2}, \quad \cos\gamma_1 = -\frac{1-\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2}{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2};$$

also:

$$1-\cos\gamma_0 = \frac{2}{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2}, \quad 1-\cos\gamma_1 = \frac{2}{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2};$$

folglich:

24) $\cos\varepsilon_{0,1} =$

$$\frac{\left\{1-\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\right\}}{\left\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\right\}} + \frac{2\left\{\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2-\left(\frac{E_{0,1}}{r-a}\right)^2\right\}}{\left\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\right\}},$$

woraus mittelst der Formel

$$2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2 = 1 - \cos\varepsilon_{0,1}$$

sogleich

$$2\sin\varepsilon_{0,1}{}^2 =$$

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\}\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\}-\{1-\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\}\{1-\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\} \\ -2\left\{\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2-\left(\frac{E_{0,1}}{r-a}\right)^2\right\}\end{array}\right\}}{\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\}\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\}},$$

also nach gehöriger Entwickelung des Zählers:

$$25)\ \ldots\ \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2 = \frac{\left(\frac{E_{0,1}}{r-a}\right)^2}{\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\}\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\}}$$

oder

$$26)\ \ldots\ \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1} = \pm\frac{\frac{E_{0,1}}{r-a}}{\sqrt{\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\}\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\}}}$$

folgt, wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $r-a$ positiv oder negativ ist.

Wegen der Formel

$$\cos\varepsilon_{0,1} = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2$$

ist also auch:

$$27)\ \ldots\ \cos\varepsilon_{0,1} = 1 - \frac{2\left(\frac{E_{0,1}}{r-a}\right)^2}{\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\}\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\}}.$$

Bezeichnet man die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die nach den Punkten $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ der Kugelfläche gezogenen Halbmesser der Kugel mit dem nach dem Punkte der Kugelfläche, dessen Bild der Mittelpunkt der Tafel ist, gezogenen Halbmesser der Kugel einschliessen, indem man diese Winkel als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem respective die Grössen E_0 und E_1 positiv oder negativ sind, durch ε_0 und ε_1, so ist nach 26) offenbar:

28)

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_0=\pm\frac{\frac{E_0}{r-a}}{\sqrt{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2}},\quad \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_1=\pm\frac{\frac{E_1}{r-a}}{\sqrt{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2}},$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem $r-a$ positiv oder negativ ist; also, wie sogleich erhellet:

29)

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_0=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2}},\quad \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2}};$$

und folglich:

$$30)\ \ldots\ \tan\tfrac{1}{2}\varepsilon_0=\pm\frac{E_0}{r-a},\quad \tan\tfrac{1}{2}\varepsilon_1=\pm\frac{E_1}{r-a};$$

mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher.

Also ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0+\varepsilon_1)=\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_0\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_1+\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_0\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_1$$

$$=\pm\frac{\frac{E_0}{r-a}+\frac{E_1}{r-a}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\right\}}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon_1)=\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_0\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_1-\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_0\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_1$$

$$=\pm\frac{\frac{E_0}{r-a}-\frac{E_1}{r-a}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\right\}}};$$

folglich:

$$\sqrt{\left\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\right\}}=\pm\frac{\frac{E_0}{r-a}+\frac{E_1}{r-a}}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon_0+\varepsilon_1)},$$

$$\sqrt{\left\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\right\}}=\pm\frac{\frac{E_0}{r-a}-\frac{E_1}{r-a}}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon_1)}.$$

Nach 26) ist aber:

$$\sqrt{\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\}\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\}} = \pm\frac{\frac{E_{0,1}}{r-a}}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}},$$

also:

$$\frac{E_{0,1}}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}} = \frac{E_0+E_1}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon_0+\varepsilon_1)} = \frac{E_0-E_1}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon_1)},$$

oder:

31) . . . . . $$\frac{E_{0,1}}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}} = \frac{E_0\pm E_1}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon_0\pm\varepsilon_1)},$$

oder:

32) . . . $$E_0\pm E_1 : E_{0,1} = \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0\pm\varepsilon_1) : \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}.$$

Nach 26) und 29) ist

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1} = \pm\frac{E_{0,1}}{r-a}\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_0\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_1,$$

und man kann also $\varepsilon_{0,1}$ auch nach den folgenden Formeln berechnen:

33) $$\left\{\begin{array}{l} \tang\frac{1}{2}\varepsilon_0 = \pm\frac{E_0}{r-a},\quad \tang\frac{1}{2}\varepsilon_1 = \pm\frac{E_1}{r-a}; \\ \sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1} = \pm\frac{E_{0,1}}{r-a}\cos\frac{1}{2}\varepsilon_0\cos\frac{1}{2}\varepsilon_1. \end{array}\right.$$

Alle im Vorhergehenden entwickelten, in vielen Beziehungen sehr merkwürdigen Formeln dienen, aus den auf der Karte gemessenen geradlinigen Entfernungen E_0, E_1, $E_{0,1}$ den Winkel $\varepsilon_{0,1}$, und demzufolge auch die wirkliche Entfernung der beiden Punkte $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ von einander auf der Kugelfläche zu berechnen, woraus die grosse praktische Wichtigkeit dieser Formeln von selbst erhellet. Dass dieselben aber auch zu weiteren theoretischen Folgerungen führen, werden wir sogleich sehen.

§. 8.

Wir müssen zuerst die folgende allgemeine geometrische Betrachtung vorausschicken.

Es seien (a_0b_0) und (a_1b_1) zwei durch die rechtwinkligen Coordinaten a_0, b_0 und a_1, b_1 bestimmte Punkte in einer Ebene, die als fest und unveränderlich betrachtet werden. Sind nun u_0 und u_1 die Entfernungen eines veränderlichen Punktes in derselben

Ebene von diesen beiden festen Punkten, und findet zwischen diesen Entfernungen, wenn r und μ constante Grössen bezeichnen, die Gleichung

$$34) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{u_0^2}{r^2+u_1^2}=\mu^2$$

Statt, so soll man ermitteln, ob und was für eine Curve durch diese Gleichung charakterisirt wird.

Bezeichnen wir zu dem Ende die rechtwinkligen Coordinaten des in Rede stehenden Punktes in Bezug auf das angenommene Coordinatensystem durch x, y; so ist:

$$u_0^2=(x-a_0)^2+(y-b_0)^2, \quad u_1^2=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2,$$

und die Gleichung 34) ist also:

$$\frac{(x-a_0)^2+(y-b_0)^2}{r^2+(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}=\mu^2$$

oder

$$(x-a_0)^2+(y-b_0)^2=\mu^2\{r^2+(x-a_1)^2+(y-b_1)^2\},$$

also:

$$(1-\mu^2)(x^2+y^2)-2(a_0-\mu^2a_1)x-2(b_0-\mu^2b_1)y$$
$$=\mu^2\{r^2-\frac{1}{\mu^2}(a_0^2+b_0^2)+(a_1^2+b_1^2)\}.$$

Für $\mu^2=1$ wird diese Gleichung:

$$2(a_0-a_1)x+2(b_0-b_1)y=(a_0^2+b_0^2)-(a_1^2+b_1^2)-r^2,$$

und stellt also eine gerade Linie dar.

Wenn dagegen nicht $\mu^2=1$ ist, so kann man die obige Gleichung auf die Form

$$x^2-2\frac{a_0-\mu^2a_1}{1-\mu^2}x+y^2-2\frac{b_0-\mu^2b_1}{1-\mu^2}y=\frac{\mu^2\{r^2-\frac{1}{\mu^2}(a_0^2+b_0^2)+(a_1^2+b_1^2)\}}{1-\mu^2}$$

oder, wie sogleich erhellet, auf die Form

$$(x-\frac{a_0-\mu^2a_1}{1-\mu^2})^2+(y-\frac{b_0-\mu^2b_1}{1-\mu^2})^2$$

$$=\left(\frac{a_0-\mu^2a_1}{1-\mu^2}\right)^2+\left(\frac{b_0-\mu^2b_1}{1-\mu^2}\right)^2+\frac{\mu^2\{r^2-\frac{1}{\mu^2}(a_0^2+b_0^2)+(a_1^2+b_1^2)\}}{1-\mu^2},$$

also, wie man mittelst leichter Rechnung findet, auf die Form

$$\left(x-\frac{a_0-\mu^2 a_1}{1-\mu^2}\right)^2+\left(y-\frac{b_0-\mu^2 b_1}{1-\mu^2}\right)^2=\frac{\mu^2\{(a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2+(1-\mu^2)r^2\}}{(1-\mu^2)^2}$$

bringen, woraus Folgendes erhellet:

Wenn

$$(a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2+(1-\mu^2)r^2>0$$

ist, stellt die Gleichung 34) einen Kreis dar. Wenn

$$(a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2+(1-\mu^2)r^2<0$$

ist, hat die Gleichung 34) gar keine geometrische Bedeutung. Wenn

$$(a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2+(1-\mu^2)r^2=0$$

ist, ist

$$x-\frac{a_0-\mu^2 a_1}{1-\mu^2}=0,\quad y-\frac{b_0-\mu^2 b_1}{1-\mu^2}=0$$

oder

$$x=\frac{a_0-\mu^2 a_1}{1-\mu^2},\quad y=\frac{b_0-\mu^2 b_1}{1-\mu^2};$$

und die Gleichung 34) stellt also in diesem Falle einen Punkt dar.

Welches im ersten dieser drei Fälle der Halbmesser und die Coordinaten des Mittelpunkts des betreffenden Kreises sind, erhellet aus dem Vorstehenden von selbst.

§. 9.

Nehmen wir jetzt, mit Beziehung auf den vorhergehenden Paragraphen, in der Tafel den Mittelpunkt der Tafel und das Bild des sphärischen Mittelpunkts eines beliebigen Kugelkreises, welchem letzteren die Entfernung E_0 von dem Mittelpunkte der Tafel entsprechen mag, als feste Punkte an; so ist für jeden Punkt dieses Kugelkreises, welchem die Entfernung E_1 von dem Mittelpunkte der Tafel und die Entfernung $E_{0,1}$ von dem Bilde des sphärischen Mittelpunkts des Kugelkreises entsprechen mag, offenbar $\varepsilon_{0,1}$ eine constante Grösse. Zwischen den so eben genannten Grössen findet aber für $a_1=r$ nach 26) die Gleichung:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}=\pm\frac{\dfrac{E_{0,1}}{r-a}}{\sqrt{\left\{1+\left(\dfrac{E_0}{r-a}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\dfrac{E_1}{r-a}\right)^2\right\}}},$$

also die Gleichung

$$\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2=\frac{\left(\frac{E_{0,1}}{r-a}\right)^2}{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2},$$

oder die Gleichung:

$$35) \quad \ldots\ldots \{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2=\frac{E_{0,1}{}^2}{(r-a)^2+E_1{}^2}$$

Statt.

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung 34), so sieht man, dass für

$$\mu^2,\quad r^2,\quad u_0{}^2,\quad u_1{}^2$$

in derselben respective

$$\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2,\quad (r-a)^2,\quad E_{0,1}{}^2,\quad E_1{}^2$$

zu setzen ist.

Nehmen wir aber den Mittelpunkt der Tafel als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy, und die von dem Mittelpunkte der Tafel nach dem Bilde des sphärischen Mittelpunkts des Kugelkreises gezogene Gerade als den positiven oder negativen Theil der Axe der x in diesem Systeme, jenachdem E_0 positiv oder negativ ist, an; so ist in dem vorhergehenden Paragraphen offenbar

$$\mathfrak{a}_0=E_0,\quad \mathfrak{b}_0=0;\quad \mathfrak{a}_1=0,\quad \mathfrak{b}_1=0$$

zu setzen, woraus sich

$$(\mathfrak{a}_0-\mathfrak{a}_1)^2+(\mathfrak{b}_0-\mathfrak{b}_1)^2+(1-\mu^2)r^2$$

$$=E_0{}^2+\{1-[1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2]\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2\}(r-a)^2,$$

oder

$$(\mathfrak{a}_0-\mathfrak{a}_1)^2+(\mathfrak{b}_0-\mathfrak{b}_1)^2+(1-\mu^2)r^2$$

$$=E_0{}^2+\{\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2-\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2\}(r-a)^2,$$

also, wie sogleich erhellet:

36)

$$(\mathfrak{a}_0-\mathfrak{a}_1)^2+(\mathfrak{b}_0-\mathfrak{b}_1)^2+(1-\mu^2)r^2=\{(r-a)^2+E_0{}^2\}\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2$$

ergiebt. Hieraus erhellet, dass im Allgemeinen

$$(a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2+(1-\mu^2)r^2>0,$$

folglich nach dem vorhergehenden Paragraphen das **Bild unsers Kugelkreises ein Kreis ist** *).

Nach dem Obigen ist:

$$\mu^2=\frac{(r-a)^2+E_0^2}{(r-a)^2}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2,$$

folglich:

$$1-\mu^2=\frac{(r-a)^2\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2-E_0{}^2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2}{(r-a)^2},$$

also nach 36):

$$\frac{\mu^2\{(a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2+(1-\mu^2)r^2\}}{(1-\mu^2)^2}$$

$$=(r-a)^2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2\left\{\frac{(r-a)^2+E_0{}^2}{(r-a)^2\cos\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2-E_0{}^2\sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2}\right\}^2,$$

oder:

$$\frac{\mu^2\{(a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2+(1-\mu^2)r^2\}}{(1-\mu^2)^2}$$

$$=\tfrac{1}{4}(r-a)^2\sin\varepsilon_{0,1}{}^2\left\{\frac{(r-a)^2+E_0{}^2}{(r-a)^2\cos\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2-E_0{}^2\sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2}\right\}^2;$$

folglich nach dem vorhergehenden Paragraphen, wenn wir den Halbmesser des Bildes unsers Kugelkreises durch r_0 bezeichnen:

37)

$$r_0=\text{val. abs.}\,(r-a)\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}\frac{(r-a)^2+E_0{}^2}{(r-a)^2\cos\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2-E_0{}^2\sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2}$$

oder

38)

$$r_0=\text{val. abs.}\,\tfrac{1}{2}(r-a)\sin\varepsilon_{0,1}\frac{(r-a)^2+E_0{}^2}{(r-a)^2\cos\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2-E_0{}^2\sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2}.$$

Ferner ist nach dem vorhergehenden Paragraphen und dem Obigen, wenn wir die Coordinaten des Mittelpunkts des Bildes unsers Kugelkreises durch p_0, q_0 bezeichnen:

---

*) Die bekannte Eigenschaft der stereographischen Projection, deren Begründung aber durch das Vorhergehende unter einer ganz neuen Gestalt erscheint.

$$39) \quad \ldots\ldots \begin{cases} p_0 = \dfrac{\mathfrak{a}_0 - \mu^2\mathfrak{a}_1}{1-\mu^2} = \dfrac{E_0}{1-\mu^2}, \\ q_0 = \dfrac{\mathfrak{b}_0 - \mu^2\mathfrak{b}_1}{1-\mu^2} = 0; \end{cases}$$

woraus sich ergiebt, dass der Mittelpunkt des Bildes jederzeit in der durch den Mittelpunkt der Tafel und das Bild des sphärischen Mittelpunkts des Kugelkreises gehenden Geraden liegt.

Leicht erhält man mittelst der vorhergehenden Formeln:

40)

$$p_0 = \frac{E_0}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2 - \left(\dfrac{E_0}{r-a}\right)^2 \sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2} = \frac{E_0(r-a)^2}{(r-a)^2\cos\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2 - E_0^2\sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2},$$

und hieraus ergiebt sich ferner mittelst leichter Rechnung:

$$41) \quad E_0 - p_0 = -\frac{E_0\{(r-a)^2 + E_0^2\}\sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2}{(r-a)^2\cos\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2 - E_0^2\sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2}.$$

Aus 37) und 41), wenn man diese beide Gleichungen auf das Quadrat erhebt, folgt aber augenblicklich durch Division:

$$42) \ldots\ldots \left(\frac{r_0}{E_0 - p_0}\right)^2 = \left(\frac{r-a}{E_0}\right)^2 . \cot\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2$$

oder

43)

$$\left(\frac{r_0}{E_0-p_0}\right)^2 : \left(\frac{r-a}{E_0}\right)^2 = \left(\frac{r_0}{r-a}\right)^2 : \left(\frac{E_0-p_0}{E_0}\right)^2 = \cos\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2 : \sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2.$$

Man kann die Formeln für r_0 und p_0 noch auf andere Weise ausdrücken.

Nach 30) ist nämlich:

$$\tan\!g\,\frac{1}{2}\varepsilon_0 = \pm\frac{E_0}{r-a},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $r-a$ positiv oder negativ ist. Nach 37) ist aber:

$$r_0^2 = (r-a)^2\sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2\cos\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2 \left\{\frac{1+\left(\dfrac{E_0}{r-a}\right)^2}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2 - \left(\dfrac{E_0}{r-a}\right)^2\sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2}\right\}^2,$$

folglich:

$$r_0^2=(r-a)^2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2\left\{\frac{1+\tang\tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2}{\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2-\tang\tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2}\right\}^2$$

$$=\frac{(r-a)^2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2}{\{\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2-\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2\}^2},$$

und folglich, wenn man den Nenner in Factoren zerlegt:

$$r_0^2=\frac{(r-a)^2\sin\varepsilon_{0,1}^2}{4\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0+\varepsilon_{0,1})^2\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon_{0,1})^2},$$

also:

$$44)\ \ldots\ r_0=\text{val. abs.}\,\frac{(r-a)\sin\varepsilon_{0,1}}{2\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0+\varepsilon_{0,1})\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon_{0,1})}.$$

Ferner ist nach 40):

$$p_0=\frac{E_0}{\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2-\tang\tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2}=\frac{E_0\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2}{\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2-\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}^2},$$

also:

$$45)\ \ldots\ p_0=\frac{E_0\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2}{\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0+\varepsilon_{0,1})\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon_{0,1})};$$

und weil nun

$$E_0=\pm(r-a)\tang\tfrac{1}{2}\varepsilon_0$$

ist, so ist auch:

$$46)\ \ldots\ p_0=\pm\frac{(r-a)\sin\varepsilon_0}{2\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0+\varepsilon_{0,1})\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon_{0,1})},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem $r-a$ positiv oder negativ ist.

Weil

$$\varepsilon_{0,1}=\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0+\varepsilon_{0,1})-\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon_{0,1}),$$
$$\varepsilon_0\ =\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0+\varepsilon_{0,1})+\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon_{0,1})$$

ist, so ist auch:

$$47)\ \ldots\left\{\begin{array}{l} r_0=\text{val. abs.}\,\tfrac{1}{2}(r-a)\{\tang\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0+\varepsilon_{0,1})-\tang\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon_{0,1})\},\\ p_0=\qquad\pm\tfrac{1}{2}(r-a)\{\tang\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0+\varepsilon_{0,1})+\tang\tfrac{1}{2}(\varepsilon_0-\varepsilon_{0,1})\};\end{array}\right.$$

welche Gleichungen ebenfalls sehr elegant sind.

§. 10.

Wenn (fgh) ein beliebiger Punkt im Raume ist, so sind

$$\frac{x}{f}=\frac{y}{g}=\frac{z-a_1}{h-a_1}$$

die Gleichungen der vom Auge nach diesem Punkte gezogenen Geraden; und sind also f_0, g_0, h_0 die Coordinaten des Bildes des Punktes (fgh), so ist:

$$\frac{f_0}{f}=\frac{g_0}{g}=\frac{h_0-a_1}{h-a_1}.$$

Weil aber offenbar $h_0=a$ ist, so werden diese Gleichungen:

$$\frac{f_0}{f}=\frac{g_0}{g}=\frac{a-a_1}{h-a_1},$$

und wir erhalten also zur Bestimmung der Coordinaten des Bildes die folgenden Formeln:

48) . . . $f_0=\frac{a-a_1}{h-a_1}f,\quad g_0=\frac{a-a_1}{h-a_1}g,\quad h_0=a.$

§. 11.

Es seien jetzt u_0', v_0', w_0' die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche eine beliebige, von dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ ausgehende Gerade mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst; die Entfernung eines beliebigen Punktes $(x_0'y_0'z_0')$ in dieser Geraden von dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ sei ϱ_0'. Dann ist offenbar:

$$x_0'=x_0+\varrho_0'\cos u_0',\quad y_0'=y_0+\varrho_0'\cos v_0',\quad z_0'=z_0+\varrho_0'\cos w_0'.$$

Ist nun $(\mathfrak{x}_0'\mathfrak{y}_0'\mathfrak{z}_0')$ das Bild des Punktes $(x_0'y_0'z_0')$, so ist nach 48):

$$\mathfrak{x}_0'=\frac{a-a_1}{z_0'-a_1}x_0',\quad \mathfrak{y}_0'=\frac{a-a_1}{z_0'-a_1}y_0',\quad \mathfrak{z}_0'=a.$$

Sind jetzt $\mathfrak{u}_0'$, $\mathfrak{v}_0'$, $\mathfrak{w}_0'$ die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem Bilde $(\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0)$ des Punktes $(x_0y_0z_0)$ nach dem Bilde $(\mathfrak{x}_0'\mathfrak{y}_0'\mathfrak{z}_0')$ des Punktes $(x_0'y_0'z_0')$ gezogene Gerade mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, und ist $\mathfrak{r}_0'$ die Entfernung der beiden Bilder von einander, so ist:

$$\mathfrak{x}_0'=\mathfrak{x}_0+\mathfrak{r}_0'\cos\mathfrak{u}_0',\quad \mathfrak{y}_0'=\mathfrak{y}_0+\mathfrak{r}_0'\cos\mathfrak{v}_0',\quad \mathfrak{z}_0'=\mathfrak{z}_0+\mathfrak{r}_0'\cos\mathfrak{w}_0';$$

wo

$$\mathfrak{x}_0=\frac{a-a_1}{z_0-a_1}x_0,\quad \mathfrak{y}_0=\frac{a-a_1}{z_0-a_1}y_0,\quad \mathfrak{z}_0=a$$

ist.

Nach den vorhergehenden Formeln ist nun:

$$\mathfrak{x}_0' - \mathfrak{x}_0 = \frac{a-a_1}{z_0'-a_1}x_0' - \frac{a-a_1}{z_0-a_1}x_0,$$

$$\mathfrak{y}_0' - \mathfrak{y}_0 = \frac{a-a_1}{z_0'-a_1}y_0' - \frac{a-a_1}{z_0-a_1}y_0,$$

$$\mathfrak{z}_0' - \mathfrak{z}_0 = a - a;$$

also:

$$\mathfrak{x}_0' - \mathfrak{x}_0 = \left(\frac{a-a_1}{z_0'-a_1} - \frac{a-a_1}{z_0-a_1}\right)x_0 + \frac{a-a_1}{z_0'-a_1}\varrho_0'\cos u_0',$$

$$\mathfrak{y}_0' - \mathfrak{y}_0 = \left(\frac{a-a_1}{z_0'-a_1} - \frac{a-a_1}{z_0-a_1}\right)y_0 + \frac{a-a_1}{z_0'-a_1}\varrho_0'\cos v_0',$$

$$\mathfrak{z}_0' - \mathfrak{z}_0 = 0;$$

oder:

$$\mathfrak{x}_0' - \mathfrak{x}_0 = \frac{a-a_1}{z_0'-a_1}\varrho_0'\cos u_0' + \frac{a-a_1}{z_0'-a_1}\cdot\frac{z_0-z_0'}{z_0-a_1}x_0,$$

$$\mathfrak{y}_0' - \mathfrak{y}_0 = \frac{a-a_1}{z_0'-a_1}\varrho_0'\cos v_0' + \frac{a-a_1}{z_0'-a_1}\cdot\frac{z_0-z_0'}{z_0-a_1}y_0,$$

$$\mathfrak{z}_0' - \mathfrak{z}_0 = 0;$$

folglich nach dem Obigen offenbar:

$$\mathfrak{x}_0' - \mathfrak{x}_0 = \frac{a-a_1}{z_0'-a_1}\varrho_0'\left(\cos u_0' - \frac{x_0}{z_0-a_1}\cos w_0'\right),$$

$$\mathfrak{y}_0' - \mathfrak{y}_0 = \frac{a-a_1}{z_0'-a_1}\varrho_0'\left(\cos v_0' - \frac{y_0}{z_0-a_1}\cos w_0'\right),$$

$$\mathfrak{z}_0' - \mathfrak{z}_0 = 0;$$

und daher nach dem Obigen:

$$49)\quad \begin{cases} \cos \mathfrak{u}_0' = \dfrac{a-a_1}{z_0'-a_1}\cdot\dfrac{\varrho_0'}{\mathfrak{r}_0'}\left(\cos u_0' - \dfrac{x_0}{z_0-a_1}\cos w_0'\right), \\ \cos \mathfrak{v}_0' = \dfrac{a-a_1}{z_0'-a_1}\cdot\dfrac{\varrho_0'}{\mathfrak{r}_0'}\left(\cos v_0' - \dfrac{y_0}{z_0-a_1}\cos w_0'\right), \\ \cos \mathfrak{w}_0' = 0. \end{cases}$$

Weil

$$\cos \mathfrak{u}_0'^2 + \cos \mathfrak{v}_0'^2 + \cos \mathfrak{w}_0'^2 = 1$$

ist, so ist

$$1=\left(\frac{a-a_1}{z_0'-a_1}\cdot\frac{\varrho_0'}{r_0'}\right)^2\cdot\left\{\begin{array}{c}\cos u_0'^2-2\frac{x_0\cos u_0'}{z_0-a_1}\cos w_0'+\left(\frac{x_0}{z_0-a_1}\right)^2\cos w_0'^2\\+\cos v_0'^2-2\frac{y_0\cos v_0'}{z_0-a_1}\cos w_0'+\left(\frac{y_0}{z_0-a_1}\right)^2\cos w_0'^2\end{array}\right\}$$

und folglich, weil offenbar

$$\cos w_0'^2-2\frac{z_0\cos w_0'}{z_0-a_1}\cos w_0'+\left(\frac{z_0}{z_0-a_1}\right)^2\cos w_0'^2=\left(\frac{a_1}{z_0-a_1}\right)^2\cos w_0'^2$$

ist:

$$1=\left(\frac{a-a_1}{z_0'-a_1}\cdot\frac{\varrho_0'}{r_0'}\right)^2\cdot\left\{\begin{array}{c}\cos u_0'^2-2\frac{x_0\cos u_0'}{z_0-a_1}\cos w_0'+\left(\frac{x_0}{z_0-a_1}\right)^2\cos w_0'^2\\+\cos v_0'^2-2\frac{y_0\cos v_0'}{z_0-a_1}\cos w_0'+\left(\frac{y_0}{z_0-a_1}\right)^2\cos w_0'^2\\+\cos w_0'^2-2\frac{z_0\cos w_0'}{z_0-a_1}\cos w_0'+\left(\frac{z_0}{z_0-a_1}\right)^2\cos w_0'^2\\-\left(\frac{a_1}{z_0-a_1}\right)^2\cos w_0'^2\end{array}\right\}$$

also:

$$1=\left(\frac{a-a_1}{z_0'-a_1}\cdot\frac{\varrho_0'}{r_0'}\right)^2\cdot\left\{\begin{array}{c}1+\frac{r^2-a_1^2}{(z_0-a_1)^2}\cos w_0'^2\\-2\frac{x_0\cos u_0'+y_0\cos v_0'+z_0\cos w_0'}{z_0-a_1}\cos w_0'\end{array}\right\}.$$

Steht nun aber die von dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ ausgehende Gerade auf dem nach dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ gezogenen Halbmesser der Kugel senkrecht, so ist

$$\cos\alpha_0\cos u_0'+\cos\beta_0\cos v_0'+\cos\gamma_0\cos w_0'=0,$$

also nach 1):

$$x_0\cos u_0'+y_0\cos v_0'+z_0\cos w_0'=0,$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$50)\;\ldots\;1=\left(\frac{a-a_1}{z_0'-a_1}\cdot\frac{\varrho_0'}{r_0'}\right)^2\cdot\left\{1+\frac{r^2-a_1^2}{(z_0-a_1)^2}\cos w_0'^2\right\}.$$

Wir wollen uns jetzt von dem Punkte $(x_0y_0z\ )$ eine zweite Gerade ausgehend denken, und die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche diese Gerade mit den positiven Theilen der Axen

der x, y, z einschliesst, durch u_0'', v_0'', w_0'' bezeichnen, überhaupt aber für diese zweite Gerade uns ganz ähnlicher Bezeichnungen bedienen, wie für die vorher betrachtete Gerade, indem wir statt eines oberen Accents überall zwei obere Accente setzen; so ist nach 49):

$$51)\quad \begin{cases} \cos\mathfrak{u}_0'' = \dfrac{a-a_1}{z_0''-a_1}\cdot\dfrac{\varrho_0''}{\mathfrak{r}_0''}(\cos u_0'' - \dfrac{x_0}{z_0-a_1}\cos w_0''), \\ \cos\mathfrak{v}_0'' = \dfrac{a-a_1}{z_0''-a_1}\cdot\dfrac{\varrho_0''}{\mathfrak{r}_0''}(\cos v_0'' - \dfrac{y_0}{z_0-a_1}\cos w_0''), \\ \cos\mathfrak{w}_0'' = 0, \end{cases}$$

und, wenn auch diese zweite Gerade auf dem nach dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ gezogenen Halbmesser der Kugel senkrecht steht, nach 50):

$$52)\ \ldots\ 1 = \left(\frac{a-a_1}{z_0''-a_1}\cdot\frac{\varrho_0''}{\mathfrak{r}_0''}\right)^2 .\{1 + \frac{r^2-a_1^2}{(z_0-a_1)^2}\cos w_0''^2\}.$$

Bezeichnen wir den 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen die beiden von dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ ausgehenden Linien mit einander einschliessen, durch W_0, den von ihren Bildern oder Projectionen auf der Tafel eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch $\mathfrak{W}_0$; so ist nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie:

$$\cos W_0 = \cos u_0'\cos u_0'' + \cos v_0'\cos v_0'' + \cos w_0'\cos w_0'',$$

$$\cos \mathfrak{W}_0 = \cos \mathfrak{u}_0'\cos \mathfrak{u}_0'' + \cos \mathfrak{v}_0'\cos \mathfrak{v}_0'' + \cos \mathfrak{w}_0'\cos \mathfrak{w}_0''.$$

Nach 49) und 51) ist aber:

$$\begin{aligned} &\cos\mathfrak{u}_0'\cos\mathfrak{u}_0'' + \cos\mathfrak{v}_0'\cos\mathfrak{v}_0'' + \cos\mathfrak{w}_0'\cos\mathfrak{w}_0'' \\ &= \frac{a-a_1}{z_0'-a_1}\cdot\frac{a-a_1}{z_0''-a_1}\cdot\frac{\varrho_0'\varrho_0''}{\mathfrak{r}_0'\mathfrak{r}_0''} \\ &\times\left\{\begin{aligned} &\cos u_0'\cos u_0'' + \cos v_0'\cos v_0'' \\ &-\frac{x_0\cos u_0'}{z_0-a_1}\cos w_0'' - \frac{y_0\cos v_0'}{z_0-a_1}\cos w_0'' \\ &-\frac{x_0\cos u_0''}{z_0-a_1}\cos w_0' - \frac{y_0\cos v_0''}{z_0-a_1}\cos w_0' \\ &+\left(\frac{x_0}{z_0-a_1}\right)^2\cos w_0'\cos w_0'' + \left(\frac{y_0}{z_0-a_1}\right)^2\cos w_0'\cos w_0'' \end{aligned}\right\}, \end{aligned}$$

und folglich, weil offenbar

$$\cos w_0' \cos w_0'' - \frac{z_0 \cos w_0'}{z_0 - a_1} \cos w_0'' - \frac{z_0 \cos w_0''}{z_0 - a_1} \cos w_0'$$

$$+ \left(\frac{z_0}{z_0 - a_1}\right)^2 \cos w_0' \cos w_0'' = \left(\frac{a_1}{z_0 - a_1}\right)^2 \cos w_0' \cos w_0''$$

ist:

$$\cos \mathfrak{W}_0 = \frac{a - a_1}{z_0' - a_1} \cdot \frac{a - a_1}{z_0'' - a_1} \cdot \frac{\varrho_0' \varrho_0''}{\mathfrak{r}_0' \mathfrak{r}_0''}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \cos u_0' \cos u_0'' + \cos v_0' \cos v_0'' + \cos w_0' \cos w_0'' \\ - \frac{x_0 \cos u_0'}{z_0 - a_1} \cos w_0'' - \frac{y_0 \cos v_0'}{z_0 - a_1} \cos w_0'' - \frac{z_0 \cos w_0'}{z_0 - a_1} \cos w_0'' \\ - \frac{x_0 \cos u_0''}{z_0 - a_1} \cos w_0' - \frac{y_0 \cos v_0''}{z_0 - a_1} \cos w_0' - \frac{z_0 \cos w_0''}{z_0 - a_1} \cos w_0' \\ + \left(\frac{x_0}{z_0 - a_1}\right)^2 \cos w_0' \cos w_0'' + \left(\frac{y_0}{z_0 - a_1}\right)^2 \cos w_0' \cos w_0'' \\ + \left(\frac{z_0}{z_0 - a_1}\right)^2 \cos w_0' \cos w_0'' - \left(\frac{a_1}{z_0 - a_1}\right)^2 \cos w_0' \cos w_0'' \end{array} \right\}.$$

Stehen aber beide Linien auf dem nach dem Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ gezogenen Halbmesser der Kugel senkrecht, so ist

$$x_0 \cos u_0' + y_0 \cos v_0' + z_0 \cos w_0' = 0, \quad x_0 \cos u_0'' + y_0 \cos v_0'' + z_0 \cos w_0'' = 0;$$

also offenbar:

53)

$$\cos \mathfrak{W}_0 = \frac{a - a_1}{z_0' - a_1} \cdot \frac{a - a_1}{z_0'' - a_1} \cdot \frac{\varrho_0' \varrho_0''}{\mathfrak{r}_0' \mathfrak{r}_0''} \left\{ \cos W_0 + \frac{r^2 - a_1^2}{(z_0 - a_1^2)} \cos w_0' \cos w_0'' \right\},$$

welche Formel ich für sehr merkwürdig halte.

Nimmt man den Durchschnittspunkt der Tafel mit der Axe der z als Anfang der Coordinaten an, so sind die dritten Coordinaten des Punktes $(x_0' y_0' z_0')$ und des Auges respective $z_0' - a$ und $a_1 - a$, und diese Coordinaten haben offenbar gleiche oder ungleiche Vorzeichen, jenachdem der Punkt $(x_0' y_0' z_0')$ und das Auge auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Tafel liegen. Also ist der Bruch

$$\frac{a_1 - a}{z_0' - a}$$

positiv oder negativ, folglich der Bruch

$$\frac{a - a_1}{z_0' - a}$$

negativ oder positiv, jenachdem der Punkt $(x_0'y_0'z_0')$ und das Auge auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Tafel liegen. Folglich ist nach 50) offenbar:

$$54) \ldots \quad 1 = \pm \frac{a-a_1}{z_0'-a} \cdot \frac{\varrho_0'}{r_0'} \sqrt{1 + \frac{r^2-a_1^2}{(z_0-a_1)^2} \cos w_0'^2},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der Punkt $(x_0'y_0'z_0')$ und das Auge auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite der Tafel liegen; und ganz eben so ist nach 52):

$$55) \ldots \quad 1 = \pm \frac{a-a_1}{z_0''-a_1} \cdot \frac{\varrho_0''}{r_0''} \sqrt{1 + \frac{r^2-a_1^2}{(z_0-a_1)^2} \cos w_0''^2},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der Punkt $(x_0''y_0''z_0'')$ und das Auge auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite der Tafel liegen.

Denkt man sich nun, was offenbar immer verstattet ist, die Entfernungen ϱ_0' und ϱ_0'' der beiden Punkte $(x_0'y_0'z_0')$ und $(x_0''y_0''z_0'')$ von dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ so klein, dass diese beiden Punkte auf derselben Seite der Tafel liegen; so ist nach 54) und 55) mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\frac{a-a_1}{z_0'-a_1} \cdot \frac{\varrho_0'}{r_0'} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2-a_1^2}{(z_0-a_1)^2} \cos w_0'^2}},$$

$$\frac{a-a_1}{z_0''-a_1} \cdot \frac{\varrho_0''}{r_0''} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2-a_1^2}{(z_0-a_1)^2} \cos w_0''^2}};$$

folglich durch Multiplication:

$$56) \ldots \quad \frac{a-a_1}{z_0'-a_1} \cdot \frac{a-a_1}{z_0''-a_1} \cdot \frac{\varrho_0'\varrho_0''}{r_0'r_0''}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left\{1 + \frac{r^2-a_1^2}{(z_0-a_1)^2} \cos w_0'^2\right\}\left\{1 + \frac{r^2-a_1^2}{(z_0-a_1)^2} \cos w_0''^2\right\}}},$$

was in Verbindung mit 53) zu der folgenden sehr merkwürdigen Formel führt:

$$57) \quad \cos \mathfrak{W}_0 = \frac{\cos W_0 + \frac{r^2-a_1^2}{(z_0-a_1)^2} \cos w_0' \cos w_0''}{\sqrt{\left\{1 + \frac{r^2-a_1^2}{(z_0-a_1)^2} \cos w_0'^2\right\}\left\{1 + \frac{r^2-a_1^2}{(z_0-a_1)^2} \cos w_0''^2\right\}}}.$$

Für $a_1 = \pm r$ ist also

$$\cos \mathfrak{W}_0 = \cos W_0,$$

folglich $\mathfrak{W}_0 = W_0$, welches eine längst bekannte Eigenschaft der stereographischen Projection ist.

§. 11.

Wir wollen uns eine Kegelfläche beschrieben denken, welche die Kugelfläche in dem vorher betrachteten Kugelkreise, dessen sphärischer Mittelpunkt der Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ sein mag, berührt. Die Entfernung der Spitze dieser Kegelfläche von dem Mittelpunkte der Kugel ist augenscheinlich $r \sec \varepsilon_{0,1}$, und die Coordinaten der Spitze sind folglich offenbar:

$$r \sec \varepsilon_{0,1} \cos \alpha_0, \quad r \sec \varepsilon_{0,1} \cos \beta_0, \quad r \sec \varepsilon_{0,1} \cos \gamma_0.$$

Wenn wir, wie von jetzt an geschehen soll, $a_1 = r$ setzen, so sind die Coordinaten des Auges $0, 0, r$. Legen wir aber wieder das in §. 9. gebrauchte Coordinatensystem zu Grunde, so sind die Coordinaten des Mittelpunkts des Bildes unsers Kugelkreises p_0, q_0, a. Die Gleichungen der durch die beiden ersten der drei so eben genannten Punkte gelegten Geraden sind:

$$\frac{x}{r \sec \varepsilon_{0,1} \cos \alpha_0} = \frac{y}{r \sec \varepsilon_{0,1} \cos \beta_0} = \frac{z - r}{r \sec \varepsilon_{0,1} \cos \gamma_0 - r}$$

oder

$$x = \frac{(z-r) \sec \varepsilon_{0,1} \cos \alpha_0}{\sec \varepsilon_{0,1} \cos \gamma_0 - 1}, \quad y = \frac{(z-r) \sec \varepsilon_{0,1} \cos \beta_0}{\sec \varepsilon_{0,1} \cos \gamma_0 - 1};$$

und soll nun der dritte der drei oben genannten Punkte in dieser Geraden liegen, so müssen die beiden Gleichungen

$$p_0 = \frac{(r-a) \sec \varepsilon_{0,1} \cos \alpha_0}{1 - \sec \varepsilon_{0,1} \cos \gamma_0}, \quad q_0 = \frac{(r-a) \sec \varepsilon_{0,1} \cos \beta_0}{1 - \sec \varepsilon_{0,1} \cos \gamma_0}$$

erfüllt sein. Weil offenbar $\beta_0 = 90^\circ$, also $\cos \beta_0 = 0$, und nach §. 9. auch $q_0 = 0$ ist, so ist die zweite der beiden vorstehenden Gleichungen jedenfalls erfüllt, so dass sich also nur frägt, ob auch die erste erfüllt ist, was wir also jetzt untersuchen müssen.

Nun erhellet aber mittelst einer ganz einfachen Betrachtung, dass immer entweder $\alpha_0 = \gamma_0 - 90^\circ$ oder $\alpha_0 = 90^\circ - \gamma_0$, folglich jederzeit $\cos \alpha_0 = \sin \gamma_0$, und daher die zu erfüllende Gleichung

$$p_0 = \frac{(r-a) \sec \varepsilon_{0,1} \sin \gamma_0}{1 - \sec \varepsilon_{0,1} \cos \gamma_0}$$

ist. Nach 16) und 17) ist:

$$\cos\gamma_0=\frac{E_0^2-(r-a)^2}{E_0^2+(r-a)^2},\quad \sin\gamma_0=\frac{2E_0(r-a)}{E_0^2+(r-a)^2};$$

also:

$$\frac{(r-a)\sec\varepsilon_{0,1}\sin\gamma_0}{1-\sec\varepsilon_{0,1}\cos\gamma_0}$$

$$=\frac{2E_0(r-a)^2\sec\varepsilon_{0,1}}{E_0^2+(r-a)^2-\{E_0^2-(r-a)^2\}\sec\varepsilon_{0,1}}$$

$$=\frac{2E_0(r-a)^2\sec\varepsilon_{0,1}}{(r-a)^2(\sec\varepsilon_{0,1}+1)-E_0^2(\sec\varepsilon_{0,1}-1)}$$

$$=\frac{2E_0(r-a)^2}{(r-a)^2(1+\cos\varepsilon_{0,1})-E_0^2(1-\cos\varepsilon_{0,1})}$$

$$=\frac{E_0(r-a)^2}{(r-a)^2\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2-E_0^2\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2},$$

folglich nach 40) wirklich

$$\frac{(r-a)\sec\varepsilon_{0,1}\sin\gamma_0}{1-\sec\varepsilon_{0,1}\cos\gamma_0}=p_0.$$

Die drei oben genannten Punkte liegen also in einer und derselben Geraden, was zu dem folgenden, von Chasles gefundenen Satze führt, dem nach dem Obigen natürlich die Voraussetzung $a_1=r$ zu Grunde liegt:

Bei der gewöhnlichen stereographischen Projection, wo das Auge sich in der Oberfläche der Kugel befindet, ist das Bild der Spitze der die Kugel in einem gewissen Kugelkreise berührenden Kegelfläche der Mittelpunkt des Bildes dieses Kugelkreises.

§. 12.

Von den in §. 7. entwickelten Formeln lässt sich noch eine praktisch wichtige Anwendung machen.

Wir wollen uns auf einer nach stereographischer Projection entworfenen Karte drei Punkte denken, die also die Bilder gewisser Punkte auf der Kugelfläche sind. Die Entfernungen dieser Bilder vom Mittelpunkte der Tafel seien E_0, E_1, E_2; und ihre Entfernungen unter einander seien $E_{0,1}$, $E_{1,2}$, $E_{2,0}$. Alle diese Entfernungen können auf der Karte gemessen werden, und

man kann sich nun die Aufgabe stellen, aus diesen auf der Karte gemessenen Entfernungen den Flächeninhalt $\varDelta$ des sphärischen Dreiecks auf der Kugelfläche zu berechnen, dessen Spitzen die drei in Rede stehenden Punkte auf der Karte als Bilder entsprechen.

Nehmen wir den sphärischen Octanten als Flächeneinheit, den rechten Winkel als Winkeleinheit an, so wird bekanntlich der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks durch seinen sogenannten sphärischen Excess ausgedrückt, weshalb von jetzt an $\varDelta$ den sphärischen Excess bezeichnen mag. Nach §. 7. sind die drei Seiten unsers sphärischen Dreiecks durch $\varepsilon_{0,1}$, $\varepsilon_{1,2}$, $\varepsilon_{2,0}$ zu bezeichnen, und nach einer sehr bekannten Formel haben wir für den sphärischen Excess den folgenden Ausdruck:

$$58) \quad \cos\tfrac{1}{2}\varDelta = \frac{1+\cos\varepsilon_{0,1}+\cos\varepsilon_{1,2}+\cos\varepsilon_{2,0}}{4\cos\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}\cos\frac{1}{2}\varepsilon_{1,2}\cos\frac{1}{2}\varepsilon_{2,0}}.$$

Nach 27) ist:

$$\cos\varepsilon_{0,1} = 1 - \frac{2\left(\frac{E_{0,1}}{r-a}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\right\}},$$

$$\cos\varepsilon_{1,2} = 1 - \frac{2\left(\frac{E_{1,2}}{r-a}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{E_2}{r-a}\right)^2\right\}},$$

$$\cos\varepsilon_{2,0} = 1 - \frac{2\left(\frac{E_{2,0}}{r-a}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{E_2}{r-a}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\right\}};$$

also, wie sich hieraus auf der Stelle ergiebt:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2 = 1 - \frac{\left(\frac{E_{0,1}}{r-a}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\right\}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{1,2}{}^2 = 1 - \frac{\left(\frac{E_{1,2}}{r-a}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{E_1}{r-a}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{E_2}{r-a}\right)^2\right\}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{2,0}{}^2 = 1 - \frac{\left(\frac{E_{2,0}}{r-a}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{E_2}{r-a}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{E_0}{r-a}\right)^2\right\}}.$$

Setzen wir aber der Kürze wegen:

59) . . . $u_0 = \frac{E_0}{r-a}, \quad u_1 = \frac{E_1}{r-a}, \quad u_2 = \frac{E_2}{r-a}$

und

60) . . $u_{0,1} = \frac{E_{0,1}}{r-a}, \quad u_{1,2} = \frac{E_{1,2}}{r-a}, \quad u_{2,0} = \frac{E_{2,0}}{r-a};$

so ist:

$$\cos\varepsilon_{0,1} = 1 - \frac{2u_{0,1}^2}{(1+u_0^2)(1+u_1^2)}, \quad \cos\varepsilon_{1,2} = 1 - \frac{2u_{1,2}^2}{(1+u_1^2)(1+u_2^2)},$$

$$\cos\varepsilon_{2,0} = 1 - \frac{2u_{2,0}^2}{(1+u_2^2)(1+u_0^2)};$$

also:

$$1 + \cos\varepsilon_{0,1} + \cos\varepsilon_{1,2} + \cos\varepsilon_{2,0}$$

$$= 4 - 2\frac{u_{0,1}^2(1+u_2^2) + u_{1,2}^2(1+u_0^2) + u_{2,0}^2(1+u_1^2)}{(1+u_0^2)(1+u_1^2)(1+u_2^2)},$$

oder:

$$\frac{1 + \cos\varepsilon_{0,1} + \cos\varepsilon_{1,2} + \cos\varepsilon_{2,0}}{4}$$

$$= 1 - \frac{u_{0,1}^2(1+u_2^2) + u_{1,2}^2(1+u_0^2) + u_{2,0}^2(1+u_1^2)}{2(1+u_0^2)(1+u_1^2)(1+u_2^2)}.$$

Ferner ist:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2 = 1 - \frac{u_{0,1}^2}{(1+u_0^2)(1+u_1^2)}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{1,2}{}^2 = 1 - \frac{u_{1,2}^2}{(1+u_1^2)(1+u_2^2)},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{2,0}{}^2 = 1 - \frac{u_{2,0}^2}{(1+u_2^2)(1+u_0^2)};$$

also:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{1,2}{}^2\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{2,0}{}^2$$

$$= \frac{\{(1+u_0^2)(1+u_1^2)-u_{0,1}^2\}\{(1+u_1^2)(1+u_2^2)-u_{1,2}^2\}\{(1+u_2^2)(1+u_0^2)-u_{2,0}^2\}}{(1+u_0^2)^2(1+u_1^2)^2(1+u_2^2)^2}.$$

Setzen wir aber der Kürze wegen:

61) . . $v_0^2 = 1 + u_0^2, \quad v_1^2 = 1 + u_1^2, \quad v_2^2 = 1 + u_2^2;$

so ist:

$$\frac{1 + \cos\varepsilon_{0,1} + \cos\varepsilon_{1,2} + \cos\varepsilon_{2,0}}{4} = 1 - \frac{u_{0,1}^2 v_2^2 + u_{1,2}^2 v_0^2 + u_{2,0}^2 v_1^2}{2v_0^2 v_1^2 v_2^2}$$

und

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{0,1}{}^2\cos\varepsilon_{1,2}{}^2\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon_{2,0}{}^2$$

$$=\frac{(v_0{}^2v_1{}^2-u_{0,1}{}^2)(v_1{}^2v_2{}^2-u_{1,2}{}^2)(v_2{}^2v_0{}^2-u_{2,0}{}^2)}{v_0{}^4v_1{}^4v_2{}^4}$$

$$=-\frac{(u_{0,1}{}^2-v_0{}^2v_1{}^2)(u_{1,2}{}^2-v_1{}^2v_2{}^2)(u_{2,0}{}^2-v_2{}^2v_0{}^2)}{v_0{}^4v_1{}^4v_2{}^4}.$$

Also ist nach 58):

$$62)\quad \cos\tfrac{1}{2}\varDelta=\frac{2v_0{}^2v_1{}^2v_2{}^2-(u_{0,1}{}^2v_2{}^2+u_{1,2}{}^2v_0{}^2+u_{2,0}{}^2v_1{}^2)}{2\sqrt{(v_0{}^2v_1{}^2-u_{0,1}{}^2)(v_1{}^2v_2{}^2-u_{1,2}{}^2)(v_2{}^2v_0{}^2-u_{2,0}{}^2)}}$$

oder:

$$63)\quad \cos\tfrac{1}{2}\varDelta=\frac{v_0{}^2v_1{}^2v_2{}^2-\tfrac{1}{2}(v_0{}^2u_{1,2}{}^2+v_1{}^2u_{2,0}{}^2+v_2{}^2u_{0,1}{}^2)}{\sqrt{(v_0{}^2v_1{}^2-u_{0,1}{}^2)(v_1{}^2v_2{}^2-u_{1,2}{}^2)(v_2{}^2v_0{}^2-u_{2,0}{}^2)}}.$$

Setzt man noch der Kürze wegen:

$$64)\ \ldots\ w_{0,1}=\frac{u_{0,1}}{v_0v_1},\quad w_{1,2}=\frac{u_{1,2}}{v_1v_2},\quad w_{2,0}=\frac{u_{2,0}}{v_2v_0};$$

so ist:

$$65)\ \ldots\ \cos\tfrac{1}{2}\varDelta=\frac{1-\tfrac{1}{2}(w_{0,1}{}^2+w_{1,2}{}^2+w_{2,0}{}^2)}{\sqrt{(1-w_{0,1}{}^2)(1-w_{1,2}{}^2)(1-w_{2,0}{}^2)}}.$$

Also ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2=\frac{(1-w_{0,1}{}^2)(1-w_{1,2}{}^2)(1-w_{2,0}{}^2)-\{1-\tfrac{1}{2}(w_{0,1}{}^2+w_{1,2}{}^2+w_{2,0}{}^2)\}^2}{(1-w_{0,1}{}^2)(1-w_{1,2}{}^2)(1-w_{2,0}{}^2)}.$$

Der Zähler ist, wie man nach leichter Entwickelung findet:

$$\tfrac{1}{4}(2w_{0,1}{}^2w_{1,2}{}^2+2w_{1,2}{}^2w_{2,0}{}^2+2w_{2,0}{}^2w_{0,1}{}^2-w_{0,1}{}^4-w_{1,2}{}^4-w_{2,0}{}^4)$$
$$-w_{0,1}{}^2w_{1,2}{}^2w_{2,0}{}^2,$$

und folglich nach einer bekannten Zerlegung, wenn man der Kürze

$$66)\ \ldots\ W=(w_{0,1}+w_{1,2}+w_{2,0})(-w_{0,1}+w_{1,2}+w_{2,0})$$
$$\times(w_{0,1}-w_{1,2}+w_{2,0})(w_{0,1}+w_{1,2}-w_{2,0})$$

setzt:

$$\tfrac{1}{4}W-w_{0,1}{}^2w_{1,2}{}^2w_{2,0}{}^2.$$

Also ist:

$$67)\ \ldots\ \sin\tfrac{1}{2}\varDelta=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{W-4w_{0,1}{}^2w_{1,2}{}^2w_{2,0}{}^2}{(1-w_{0,1}{}^2)(1-w_{1,2}{}^2)(1-w_{2,0}{}^2)}}.$$

Nach 65) und 67) ist auch:

68) . . . $\tang\frac{1}{2}\varDelta=\frac{\sqrt{W-4w_{0,1}{}^2w_{1,2}{}^2w_{2,0}{}^2}}{2-(w_{0,1}{}^2+w_{1,2}{}^2+w_{2,0}{}^2)}$

oder:

69) . . . $\tang\frac{1}{2}\varDelta=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}W-w_{0,1}{}^2w_{1,2}{}^2w_{2,0}{}^2}}{1-\frac{1}{2}(w_{0,1}{}^2+w_{1,2}{}^2+w_{2,0}{}^2)}$.

Nach 26), 59), 60) ist auch:

70) . . . $$\begin{cases}\sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}=\pm\frac{u_{0,1}}{\sqrt{(1+u_0{}^2)(1+u_1{}^2)}},\\ \sin\frac{1}{2}\varepsilon_{1,2}=\pm\frac{u_{1,2}}{\sqrt{(1+u_1{}^2)(1+u_2{}^2)}},\\ \sin\frac{1}{2}\varepsilon_{2,0}=\pm\frac{u_{2,0}}{\sqrt{(1+u_2{}^2)(1+u_0{}^2)}};\end{cases}$$

oder nach 61):

71) $\sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}=\pm\frac{u_{0,1}}{v_0v_1},\quad \sin\frac{1}{2}\varepsilon_{1,2}=\pm\frac{u_{1,2}}{v_1v_2},\quad \sin\frac{1}{2}\varepsilon_{2,0}=\pm\frac{u_{2,0}}{v_2v_0};$

wenn man in diesen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem respective die Grössen $u_{0,1}$, $u_{1,2}$, $u_{2,0}$ positiv oder negativ sind. Natürlich kann man, wenn man etwa nach diesen Formeln die Winkel $\varepsilon_{0,1}$, $\varepsilon_{1,2}$, $\varepsilon_{2,0}$ oder die Seiten unsers sphärischen Dreiecks berechnet hat, natürlich den sphärischen Excess $\varDelta$ nach allen den Formeln berechnen, welche in der sphärischen Trigonometrie zu diesem Zweck entwickelt zu werden pflegen.

Berechnet man die zwischen -90^0 und $+90^0$ liegenden Hülfswinkel φ_0, φ_1, φ_2 mittelst der Formeln:

72) . . . $\tang\varphi_0=u_0,\quad \tang\varphi_1=u_1,\quad \tang\varphi_2=u_2;$

so ist nach 61):

73) . . . . $v_0=\sec\varphi_0,\quad v_1=\sec\varphi_1,\quad v_2=\sec\varphi_2;$

also nach 68) mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie oben:

74) . . . . $$\begin{cases}\sin\frac{1}{2}\varepsilon_{0,1}=\pm u_{0,1}\cos\varphi_0\cos\varphi_1,\\ \sin\frac{1}{2}\varepsilon_{1,2}=\pm u_{1,2}\cos\varphi_1\cos\varphi_2,\\ \sin\frac{1}{2}\varepsilon_{2,0}=\pm u_{2,0}\cos\varphi_2\cos\varphi_0.\end{cases}$$

Ob dieser Gegenstand noch einer weiteren Ausführung und Entwickelung fähig ist, muss ich für jetzt dahin gestellt sein lassen.

XXVI.

Eine Bemerkung über die besonderen Auflösungen einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit zwei Veränderlichen.

Von

Herrn Doctor *A. Weiler*,

Lehrer der Mathematik an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.

Es ist bekannnt, dass die Integration einer Differentialgleichung mit zwei Veränderlichen x und y darauf hinzielt, alle möglichen Funktionen von y anzugeben, welche der Differentialgleichung genügen, wenn man dieselben an die Stelle von z einsetzt. Dieses Ziel erreicht die Integralrechnung jedesmal durch die Bestimmung des allgemeinen Integrals oder der allgemeinsten endlichen Gleichung, woraus die vorliegende Differentialgleichung abgeleitet werden kann. Die fraglichen Funktionen ergeben sich alsdann nach einfachen Regeln. Doch zerfallen dieselben in zwei verschiedene Klassen. Alle diejenigen Funktionen, welche dem allgemeinen Integrale genügen, nachdem man die darin vorkommenden willkührlichen Grössen irgend wie spezialisirt hat, gehören in die erste Klasse, und heissen besondere Integrale. In die andere Klasse rechnet man alle diejenigen Funktionen, welche zwar der Differentialgleichung, nicht aber dem allgemeinen Integrale genügen, wie man auch immer die willkührlichen Beständigen darin angeben mag. Man hat diese letzteren Funktionen besondere Auflösungen der Differentialgleichung genannt.

In den vorliegenden Zeilen beabsichtige ich, auf einen Umstand aufmerksam zu machen, welcher bei der Bestimmung der

besonderen Auflösungen einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung nicht übersehen werden darf. Es sei desshalb $\alpha = c$ das zweite Integral einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit zwei Veränderlichen; c sei die willkührliche Beständige und α eine Funktion der beiden Veränderlichen z und y und der zweiten willkührlichen Beständigen b. Wenn dies zweite Integral in der Form

$$\alpha_1 (z-p)^m + \alpha_2 = c$$

auftritt, worin α_1 und α_2 wieder Funktionen von z, y und b sind, p aber eine Funktion von y und b, und m eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl vorstellt, so genügt man bekanntlich durch $z = p$ der entsprechenden Differentialgleichung der ersten Ordnung. Man weiss auch, dass diese Eigenschaft niemals verloren geht, wenn irgend ein Faktor aus der Differentialgleichung

$$m\alpha_1 (z-p)^{m-1} . (z'-p') + \left(\frac{d\alpha_1}{dz} z' + \frac{d\alpha_1}{dy}\right)(z-p)^m + \frac{d\alpha_2}{dz} z' + \frac{d\alpha_2}{dy} = 0$$

wegfällt. Da aber die Gleichung $z = p$ in keiner Weise der Integralform $\alpha = c$ Genüge leistet, so ist dieselbe eine besondere Auflösung der vorliegenden Differentialgleichung.

Um die Differentialgleichung der zweiten Ordnung darzustellen, deren allgemeines Integral in der Form $\alpha = c$ angeschrieben worden ist, so hat man die obige Differentialgleichung der ersten Ordnung in der Weise zu differentiiren, dass dadurch auch die andere willkührliche Beständige b zum Verschwinden kommt. Setzt man abkürzend $z - p = s$, so schreibt man jene Gleichung in der Form:

$$1. \qquad m\alpha_1 \frac{s'}{s} + \frac{d\alpha_1}{dz} z' + \frac{d\alpha_1}{dy} + \frac{1}{s^m}\left(\frac{d\alpha_2}{dz} z' + \frac{d\alpha_2}{dy}\right) = 0.$$

Durch die Differentiation entsteht:

2.

$$m\alpha_1 \left(\frac{s''}{s} - \frac{s'^2}{s^2}\right) + \frac{ms'}{s}\left(\frac{d\alpha_1}{dz} z' + \frac{d\alpha_1}{dy}\right) + \frac{d\alpha_1}{dz} z'' + \frac{d^2\alpha_1}{dz^2} z'^2 + 2\frac{d^2\alpha_1}{dz dy} z' + \frac{d^2\alpha_1}{dy^2}$$

$$- \frac{ms'}{s^{m+1}}\left(\frac{d\alpha_2}{dz} z' + \frac{d\alpha_2}{dy}\right) + \frac{1}{s^m}\left(\frac{d\alpha_2}{dz} z'' + \frac{d^2\alpha_2}{dz^2} z'^2 + 2\frac{d^2\alpha_2}{dz dy} z' + \frac{d^2\alpha_2}{dy^2}\right) = 0.$$

Man erhält aber die erwähnte Differentialgleichung der zweiten Ordnung auch dadurch, dass man aus den beiden Gleichungen 1. und 2. die willkührliche Beständige eliminirt. Wenn nun die Grösse s nur in den Quotienten $\frac{s'}{s}$ und $\frac{s''}{s}$ vorkäme, so würde

in allen Fällen $s=0$ der so entstehenden Differentialgleichung der zweiten Ordnung Genüge leisten Da aber s auch in solcher Weise vorkommt, dass für $s=0$ gewisse Glieder der Gleichungen 1. und 2. den Werth ∞ annehmen, so kann es vorkommen, dass durch die Elimination von b in der neuen Gleichung Glieder entstehen, welche für $s=0$ einen endlichen Werth erhalten, während alle übrigen Glieder für $s=0$ verschwinden. Daraus folgt, dass es Fälle giebt, wo die Gleichung $s=0$ oder $z=p$ der Differentialgleichung der zweiten Ordnung nicht mehr genügt, während doch diese Gleichung als besondere Auflösung der Differentialgleichung der ersten Ordnung betrachtet werden muss. Diesen Umstand also hat man zu beachten, wenn es auf die Bestimmung der besonderen Auflösungen einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung ankommt.

Es sei z. B.

$$\sqrt{z^2-y^2+b}=ay+c$$

das allgemeine Integral einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung, so dass b und c die willkührlichen Beständigen vorstellen. Durch die Differentiation entsteht die Gleichung:

$$zz'-y=a\sqrt{z^2-y^2+b},$$

für welche die besondere Auflösung $z^2=y^2-b$ besteht. Um durch die zweite Differentiation die Beständige b wegzuschaffen, so schreibe man diese Gleichung in der Form:

$$(zz'-y)^2=a^2(z^2-y^2+b).$$

Die Differentiation führt auf:

$$(zz'-y)(zz''+z'^2-1)=a^2(zz'-y),$$

oder auch, wenn man den gemeinsamen Faktor $zz'-y$ streicht, auf die Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$zz''+z'^2=1+a^2,$$

der man offenbar nicht mehr durch $z^2=y^2-b$ genügt.

Das Vorstehende enthält zugleich die Berichtigung einer Stelle in meiner Abhandlung über Integration der Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit zwei Veränderlichen, welche in dem 29sten Theile dieses Archivs erschienen ist. Dort ist nämlich (S. 50. Zeile 4—8) der hier auseinandergesetzte Umstand übersehen und als ausgemacht angenommen, dass jede Funktion von y, welche an der Stelle von z einer Differentialgleichung der ersten Ordnung genügt, auch die daraus abgeleitete Differentialgleichung der zweiten Ordnung befriedige.

XXVII.

Die Radien der in und um die regulären Polyeder beschriebenen Kugeln.

Von

Herrn Doctor *B. Sommer*

zu Coblenz *).

Ich gebe hier eine Methode der Auffindung dieser Radien, die mir die einfachste zu sein scheint. Sie beruht auf dem Satze:

„Wenn man die Mittelpunkte der anstossenden Flächen eines regulären Polyeders mit *F* Flächen und *E* Ecken durch Kanten verbindet, so erhält man ein reguläres Polyeder mit *E* Flächen und *F* Ecken."

La Fremoire (übers. von Kaufmann) führt diesen Satz in seiner „Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben" auch an, M. a. VII. 44.

Der erstere dieser regulären Körper sei der primitife, der andere der abgeleitete; betrachtet man diesen letzteren wieder als primitifen Körper und leitet einen dritten Körper ab, so lässt sich leicht zeigen, dass dieser letztere dem ersteren ähnlich ist; hierauf stützt sich die Herleitung.

Die Kante des ersten Körpers sei a, die des zweiten b, die des dritten c; R sei der Radius der umbeschriebenen Kugel, r der der einbeschriebenen Kugel; der Deutlichkeit wegen füge ich diesem letzten oben die Kante und unten die Anzahl der Flächen des Polyeders bei, so dass

$\overset{a}{\underset{F}{R}}$ den Radius der um den ersten Körper beschriebenen Kugel,

*) Dem Herausgeber aus Genf zugesandt.

Wei

llen
zweit
se vo
1. un
s durc
stehen,
l alle
s es F
ntialglei
l doch
tialgleich
sen Um
mnung de
zweiten
Es sei z

allgemei
nung, so
len. Durc

welche d
ch die zwe
schreibe m

Differentia

r auch, we
die Differe

man offenb
Das Vorste
meiner Abha
ter und zwe
n 29sten T
lich (S. 50.
rsehen und
welche an d
dnung genüg
zweiten Or

[illegible] Körper beschriebenen [illegible]

[illegible] Radius des Kreises, den [illegible] Körper beschreiben kann. [illegible] als Seitenflächen lauter [illegible] lauter solche von n Seiten, [illegible] solche von m Seiten; diese Anzahl [illegible] an, während oben die Kante [illegible] z. B.

[illegible] der Radius des Kreises, den man in die Seitenfl[illegible] des zweiten Körpers beschreiben kann.

[illegible] Relation ergiebt sich [illegible], weil die in den pr[illegible] Körper beschriebene Kugel gleichmäßig für den abgeleitet[illegible] Körper [illegible] ist:

[illegible]

Die zweite Beziehung findet sich auf folgende Art: Es [illegible] Mittelpunkt der beiden Körper, C und C' seien die [illegible] zweier aneinander stoßender Seitenflächen des primitiven [illegible] ST die Kante dieser Seitenflächen, D der Halbirungs[illegible] dieser Kante; die Länge der Kante sei gleich k; dann [illegible]

$$SD = TD = \tfrac{1}{2}k,\quad OC = OC' = r,\quad OS = OT = [illegible]$$

[illegible] die Kante des abgeleiteten Körpers, ihre Länge [illegible]

$$[illegible] = \sqrt{OD^2 - DS^2} = \sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}k^2}.$$

Der [illegible] Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks OCD ist [illegible]: er ist [illegible] gleich $OC \times$ [illegible] gleich OD mal dem Perpendikel, von [illegible] Dieses letztere Perpendikel ist aber gleich [illegible] auf OD fällt, und da beide zus[illegible] Linie CC' bilden, so hat man jedes der Perpendikel [illegible] Man hat daher so den doppelten Inhalt von [illegible] und daher die Gleichung:

$$2\,OCD = \tfrac{1}{2}k\sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}k^2}$$

$$r\varrho = \pm \tfrac{1}{2}l\sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}k^2} \quad \text{oder} \quad 4r^2\varrho^2 = l^2(R^2 - \tfrac{1}{4}k^2).$$

Betrachtet man nun zuerst den ersten Körper als primitifen und nachher den zweiten als primitifen, so ergeben sich die zwei Gleichungen:

$$4(\overset{a}{r}_F)^2.(\overset{a}{\varrho}_m)^2 = b^2(\overset{a}{R}_F{}^2 - \frac{a^2}{4}), \tag{3}$$

$$4(\overset{b}{r}_E)^2.(\overset{b}{\varrho}_n)^2 = c^2(\overset{b}{R}_E{}^2 - \frac{b^2}{4}). \tag{4}$$

ducirt man nun alle diese Radien auf die Länge der Kante a, findet man, wenn X der allgemeine Repräsentant dieser r, ϱ ist, vermöge der Proportionen:

$$X^a : X^b = a : b, \quad X^a : X^c = a : c$$

$$X^b = \frac{b}{a}X^a, \quad X^c = \frac{c}{a}X^a.$$

t man diese Reductionen ein in die Gleichungen (1) bis (4), ntsteht, wenn man nun die Buchstaben a ganz weglässt, wo sie über den Radien angebracht hat, da diese Radien sich alle auf die Länge der Kante a beziehen:

$$bR_E = ar_F, \quad cR_F = br_E,$$

$$4r_F^2.\varrho_m^2 = b^2(R_F^2 - \frac{a^2}{4}),$$

$$4b^2r_E^2\varrho_n^2 = c^2a^2(R_E^2 - \frac{a^2}{4}).$$

den ersten beiden dieser Gleichungen ergibt sich:

$$r_F = \frac{bR_E}{a}, \quad r_E = \frac{c}{b}R_F;$$

in die letzten beiden Gleichungen gesetzt, gibt:

$$4R_E^2\varrho_m^2 = a^2(R_F^2 - \frac{a^2}{4}),$$

$$4R_F^2\varrho_n^2 = a^2(R_E^2 - \frac{a^2}{4});$$

sich ergibt:

$$R_F^2 = \frac{a^2(a^2 + 4\varrho_m^2)}{4[a^4 - (4\varrho_m\varrho_n)^2]}; \tag{5}$$

$\overset{b}{\underset{E}{r}}$ den Radius der in den zweiten Körper beschriebenen Kugel

anzeigt. Ferner sei ϱ die Länge des Radius des Kreises, den man in eine der Seitenflächen dieser Körper beschreiben kann. Ich nehme an, der erste Körper habe als Seitenflächen lauter Polygone von m Seiten, der zweite lauter solche von n Seiten, dann hat der dritte wieder solche von m Seiten; diese Anzahl der Seiten hänge ich dem ϱ an, während oben die Kante angedeutet ist; so ist also z. B.

$\overset{b}{\underset{n}{\varrho}}$ der Radius des Kreises, den man in die Seitenfläche des zweiten Körpers beschreiben kann.

Als erste Relation ergibt sich nun direct, weil die in den primitifen Körper beschriebene Kugel gleichzeitig für den abgeleiteten Körper umbeschrieben ist:

$$\overset{a}{\underset{F}{r}} = \overset{b}{\underset{E}{R}}, \qquad (1)$$

$$\overset{b}{\underset{E}{r}} = \overset{c}{\underset{F}{R}}. \qquad (2)$$

Eine zweite Beziehung findet sich auf folgende Art: Es sei O der Mittelpunkt der beiden Kugeln, C und C' seien die Mittelpunkte zweier anstossender Seitenflächen des primitifen Körpers, ST sei die Kante dieser Seitenflächen, D der Halbirungspunkt dieser Kante; die Länge der Kante sei gleich k; dann ist

$$CD = C'D = \varrho, \quad SD = TD = \tfrac{1}{2}k, \quad OC = OC' = r, \quad OS = OT = R;$$

CC' ist nun die Kante des abgeleiteten Körpers; ihre Länge sei l. Es ist ferner

$$OD = \sqrt{OS^2 - DS^2} = \sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}k^2}.$$

Der doppelte Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks OCD ist nun leicht auf zwei Arten ausdrückbar: er ist 1) gleich $OC \times CD$ oder gleich $r\varrho$ und 2) gleich OD mal dem Perpendikel, von C auf OD gefällt. Dieses letztere Perpendikel ist aber gleich demjenigen, welches man von C' auf OD fällt, und da beide zusammen die Linie CC' bilden, so hat man jedes der Perpendikel $= \tfrac{1}{2}CC'$, d. h. $\tfrac{1}{2}l$. Man hat daher so den doppelten Inhalt von $\triangle\, OCD = \tfrac{1}{2}l . \sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}k^2}$, und daher die Gleichung:

$$r\varrho = \tfrac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}k^2} \text{ oder } 4r^2\varrho^2 = l^2(R^2 - \tfrac{1}{4}k^2).$$

Betrachtet man nun zuerst den ersten Körper als primitifen und nachher den zweiten als primitifen, so ergeben sich die zwei Gleichungen:

$$4(\overset{a}{r}_F)^2 \cdot (\overset{a}{\varrho}_m)^2 = b^2(\overset{a}{R}_F{}^2 - \frac{a^2}{4}), \qquad (3)$$

$$4(\overset{b}{r}_E)^2 \cdot (\overset{b}{\varrho}_n)^2 = c^2(\overset{b}{R}_E{}^2 - \frac{b^2}{4}). \qquad (4)$$

Reducirt man nun alle diese Radien auf die Länge der Kante a, so findet man, wenn X der allgemeine Repräsentant dieser R, r, ϱ ist, vermöge der Proportionen:

$$X^a : X^b = a : b, \quad X^a : X^c = a : c$$

nun

$$X^b = \frac{b}{a} X^a, \quad X^c = \frac{c}{a} X^a.$$

Führt man diese Reductionen ein in die Gleichungen (1) bis (4), so entsteht, wenn man nun die Buchstaben a ganz weglässt, wo man sie über den Radien angebracht hat, da diese Radien sich jetzt alle auf die Länge der Kante a beziehen:

$$bR_E = ar_F, \quad cR_F = br_E,$$

$$4r_F^2 . \varrho_m^2 = b^2(R_F^2 - \frac{a^2}{4}),$$

$$4b^2 r_E^2 \varrho_n^2 = c^2 a^2 (R_E^2 - \frac{a^2}{4}).$$

Aus den ersten beiden dieser Gleichungen ergibt sich:

$$r_F = \frac{bR_E}{a}, \quad r_E = \frac{c}{b} R_F;$$

dies in die letzten beiden Gleichungen gesetzt, gibt:

$$4R_E^2 \varrho_m^2 = a^2(R_F^2 - \frac{a^2}{4}),$$

$$4R_F^2 \varrho_n^2 = a^2(R_E^2 - \frac{a^2}{4});$$

woraus sich ergibt:

$$R_F^2 = \frac{a^2(a^2 + 4\varrho_m^2)}{4[a^4 - (4\varrho_m \varrho_n)^2]}; \qquad (5)$$

der Werth von R^2_E ergibt sich durch Vertauschung von m und n.

Bezeichnet man mit P den Radius des Kreises, den man um eine Seitenfläche beschreiben kann, so ist $P^2 = \varrho^2 + \frac{a^2}{4}$, daher $4P^2 = 4\varrho^2 + a^2$, folglich ist dann:

$$R^2_F = \frac{a^4 P_m^2}{a^4 - (4\varrho_m \varrho_n)^2}. \qquad (I)$$

Um r zu finden, benutzt man die Beziehung $R^2 = r^2 + P^2$, die allen regulären Körpern eigenthümlich ist, und findet mit Hülfe des gefundenen R nun

$$r^2_F = \frac{16\varrho_m^2 \varrho_n^2}{a^4 - (4\varrho_m \varrho_n)^2} \cdot P_m^2. \qquad (II)$$

Für den Fall des Tetraeders ergibt sich eine Vereinfachung für R, da dies ein regulärer Körper ist, und zwar der einzige, bei welchem der abgeleitete Körper direct schon dem primitifen ähnlich ist; es ist für dasselbe $m = n$, daher dann

$$R_4^2 = \frac{a^4}{4(a^4 + 4\varrho_3^2)},$$

wie man am einfachsten aus dem Werthe (5) ersieht.

Man kann auch die Gleichungen (I) und (II) benutzen, um zu zeigen, dass nur fünf reguläre Körper möglich sind. Da nämlich r das Perpendikel von O auf die Seitenfläche ist, so hat man r kleiner als R; dadurch entsteht die Bedingung der Möglichkeit für Polyeder, vermöge (I) und (II):

$$a^4 > 16\varrho_m^2 \varrho_n^2 \quad \text{oder} \quad a^2 > 4\varrho_m \varrho_n,$$

oder da $\varrho_m = \frac{a}{2} \cot g \frac{180^0}{m}$ und $\varrho_n = \frac{a}{2} \cot g \frac{180^0}{n}$ ist:

$$1 > \cot g \frac{180^0}{m} . \cot g \frac{180^0}{n}, \text{ d. h. } \cos\left(\frac{180^0}{m} + \frac{180^0}{n}\right) < 0.$$

Mithin, weil $\frac{180^0}{m}$ und $\frac{180^0}{n}$ beide positive Werthe haben und spitze Winkel sind:

$$\frac{180^0}{m} + \frac{180^0}{n} > 90^0, \text{ oder } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \tfrac{1}{2}. \qquad (6)$$

Nun sind aber m und n positive ganze Zahlen und im Minimum gleich 3, wodurch sich die fünf Zusammenstellungen für m und n ergeben: 3, 3; 3, 4; 3, 5; 4, 3; 5, 3.

Zwischen m, n, F, E bestehen vermöge des **Euler**'schen Satzes die Beziehungen:

$$\text{Anzahl der Kanten} = F + E - 2 = \tfrac{1}{2}mF = \tfrac{1}{2}nE,$$

woher sich für die schon bestimmten Werthe von m und n nun ergeben:

$$F = \frac{4m}{2(m+n) - mn}, \quad E = \frac{4n}{2(m+n) - mn}$$

wo der Nenner $2(m+n) - mn$ nur für die fünf angegebenen Werthe von m und n positiv bleibt, da die Bedingung $2(m+n) - mn > 0$ identisch mit (6) ist.

Ich habe diese Behandlung dieses Gegenstandes in der Sitzung der **Société physique et de l'histoire naturelle de Genève** am 2ten Dezember 1858 vorgelesen.

XXVIII.

Beweis der allgemeinen Gültigkeit der Formeln

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Von

Herrn Dr. *Carl Spitz*,

Lehrer am Polytechnikum zu Carlsruhe.

---

1. Bei Gelegenheit der Bearbeitung eines Lehrbuches der ebenen Trigonometrie für den Schulgebrauch *) sah ich mich vergebens in Büchern und Zeitschriften nach einem allgemeinen Beweis der Gültigkeit der Formeln

*) Dasselbe ist in der C. F. **Winter**'schen Verlagshandlung in Leipzig erschienen.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

um, welcher zur Aufnahme in ein solches Buch geeignet gewesen wäre. In einem grossen Theile der vorhandenen Lehrbücher finden sich nicht einmal Beweise der Allgemeinheit dieser für specielle Annahmen entwickelten goniometrischen Formeln, wohl aber die Anwendungen derselben auf die allgemeinsten Voraussetzungen, gleichsam als verstehe sich die Allgemeinheit der erhaltenen Resultate von selbst; in anderen dagegen sind zwar Beweise dafür gegeben, aber alle stimmen darin überein, dass zuerst die Gültigkeit der fraglichen Formel für den Fall dargethan wird, wo $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$, um alsdann aus dieser in Verbindung mit anderen, zwar früher schon, aber durch Einzelbetrachtungen allgemein erwiesenen Relationen, die Richtigkeit für alle innerhalb der vier ersten Quadranten liegenden Werthe von α und β nachzuweisen, wobei es dann nothwendig wird, wenn φ und ψ zwei spitze Winkel bezeichnen, den Beweis für jeden der nachstehenden 10 Fälle besonders zu führen, nämlich für:

1) $\alpha=\varphi$	und	$\beta=\psi$,	6) $\alpha=\pi+\varphi$	und	$\beta=\pi-\psi$,
2) $\alpha=\pi-\varphi$	„	$\beta=\psi$,	7) $\alpha=2\pi-\varphi$	„	$\beta=\pi-\psi$,
3) $\alpha=\pi+\varphi$	„	$\beta=\psi$,	8) $\alpha=\pi+\varphi$	„	$\beta=\pi+\psi$,
4) $\alpha=2\pi-\varphi$	„	$\beta=\psi$,	9) $\alpha=2\pi-\varphi$	„	$\beta=\pi+\psi$,
5) $\alpha=2\pi+\varphi$	„	$\beta=\pi-\psi$,	10) $\alpha=2\pi-\varphi$	„	$\beta=2\pi-\psi$.

Diese Beweisart bietet allerdings keinerlei Schwierigkeiten dar und wird sich darum auch immerhin in den Lehrbüchern behaupten. Der Umstand aber, dass dieser Nachweis zu sehr durch Einzelbetrachtungen zersplittert wird, berechtigt mich zu der Hoffnung, dass der nachfolgende elementare Beweis den Lesern dieses Journals nicht unangenehm sein werde.

2. Bekanntlich ist:

$$\sin\frac{\pi}{2}=+1,\qquad \cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\sin 2\frac{\pi}{2}=0,\qquad \cos 2\frac{\pi}{2}=-1,$$

$$\sin 3\frac{\pi}{2}=-1,\qquad \cos 3\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\sin 4\frac{\pi}{2}=0;\qquad \cos 4\frac{\pi}{2}=+1;$$

und allgemein:

$$\left.\begin{array}{l}\sin 2n\frac{\pi}{2}=0,\\ \sin(4n+1)\frac{\pi}{2}=+1,\\ \sin(4n+3)\frac{\pi}{2}=-1,\end{array}\right\}\ (1)\qquad \left.\begin{array}{r}\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}=0,\\ \cos(4n+2)\frac{\pi}{2}=-1,\\ \cos 4n\frac{\pi}{2}=+1.\end{array}\right\}\ (2)$$

Die nachfolgende Betrachtung macht es nun nothwendig, die Formeln (1), so wie auch die Formeln (2), in eine einzige zusammenzufassen.

Um zunächst die drei Gleichungen (1) in eine einzige zusammenzuziehen, ersehen wir sogleich, dass, wenn a eine positive ganze Zahl bedeutet, die zu suchende Formel sein wird:

$$1)\quad \sin\frac{a\pi}{2}=0,$$

wenn a gerade;

$$2)\quad \sin\frac{a\pi}{2}=+1,$$

wenn $a=4n+1$, also $\frac{a-1}{2}=2n$ oder gerade;

$$3)\quad \sin\frac{a\pi}{2}=-1,$$

wenn $a=4n+3$, also $\frac{a-1}{2}=2n+1$ oder ungerade ist. — Wir haben daher eine Function der Zahl a zu finden, welche die Eigenschaft besitzt, dass sie für ein gerades a Null, für ein ungerades a aber $+1$ oder -1 wird, je nachdem $\frac{a-1}{2}$ gerade oder ungerade ist.

Stellen wir an die Function zuerst nur die Bedingung, dass sie für ein gerades a Null, für ein ungerades a aber $+1$ werde, so erhalten wir als einfachste dieser Art:

$$\tfrac{1}{2}[1-(-1)^a]\ldots.(\mu).$$

Soll diese Function nun auch noch die zweite Bedingung erfüllen, nämlich für $\frac{a-1}{2}$ gerade in $+1$ und für $\frac{a-1}{2}$ ungerade in -1 überzugehen, so bietet sich uns dafür als die einfachste die Function

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}} \ldots (\nu)$$

dar. Multipliciren wir demnach die Functionen (μ) und (ν) mit einander, so hat offenbar

$$\tfrac{1}{2}[1-(-1)^a](-1)^{\frac{a-1}{2}}$$

die zwei Eigenschaften zugleich, und wir können daher setzen:

$$\sin\frac{a\pi}{2} = \tfrac{1}{2}[1-(-1)^a](-1)^{\frac{a-1}{2}},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen die rechte Seite dieser Gleichung durch σ_a bezeichnen,

$$\sin\frac{a\pi}{2} = \sigma_a.$$

Wir erkennen nun leicht, dass in der Function σ_a der Ausdruck $(-1)^{\frac{a-1}{2}}$ für ein gerades a imaginär und zweiwerthig wird. Die Function σ_a würde somit in diesem Falle selbst zweideutig erscheinen, wenn nicht eben für diese Annahme von a der andere Factor von σ_a in Null überginge. Es ist hiernach also einerlei, welchen der zwei Werthe man dem Ausdrucke $(-1)^{\frac{a-1}{2}}$ beilegt.

Um nun ebenso die drei Gleichungen (2) in eine einzige zusammenzufassen, ersehen wir, dass dieselbe sein wird:

$$1)\quad \cos\frac{a\pi}{2} = 0,$$

wenn a ungerade;

$$2)\quad \cos\frac{a\pi}{2} = -1,$$

wenn $\frac{a}{2}$ ungerade;

$$3)\quad \cos\frac{a\pi}{2} = +1,$$

wenn $\frac{a}{2}$ gerade

ist. Wir haben demnach eine zweite Function von a zu suchen, welcher die Eigenschaft zukommt, dass sie für ein gerades a Null, für ein ungerades a aber $+1$ oder -1 wird, je nachdem $\frac{a}{2}$ ungerade oder gerade ist.

Legen wir der Function wieder nur die erste Eigenschaft bei, so ist die einfachste der Art:

$$\tfrac{1}{2}[1+(-1)^a],$$

und ebenso finden wir als einfachste Function von der zweiten Eigenschaft:

$$(-1)^{\frac{a}{2}}.$$

Folglich können wir schreiben:

$$\cos\frac{a\pi}{2}=\tfrac{1}{2}[1+(-1)^a](-1)^{\frac{a}{2}},$$

oder, wenn wir wieder die rechte Seite dieser Gleichung durch γ_a bezeichnen:

$$\cos\frac{a\pi}{2}=\gamma_a.$$

Wir bemerken auch hier wieder, dass die Function γ_a für ein ungerades a imaginär und zweideutig erscheinen würde, wenn nicht gerade in diesem Falle der Factor $\tfrac{1}{2}[1+(-1)^a]$ in Null überginge, und dass es also einerlei ist, was man unter $(-1)^{\frac{a}{2}}$ versteht, im Falle dieser Ausdruck in Form einer gebrochenen Potenz erscheint. Wir dürfen daher mit den beiden Functionen σ_a und γ_a genau ebenso verfahren, als wenn sie stets eindeutig wären.

3. Zwei Eigenschaften der beiden Functionen σ_a und γ_a sind es nun insbesondere, welche uns bei dem vorliegenden Beweise wesentliche Dienste leisten. Wir wollen, um später den Zusammenhang nicht unterbrechen zu müssen, sogleich zu deren Entwickelung übergehen.

Sind a und b positive ganze Zahlen, so hat man:

$$\sigma_a=\tfrac{1}{2}[1-(-1)^a](-1)^{\frac{a-1}{2}},$$

$$\sigma_b=\tfrac{1}{2}[1-(-1)^b](-1)^{\frac{b-1}{2}},$$

$$\gamma_a=\tfrac{1}{2}[1+(-1)^a](-1)^{\frac{a}{2}},$$

$$\gamma_b=\tfrac{1}{2}[1+(-1)^b](-1)^{\frac{b}{2}}.$$

Wir haben schon oben bemerkt, dass zwar Factoren der Aus-

drücke σ_a, γ_a, σ_b, γ_b unbestimmt werden können, dieses jedoch die Bestimmtheit der Functionen nicht beeinträchtigt. In der Folge wollen wir aber, sobald die Factoren

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}},\quad (-1)^{\frac{b-1}{2}},\quad (-1)^{\frac{a}{2}},\quad (-1)^{\frac{b}{2}}$$

unbestimmt werden, unter denselben immer einerlei Werth verstehen, und annehmen, es sei

$$(-1)^{\frac{1}{2}} = +\sqrt{-1},$$

also auch

$$(-1)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}} = -1;$$

dann finden die Gleichungen statt:

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}}.(-1)^{\frac{b-1}{2}} = (-1)^{\frac{a+b-1}{2}}$$

und

$$(-1)^{\frac{b-1}{2}}.(-1)^{\frac{a}{2}} = (-1)^{\frac{a+b-1}{2}}.$$

Bilden wir jetzt den Ausdruck

$$\sigma_a\gamma_b + \gamma_a\sigma_b,$$

so erhalten wir dafür mit aller Bestimmtheit:

$$\tfrac{1}{4}(-1)^{\frac{a+b-1}{2}}\{[1-(-1)^a][1+(-1)^b] + [1-(-1)^b][1+(-1)^a]\}$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{a+b-1}{2}}[1-(-1)^{a+b}] = \sigma_{a+b},$$

so dass wir nun haben:

$$\sigma_a\gamma_b + \gamma_a\sigma_b = \sigma_{a+b}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Unter denselben Voraussetzungen wie vorhin ist:

$$(-1)^{\frac{a}{2}}.(-1)^{\frac{b}{2}} = (-1)^{\frac{a+b}{2}},$$

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}}.(-1)^{\frac{b-1}{2}} = -(-1)^{a+b}.$$

Bilden wir nun den Ausdruck

$$\gamma_a\gamma_b - \sigma_a\sigma_b,$$

so gelangen wir zu der Gleichung

$$\gamma_a\gamma_b - \sigma_a\sigma_b = \gamma_{a+b}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

4. Bemerken wir nun ferner, dass für val. abs. $\alpha<\frac{\pi}{2}$ die Relationen stattfinden:

$$\sin\alpha=\sin\alpha,\qquad \cos\alpha=\cos\alpha,$$

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos\alpha,\qquad \cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sin\alpha,$$

$$\sin(\alpha+2\frac{\pi}{2})=-\sin\alpha,\qquad \cos(\alpha+2\frac{\pi}{2})=-\cos\alpha,$$

$$\sin(\alpha+3\frac{\pi}{2})=-\cos\alpha,\qquad \cos(\alpha+3\frac{\pi}{2})=\sin\alpha,$$

$$\sin(\alpha+4\frac{\pi}{2})=\sin\alpha;\qquad \cos(\alpha+4\frac{\pi}{2})=\cos\alpha;$$

und allgemein:

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha+4n\frac{\pi}{2})&=\sin\alpha,\\ \sin[\alpha+(4n+1)\frac{\pi}{2}]&=\cos\alpha,\\ \sin[\alpha+(4n+2)\frac{\pi}{2}]&=-\sin\alpha,\\ \sin[\alpha+(4n+3)\frac{\pi}{2}]&=-\cos\alpha;\end{aligned}\right\}(5)\qquad \left.\begin{aligned}\cos(\alpha+4n\frac{\pi}{2})&=\cos\alpha,\\ \cos[\alpha+(4n+1)\frac{\pi}{2}]&=-\sin\alpha,\\ \cos[\alpha+(4n+2)\frac{\pi}{2}]&=-\cos\alpha,\\ \cos[\alpha+(4n+3)\frac{\pi}{2}]&=\sin\alpha;\end{aligned}\right\}(6)$$

und suchen wir wieder sowohl die Relationen (5), als auch (6), je in eine einzige Gleichung zusammenzufassen; so erhalten wir zunächst für die ersteren, unter der Voraussetzung, dass a immer noch eine positive ganze Zahl bedeutet:

$$1)\quad \sin(\alpha+\frac{a\pi}{2})=\sin\alpha,$$

wenn a gerade und $\frac{a}{2}$ gerade;

$$2)\quad \sin(\alpha+\frac{a\pi}{2})=-\sin\alpha,$$

wenn a gerade, aber $\frac{a}{2}$ ungerade;

a gerade . . . . $y=0$,

und dabei

$\frac{a}{2}$ gerade . . . . $x=+1$,

$\frac{a}{2}$ ungerade . . . . $x=-1$;

a ungerade . . . . $x=0$,

und dabei

$\frac{a-1}{2}$ gerade . . . $y=-1$,

$\frac{a-1}{2}$ ungerade . . . $y=+1$.

Vergleichen wir diese Resultate wieder mit obigem Schema für σ_a und γ_a, so ergibt sich, dass gesetzt werden kann:

$$x=\gamma_a,\quad y=-\sigma_a;$$

wodurch wir erhalten:

$$\cos(\alpha+\frac{a\pi}{2})=\cos\alpha.\gamma_a-\sin\alpha.\sigma_a.$$

Wir haben also folgende zwei Formeln:

$$\sin(\alpha+\frac{a\pi}{2})=\sin\alpha.\gamma_a+\cos\alpha.\sigma_a, \quad . . . . \quad (7)$$

$$\cos(\alpha+\frac{a\pi}{2})=\cos\alpha.\gamma_a-\sin\alpha.\sigma_a, \quad . . . . \quad (8)$$

welche gültig sind für jeden positiven ganzen Werth von a, und wofür wir auch schreiben können:

$$\sin(\alpha+\frac{a\pi}{2})=\sin\alpha\cos\frac{a\pi}{2}+\cos\alpha\sin\frac{a\pi}{2},$$

$$\cos(\alpha+\frac{a\pi}{2})=\cos\alpha\cos\frac{a\pi}{2}-\sin\alpha\sin\frac{a\pi}{2}.$$

Aus Vorstehendem erkennen wir, dass die Formeln für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ offenbar gelten, wenn $\alpha<\frac{\pi}{2}$ und β ein ganzes positives Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist.

5. Gehen wir nun zu dem Fall über, wo α und β beliebige positive Winkel bedeuten, und zeigen, dass auch für diesen Fall die aufgestellten Relationen gültig sind.

a ungerade . . . . $\gamma_a = 0$,

und dabei

$\frac{a-1}{2}$ gerade $\sigma_a = +1$,

$\frac{a-1}{2}$ ungerade $\sigma_a = -1$;

so ergibt sich durch Vergleichung, dass gesetzt werden kann:

$$x = \gamma_a,\quad y = \sigma_a.$$

Wir erhalten daher

$$\sin(\alpha + \frac{a\pi}{2}) = \sin\alpha . \gamma_a + \cos\alpha . \sigma_a.$$

Um nun auf ähnliche Weise die Gleichungen (6) in eine einzige zusammenzuziehen, haben wir:

$$1)\quad \cos(\alpha + \frac{a\pi}{2}) = \cos\alpha,$$

wenn a gerade und $\frac{a}{2}$ gerade;

$$2)\quad \cos(\alpha + \frac{a\pi}{2}) = -\cos\alpha,$$

wenn a gerade, aber $\frac{a}{2}$ ungerade;

$$3)\quad \cos(\alpha + \frac{a\pi}{2}) = -\sin\alpha,$$

wenn a ungerade, aber $\frac{a-1}{2}$ gerade;

$$4)\quad \cos(\alpha + \frac{a\pi}{2}) = \sin\alpha,$$

wenn a ungerade und $\frac{a-1}{2}$ ungerade.

Wir können demnach setzen:

$$\cos(\alpha + \frac{a\pi}{2}) = \cos\alpha . x + \sin\alpha . y,$$

wo die Functionen x und y folgenden Bedingungen genügen müssen:

a gerade . . . . $y=0$,

und dabei

$\frac{a}{2}$ gerade . . . . $x=+1$,

$\frac{a}{2}$ ungerade . . . . $x=-1$;

a ungerade . . . . $x=0$,

und dabei

$\frac{a-1}{2}$ gerade . . . $y=-1$,

$\frac{a-1}{2}$ ungerade . . $y=+1$.

Vergleichen wir diese Resultate wieder mit obigem Schema für σ_a und γ_a, so ergibt sich, dass gesetzt werden kann:

$$x=\gamma_a, \quad y=-\sigma_a;$$

wodurch wir erhalten:

$$\cos(\alpha+\frac{a\pi}{2})=\cos\alpha.\gamma_a-\sin\alpha.\sigma_a.$$

Wir haben also folgende zwei Formeln:

$$\sin(\alpha+\frac{a\pi}{2})=\sin\alpha.\gamma_a+\cos\alpha.\sigma_a, \quad \ldots \quad (7)$$

$$\cos(\alpha+\frac{a\pi}{2})=\cos\alpha.\gamma_a-\sin\alpha.\sigma_a, \quad \ldots \quad (8)$$

welche gültig sind für jeden positiven ganzen Werth von a, und wofür wir auch schreiben können:

$$\sin(\alpha+\frac{a\pi}{2})=\sin\alpha\cos\frac{a\pi}{2}+\cos\alpha\sin\frac{a\pi}{2},$$

$$\cos(\alpha+\frac{a\pi}{2})=\cos\alpha\cos\frac{a\pi}{2}-\sin\alpha\sin\frac{a\pi}{2}.$$

Aus Vorstehendem erkennen wir, dass die Formeln für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ offenbar gelten, wenn $\alpha<\frac{\pi}{2}$ und β ein ganzes positives Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist.

5. Gehen wir nun zu dem Fall über, wo α und β beliebige positive Winkel bedeuten, und zeigen, dass auch für diesen Fall die aufgestellten Relationen gültig sind.

Setzen wir zu diesem Ende

$$\alpha = \alpha' + \frac{a\pi}{2},\quad \beta = \beta' + \frac{b\pi}{2},$$

wo α' und β' absolut genommen kleiner als $\frac{\pi}{4}$ sind, und a und b positive ganze Zahlen bedeuten, und setzen wir der Kürze halber

$$a + b = c;$$

so ist auch c eine positive ganze Zahl, und

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' + \frac{c\pi}{2},$$

wo val. abs. $(\alpha' + \beta') < \frac{\pi}{2}$.

Wenden wir nun die Formeln (7) und (8) auf die Entwickelung von

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\alpha' + \frac{a\pi}{2}\right),\quad \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\beta' + \frac{b\pi}{2}\right),\quad \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\alpha' + \beta' + \frac{c\pi}{2}\right)$$

an, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\sin\alpha = \sin\left(\alpha' + \frac{a\pi}{2}\right) = \sin\alpha'.\gamma_a + \cos\alpha'.\sigma_a,$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\alpha' + \frac{a\pi}{2}\right) = \cos\alpha'.\gamma_a - \sin\alpha'.\sigma_a;$$

$$\sin\beta = \sin\left(\beta' + \frac{b\pi}{2}\right) = \sin\beta'.\gamma_b - \cos\beta'.\sigma_b,$$

$$\cos\beta = \cos\left(\beta' + \frac{b\pi}{2}\right) = \cos\beta'.\gamma_b - \sin\beta'.\sigma_b;$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\alpha'+\beta'+\frac{c\pi}{2}\right) = \sin(\alpha'+\beta').\gamma_c + \cos(\alpha'+\beta').\sigma_c, \quad (9)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\left(\alpha'+\beta'+\frac{c\pi}{2}\right) = \cos(\alpha'+\beta').\gamma_c - \sin(\alpha'+\beta').\sigma_c. \quad (10)$$

Aus den vier ersten derselben ergibt sich durch einfache Rechnung für

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

der Ausdruck

$$(\sin\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha'\sin\beta')\,\gamma_a\gamma_b - (\sin\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha'\sin\beta')\,\sigma_a\sigma_b$$

$$+ (\cos\alpha'\cos\beta' - \sin\alpha'\sin\beta')\,\gamma_a\sigma_b + (\cos\alpha'\cos\beta' - \sin\alpha'\sin\beta')\,\sigma_a\gamma_b$$

oder

$$(\sin\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha'\sin\beta')(\gamma_a\gamma_b - \sigma_a\sigma_b) + (\cos\alpha'\cos\beta' - \sin\alpha'\sin\beta')(\gamma_a\sigma_b - \sigma_a\gamma_b)$$

$$= \sin(\alpha'+\beta').(\gamma_a\gamma_b - \sigma_a\sigma_b) + \cos(\alpha'+\beta').(\gamma_a\sigma_b + \sigma_a\gamma_b)\ ^{*)},$$

woraus durch Vergleichung mit obigen Relationen (3) und (4) die Beziehung hervorgeht:

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha'+\beta').\gamma_c + \cos(\alpha'+\beta').\sigma_c. \quad (11)$$

Aus (9) und (11) fliesst aber unmittelbar das Resultat

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Durch eine ähnliche Entwickelung des Ausdrucks

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

gelangen wir zu der Relation

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Wir behalten uns vor, später auf die nähere Betrachtung der oben angeführten Functionen σ_c und γ_c zurückzukommen.

---

*) Denn die Richtigkeit der fraglichen Formel für den Fall, wo val. abs. $(\alpha'+\beta') < \frac{\pi}{2}$, liegt in deren Herleitung unter eben dieser Voraussetzung.

XXIX.

Ueber die Schifffahrt auf dem grössten Kreise. Ein Beitrag zur Nautik.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Wenn der Schiffer, um von einem Punkte der Erdoberfläche *) zu einem anderen zu gelangen, die diese beiden Punkte verbindende Loxodrome verfolgt, so gelangt er keineswegs auf dem kürzesten Wege von dem einen Punkte zu dem anderen, indem dieser kürzeste Weg bekanntlich vielmehr der entsprechende, diese beiden Punkte verbindende Bogen eines grössten Kreises der Erde ist; und der Unterschied zwischen beiden Wegen kann, wie sich durch die Berechnung einiger numerischen Beispiele leicht zeigen liesse, in vielen Fällen ein sehr erheblicher werden. Es scheint daher sehr wichtig zu sein und im Interesse der neueren Schifffahrt zu liegen, die Wege auf der See durch Segeln auf dem grössten Kreise, so weit dies überhaupt möglich und ausführbar ist, abzukürzen **), weshalb sich auch in den meisten neueren

---

*) Die wir hier als sphärisch annehmen.

**) In dem „Lehrbuche der Navigation für die preussischen Navigations-Schulen, bearbeitet von M. F. Albrecht und C. S. Vierow. Zweite Auflage. Berlin. 1857. S. 192." heisst es: „Da es dem Seemann besonders daran gelegen ist, auf dem möglichst kürzesten Wege über See an seinen Bestimmungsort zu gelangen, so hat dies besonders in neuerer Zeit die Navigateure veranlasst, durch grösste Kreissegelung ihren Weg möglichst abzukürzen." Merkwürdige Beispiele, wie viel Kosten durch Abkürzung der Fahrt erspart werden,

Lehrbüchern der Schifffahrtskunde Betrachtungen über diesen Gegenstand und Regeln, nach denen man, um sich möglichst auf dem grössten Kreise zu halten, verfahren soll, finden. Es scheint mir aber diese Partie in den genannten Büchern, wie noch manches Andere, sehr schwach zu sein, und ganz besonders zunächst in theoretischer Beziehung Vieles zu wünschen übrig zu lassen *). Aber auch bei einem an sich rein praktischen Gegenstande, der noch vielfach der Bearbeitung und Erledigung bedarf, kommt es nach meiner Ueberzeugung immer zunächst auf eine strenge, zugleich möglichst elegante theoretische Darstellung an, durch welche man eine recht deutliche Einsicht in die Natur desselben gewinnt und die zu besiegenden Schwierigkeiten genau kennen lernt. Denn ist man nur erst im Besitz einer solchen strengen theoretischen Darstellung, so wird die Praxis schon nach und nach die Mittel finden, durch welche sie die entwickelte Theorie sich aneignen und für sich anwendbar machen kann. Ich glaube daher, der wissenschaftlichen Schifffahrtskunde Einiges zu nützen, wenn ich in der vorliegenden kleinen Abhandlung zunächst eine strenge theoretische Darstellung des fraglichen sehr wichtigen Gegenstandes liefere, indem ich zeige, welche theoretischen Vorschriften man zu befolgen haben würde, um sich bei der Schifffahrt dem grössten Kreise bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit zu nähern oder mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit sich auf demselben zu halten. Denn dass hier überhaupt nur von einer Näherungsmethode die Rede sein kann, versteht sich von selbst, weil ja in der Praxis eine stetige Veränderung des Curses, die das Segeln auf dem grössten Kreise erfordern würde, wenn sich auch ein einfaches theoretisches Gesetz derselben angeben liesse, unmöglich ist, indem der Schiffer immer und unter

führt Herr Fregatten-Capitain H. v. Littrow, Director der k. k. nautischen Akademie in Triest, in seinem kürzlich erschienenen Handbuch der Seemannschaft. Wien. 1859. S. 304. an. Die Engländer z. B. geben ihren in dem Handel nach Indien und Australien durch Abkürzung der Fahrt, mit Berücksichtigung aller neueren Hülfsmittel, erzielten Gewinn auf ein bis zwei Millionen Dollars im Jahre an.

*) Das Beste über diesen Gegenstand findet sich noch in dem trefflichen: „Traité de navigation à l'usage de la marine militaire et de la marine du commerce, par V. Caillet. Brest. T. I. 1848. p. 251. §. 362.—§. 365." ein Buch, das sich, wie in vielen anderen Beziehungen, namentlich auch durch eine sehr ansprechende, dem neueren Zustande der mathematischen Wissenschaften sich möglichst anschliessende theoretische Darstellung auf das Vortheilhafteste vor den meisten anderen, in theoretischer Rücksicht oft sehr schwerfällig verfassten Werken auszeichnet.

allen Bedingungen genöthigt sein wird, einige Zeit lang denselben Curs zu halten, also auf einer Loxodrome zu segeln. Ich bemerke nochmals, dass ich bei der folgenden Entwickelung zunächst und vor allen Dingen die der weiteren Bearbeitung noch so sehr bedürfende wissenschaftliche Nautik und den Nutzen für den Unterricht in derselben im Auge habe; indem ich aber immer auch, wie schon erwähnt, hier wie in allen ähnlichen Fällen den Grundsatz festhalte, dass jeder praktische Gegenstand zunächst eine solche strenge theoretische Entwickelung fordert, wie ich sie im vorliegenden Falle zu geben versuche werde, indem seine weitere praktische Ausbildung auf dem dadurch gelegten Grunde sich dann schon von selbst finden wird.

§. 2.

Zunächst und vor allen Dingen kommt es darauf an, die allgemeine Bedingungsgleichung zu entwickeln, welche erfüllt sein muss, wenn drei Punkte

$$A_0, \; A_1, \; A_2$$

auf der Erdoberfläche, deren Längen und Breiten respective

$$L_0, B_0; \; L_1, B_1; \; L_2, B_2$$

sein mögen, in einem grössten Kreise liegen sollen, zu der man auf verschiedene Weise mittelst der sphärischen Trigonometrie oder der analytischen Geometrie gelangen kann, von welchen zwei Wegen ich absichtlich den letzteren, als den weniger bekannten, einschlagen werde, indem überhaupt sehr zu wünschen ist, dass dem Unterrichte in der analytischen Geometrie immer mehr und mehr Eingang verschafft werde.

Wir legen ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz zu Grunde, dessen Anfang der Mittelpunkt der Erde ist; die Ebene des Aequators sei die Ebene der xy; der positive Theil der Axe der x sei nach dem Nullpunkte der Längen, der positive Theil der Axe der y dagegen sei nach dem neunzigsten Grade der Längen, und der positive Theil der Axe der z sei nach dem Nordpole der Erde gerichtet. Der Halbmesser der Erde sei r und die Coordinaten der drei Punkte

$$A_0, \; A_1, \; A_2$$

in dem angenommenen Systeme seien respective

$$x_0, y_0; \; x_1, y_1; \; x_2, y_2.$$

ist, für $s_{0,1}$ den einfachen Ausdruck:

$$s_{0,1} = (B_1 - B_0) \sec \Theta_{0,1}.$$

Wenn also die Längendifferenz $\varDelta_{0,1}$ und die Breitendifferenz $B_1 - B_0$ in Minuten, die Distanz $s_{0,1}$ in Seemeilen ausgedrückt ist, so hat man zur Berechnung des Curses und der Distanz die folgenden bekannten bequemen Formeln:

$$9^*) \ldots \begin{cases} \operatorname{tang} \Theta_{0,1} = \dfrac{\varDelta_{0,1}}{7915{,}705 \, . \log \dfrac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}B_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}B_0)}}, \\ s_{0,1} = (B_1 - B_0) \sec \Theta_{0,1}. \end{cases}$$

§. 4.

Um nun aber von dem Punkte A_0 zu dem Punkte A_1 nicht auf der diese beiden Punkte mit einander verbindenden, der Längendifferenz $\varDelta_{0,1}$ entsprechenden Loxodrome, sondern, wenigstens so genau als möglich, auf dem, die beiden in Rede stehenden Punkte mit einander verbindenden, der Längendifferenz $\varDelta_{0,1}$ entsprechenden Bogen eines grössten Kreises der Erde zu gelangen, müssen wir auf folgende Art verfahren.

Wir theilen die Längendifferenz $\varDelta_{0,1}$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, etwa in n gleiche Theile, und bezeichnen die von dem Punkte A_0 als Anfang der Längen an gerechneten Längen der einzelnen Theilpunkte durch

$$\overset{1}{L}, \overset{2}{L}, \overset{3}{L}, \overset{4}{L}, \ldots, \overset{n-1}{L};$$

wo also offenbar im Allgemeinen

$$10) \ldots \overset{k}{L} = k . \frac{\varDelta_{0,1}}{n} = \frac{k}{n} \varDelta_{0,1}$$

ist. Die diesen Längen entsprechenden Punkte des die Punkte A_0 und A_1 mit einander verbindenden Bogens eines grössten Kreises bezeichnen wir respective durch

$$\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \overset{3}{A}, \overset{4}{A}, \ldots, \overset{n-1}{A}$$

und die Breiten dieser Punkte respective durch

$$\overset{1}{B}, \overset{2}{B}, \overset{3}{B}, \overset{4}{B}, \ldots, \overset{n-1}{B};$$

wo nun diese Breiten, weil $0, B_0$ und $\varDelta_{0,1}, B_1$ die Längen und Breiten der Punkte A_0 und A_1 sind, mittelst der folgenden, sich unmittelbar aus 6) ergebenden Gleichungen gefunden werden:

$$4)\quad \begin{cases} x_0=r\cos L_0\cos B_0, & x_1=r\cos L_1\cos B_1, & x_2=r\cos L_2\cos B_2,\\ y_0=r\sin L_0\cos B_0, & y_1=r\sin L_1\cos B_1, & y_2=r\sin L_2\cos B_2,\\ z_0=r\sin B_0; & z_1=r\sin B_1; & z_2=r\sin B_2; \end{cases}$$

also offenbar:

$$x_0y_1-y_0x_1=-r\sin(L_0-L_1)\cos B_0\cos B_1,$$

$$x_1y_2-y_1x_2=-r\sin(L_1-L_2)\cos B_1\cos B_2,$$

$$x_2y_0-y_2x_0=-r\sin(L_2-L_0)\cos B_2\cos B_0;$$

folglich die obige Bedingungsgleichung, wenn man die Form 3) derselben anwendet:

$$5)\ldots\quad \left.\begin{array}{l} \sin(L_0-L_1)\cos B_0\cos B_1\sin B_2\\ +\sin(L_1-L_2)\sin B_0\cos B_1\cos B_2\\ +\sin(L_2-L_0)\cos B_0\sin B_1\cos B_2 \end{array}\right\}=0;$$

oder, wenn man durch

$$\cos B_0\cos B_1\cos B_2$$

dividirt:

6)

$$\sin(L_1-L_2)\tang B_0+\sin(L_2-L_0)\tang B_1+\sin(L_0-L_1)\tang B_2=0;$$

oder auch, wenn man durch

$$\sin B_0\sin B_1\sin B_2$$

dividirt:

$$7)\ldots\ldots\quad \left.\begin{array}{l} \sin(L_0-L_1)\cot B_0\cot B_1\\ +\sin(L_1-L_2)\cot B_1\cot B_2\\ +\sin(L_2-L_0)\cot B_2\cot B_0 \end{array}\right\}=0.$$

§. 3.

Wir denken uns jetzt zwei Punkte A_0 und A_1 der Erdoberfläche und bezeichnen deren Längen und Breiten wie vorher respective durch L_0, B_0 und L_1, B_1. Nehmen wir dann L_1 als die grössere der beiden Längen L_0, L_1 an, und bezeichnen den Curs, worunter wir den 180° nicht übersteigenden Winkel verstehen, welchen die der Längendifferenz L_1-L_0 entsprechende,

die beiden Punkte A_0 und A_1 mit einander verbindende Loxodrome mit den Meridianen nach der Seite hin, nach welcher die Längen gezählt werden, und, von ihr an gerechnet, nach der Seite des positiven Pols der Erde hin einschliesst, durch $\Theta_{0,1}$, die im vorhergehenden Sinne genommene loxodromische Entfernung der beiden Punkte A_0 und A_1 von einander aber durch $s_{0,1}$; so ist nach den Formeln der Loxodromischen Trigonometrie *) bekanntlich in völliger Allgemeinheit:

$$8) \ldots \begin{cases} L_1 - L_0 = \tang \Theta_{0,1} \, l \dfrac{\tang(45^0 + \frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^0 + \frac{1}{2}B_0)}, \\ s_{0,1} = r(B_1 - B_0) \sec \Theta_{0,1}. \end{cases}$$

Wenn wir von jetzt an immer A_0 als den Punkt der Abfahrt, A_1 als den Punkt der Ankunft betrachten, so kann man offenbar von A_0 nach A_1 auf zwei verschiedenen Wegen gelangen. Fassen wir daher immer nur einen dieser beiden Wege, welchen man nun auch einschlagen mag, bestimmt in's Auge, und bezeichnen die diesem Wege entsprechende, immer als positiv zu betrachtende Längendifferenz der beiden Punkte A_0 und A_1 überhaupt durch $\Delta_{0,1}$; ferner den Curs, worunter wir jetzt den 180° nicht übersteigenden Winkel verstehen, welchen die gesegelte, nämlich der in dem vorhergehenden Sinne genommenen Längendifferenz $\Delta_{0,1}$ entsprechende loxodromische Linie nach der Seite der Richtung der Fahrt hin und, von der Loxodrome an gerechnet, nach der Seite des positiven Pols der Erde hin mit den Meridianen einschliesst, durch $\Theta_{0,1}$; endlich die in dem vorhergehenden Sinne genommene loxodromische Entfernung der beiden Punkte A_0 und A_1 von einander durch $s_{0,1}$; so ist nach den Formeln 8) offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$9) \ldots \begin{cases} \Delta_{0,1} = \tang \Theta_{0,1} \, l \dfrac{\tang(45^0 + \frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^0 + \frac{1}{2}B_0)}, \\ s_{0,1} = r(B_1 - B_0) \sec \Theta_{0,1}. \end{cases}$$

In diesen Formeln sind alle Grössen in Theilen der Einheit ausgedrückt, und die Logarithmen sind natürliche.

Um zuerst statt der natürlichen Logarithmen gewöhnliche Brigg'sche Logarithmen einzuführen, bezeichnen wir den Modulus des Brigg'schen Systems durch M, und bemerken, dass

$$M = 0{,}4342945 \qquad \log M = 0{,}6377843 - 1$$

*) M. s. meine „Loxodromische Trigonometrie. Ein Beitrag zur Nautik. Leipzig. 1849."

ist. Also ist

$$\varDelta_{0,1}=\frac{1}{M}\tang\Theta_{0,1}\log\frac{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)}.$$

Soll nun ferner $\varDelta_{0,1}$ nicht in Theilen der Einheit, sondern in Minuten ausgedrückt sein, so müssen wir statt $\varDelta_{0,1}$ in der vorstehenden Formel bekanntlich

$$\frac{\pi}{10800}\varDelta_{0,1}$$

setzen, wodurch dieselbe die Gestalt

$$\varDelta_{0,1}=\frac{10800}{\pi M}\tang\Theta_{0,1}\log\frac{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)},$$

also

$$\tang\Theta_{0,1}=\frac{\varDelta_{0,1}}{\frac{10800}{\pi M}.\log\frac{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)}}$$

erhält, wo bekanntlich

$$\log\pi=0,4971499$$

ist.

Also ist, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$\tang\Theta_{0,1}=\frac{\varDelta_{0,1}}{7915,705.\log\frac{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)}}.$$

Soll ferner in der zweiten der Formeln 9) auch B_1-B_0 in Minuten ausgedrückt sein, so muss man dafür

$$\frac{\pi}{10800}(B_1-B_0)$$

setzen, wodurch die in Rede stehende Formel die Gestalt

$$s_{0,1}=\frac{r\pi}{10800}(B_1-B_0)\sec\Theta_{0,1}$$

oder

$$s_{0,1}=\frac{2r\pi}{21600}(B_1-B_0)\sec\Theta_{0,1}.$$

erhält. Will man aber $s_{0,1}$ in Seemeilen, deren bekanntlich 60 auf einen Grad des Aequators gehen, ausgedrückt haben, so erhält man, weil hiernach der Aequator 360.60 = 21600 Seemeilen enthält, folglich

$$1\text{ Seemeile}=\frac{2r\pi}{21600}$$

ist, für $s_{0,1}$ den einfachen Ausdruck:

$$s_{0,1}=(B_1-B_0)\sec\Theta_{0,1}.$$

Wenn also die Längendifferenz $\varDelta_{0,1}$ und die Breitendifferenz B_1-B_0 in Minuten, die Distanz $s_{0,1}$ in Seemeilen ausgedrückt ist, so hat man zur Berechnung des Curses und der Distanz die folgenden bekannten bequemen Formeln:

$$9^*)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l}\tang\Theta_{0,1}=\dfrac{\varDelta_{0,1}}{7915{,}705\,.\log\dfrac{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}B_0)}},\\[2ex] s_{0,1}=(B_1-B_0)\sec\Theta_{0,1}.\end{array}\right.$$

§. 4.

Um nun aber von dem Punkte A_0 zu dem Punkte A_1 nicht auf der diese beiden Punkte mit einander verbindenden, der Längendifferenz $\varDelta_{0,1}$ entsprechenden Loxodrome, sondern, wenigstens so genau als möglich, auf dem, die beiden in Rede stehenden Punkte mit einander verbindenden, der Längendifferenz $\varDelta_{0,1}$ entsprechenden Bogen eines grössten Kreises der Erde zu gelangen, müssen wir auf folgende Art verfahren.

Wir theilen die Längendifferenz $\varDelta_{0,1}$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, etwa in n gleiche Theile, und bezeichnen die von dem Punkte A_0 als Anfang der Längen an gerechneten Längen der einzelnen Theilpunkte durch

$$\overset{1}{L},\ \overset{2}{L},\ \overset{3}{L},\ \overset{4}{L},\ldots,\overset{n-1}{L};$$

wo also offenbar im Allgemeinen

$$10)\ \ldots\ldots\ \overset{k}{L}=k.\frac{\varDelta_{0,1}}{n}=\frac{k}{n}\varDelta_{0,1}$$

ist. Die diesen Längen entsprechenden Punkte des die Punkte A_0 und A_1 mit einander verbindenden Bogens eines grössten Kreises bezeichnen wir respective durch

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{A},\ \overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ldots,\overset{n-1}{A}$$

und die Breiten dieser Punkte respective durch

$$\overset{1}{B},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{B},\ \overset{4}{B},\ldots,\overset{n-1}{B};$$

wo nun diese Breiten, weil 0, B_0 und $\varDelta_{0,1}$, B_1 die Längen und Breiten der Punkte A_0 und A_1 sind, mittelst der folgenden, sich unmittelbar aus 6) ergebenden Gleichungen gefunden werden:

$$\sin(\varDelta_{0,1}-\overset{1}{L})\tang B_0+\sin\overset{1}{L}\tang B_1-\sin\varDelta_{0,1}\tang\overset{1}{B}=0,$$

$$\sin(\varDelta_{0,1}-\overset{2}{L})\tang B_0+\sin\overset{2}{L}\tang B_1-\sin\varDelta_{0,1}\tang\overset{2}{B}=0,$$

$$\sin(\varDelta_{0,1}-\overset{3}{L})\tang B_0+\sin\overset{3}{L}\tang B_1-\sin\varDelta_{0,1}\tang\overset{3}{B}=0,$$

$$\sin(\varDelta_{0,1}-\overset{4}{L})\tang B_0+\sin\overset{4}{L}\tang B_1-\sin\varDelta_{0,1}\tang\overset{4}{B}=0,$$

u. s. w.

$$\sin(\varDelta_{0,1}-\overset{n-1}{L})\tang B_0+\sin\overset{n-1}{L}\tang B_1-\sin\varDelta_{0,1}\tang\overset{n-1}{B}=0;$$

so dass also, wenn der Kürze wegen

$$11)\quad\ldots\quad C_0=\frac{\tang B_0}{\sin\varDelta_{0,1}},\quad C_1=\frac{\tang B_1}{\sin\varDelta_{0,1}}$$

gesetzt wird, wo C_0, C_1 zwei leicht ein für alle Mal zu berechnende Constanten sind:

$$12)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{l}\tang\overset{1}{B}=C_0\sin(\varDelta_{0,1}-\overset{1}{L})+C_1\sin\overset{1}{L},\\ \tang\overset{2}{B}=C_0\sin(\varDelta_{0,1}-\overset{2}{L})+C_1\sin\overset{2}{L},\\ \tang\overset{3}{B}=C_0\sin(\varDelta_{0,1}-\overset{3}{L})+C_1\sin\overset{3}{L},\\ \tang\overset{4}{B}=C_0\sin(\varDelta_{0,1}-\overset{4}{L})+C_1\sin\overset{4}{L},\\ \text{u. s. w.}\\ \tang\overset{n-1}{B}=C_0\sin(\varDelta_{0,1}-\overset{n-1}{L})+C_1\sin\overset{n-1}{L}\end{array}\right.$$

ist.

Nach 10) ist aber:

$$\overset{1}{L}=\frac{1}{n}\varDelta_{0,1};\quad\varDelta_{0,1}-\overset{1}{L}=\frac{n-1}{n}\varDelta_{0,1};$$

$$\overset{2}{L}=\frac{2}{n}\varDelta_{0,1};\quad\varDelta_{0,1}-\overset{2}{L}=\frac{n-2}{n}\varDelta_{0,1};$$

$$\overset{3}{L}=\frac{3}{n}\varDelta_{0,1};\quad\varDelta_{0,1}-\overset{3}{L}=\frac{n-3}{n}\varDelta_{0,1};$$

$$\overset{4}{L}=\frac{4}{n}\varDelta_{0,1};\quad\varDelta_{0,1}-\overset{4}{L}=\frac{n-4}{n}\varDelta_{0,1};$$

u. s. w.

$$\overset{n-1}{L}=\frac{n-1}{n}\varDelta_{0,1};\quad\varDelta_{0,1}-\overset{n-1}{L}=\frac{1}{n}\varDelta_{0,1};$$

und bezeichnen wir also der Kürze wegen die folgenden Sinus:

$$\sin\frac{1}{n}\Delta_{0,1};\quad \sin\frac{2}{n}\Delta_{0,1};\quad \sin\frac{3}{n}\Delta_{0,1};\ldots;\ \sin\frac{n-1}{n}\Delta_{0,1}$$

der Reihe nach durch

$$\overset{1}{S},\quad \overset{2}{S},\quad \overset{3}{S},\quad \overset{4}{S},\ldots,\overset{n-1}{S};$$

so ist:

$$13)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} \tan\overset{1}{B}=C_0\overset{n-1}{S}+C_1\overset{1}{S},\\ \tan\overset{2}{B}=C_0\overset{n-2}{S}+C_1\overset{2}{S},\\ \tan\overset{3}{B}=C_0\overset{n-3}{S}+C_1\overset{3}{S},\\ \tan\overset{4}{B}=C_0\overset{n-4}{S}+C_1\overset{4}{S},\\ \text{u. s. w.}\\ \tan\overset{n-1}{B}=C_0\overset{1}{S}+C_1\overset{n-1}{S}. \end{array}\right.$$

Multipliciren wir die Sinus

$$\overset{1}{S},\quad \overset{2}{S},\quad \overset{3}{S},\quad \overset{4}{S},\ldots,\overset{n-1}{S}$$

sämmtlich mit C_0 und C_1, und bezeichnen die dadurch erhaltenen Producte der Reihe nach durch

$$\overset{1}{P}_0,\quad \overset{2}{P}_0,\quad \overset{3}{P}_0,\quad \overset{4}{P}_0,\ldots,\overset{n-1}{P}_0$$

und

$$\overset{1}{P}_1,\quad \overset{2}{P}_1,\quad \overset{3}{P}_1,\quad \overset{4}{P}_1,\ldots,\overset{n-1}{P}_1;$$

so ist:

$$14)\ \ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{l} \tan\overset{1}{B}=\overset{n-1}{P}_0+\overset{1}{P}_1,\\ \tan\overset{2}{B}=\overset{n-2}{P}_0+\overset{2}{P}_1,\\ \tan\overset{3}{B}=\overset{n-3}{P}_0+\overset{3}{P}_1,\\ \tan\overset{4}{B}=\overset{n-4}{P}_0+\overset{4}{P}_1,\\ \text{u. s. w.}\\ \tan\overset{n-1}{B}=\overset{1}{P}_0+\overset{n-1}{P}_1. \end{array}\right.$$

Hiernach kann man also die Berechnung der Tangenten der Breiten

$$\overset{1}{B},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{B},\ \overset{4}{B},\ldots,\overset{n-1}{B}$$

nach dem folgenden Schema führen:

Man berechne aus den Tafeln die Sinus

$$\sin\frac{1}{n}\Delta_{0,1};\quad \sin\frac{2}{n}\Delta_{0,1};\quad \sin\frac{3}{n}\Delta_{0,1};\ldots;\ \sin\frac{n-1}{n}\Delta_{0,1}$$

oder

$$\overset{1}{S},\ \overset{2}{S},\ \overset{3}{S},\ \overset{4}{S},\ldots,\overset{n-1}{S};$$

multiplicire dieselben sämmtlich sowohl mit der Constante C_0, als auch mit der Constante C_1, und schreibe bei dieser Rechnung sogleich die ersteren Producte in der Ordnung vom $(n-1)$sten zum 1sten und die letzteren Producte in der Ordnung vom 1sten zum $(n-1)$sten auf die folgende Weise unter einander:

$$\overset{n-1}{P_0},\ \overset{n-2}{P_0},\ \overset{n-3}{P_0},\ \overset{n-4}{P_0},\ldots,\overset{1}{P_0};$$

$$\overset{1}{P_1},\ \overset{2}{P_1},\ \overset{3}{P_1},\ \overset{4}{P_1},\ldots,\overset{n-1}{P_1};$$

werden dann die über einander stehenden Glieder dieser beiden Reihen sämmtlich zu einander addirt, so liefern die dadurch erhaltenen Summen unmittelbar die gesuchten Tangenten der Breiten

$$\overset{1}{B},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{B},\ \overset{4}{B},\ldots,\overset{n-1}{B};$$

wodurch wir nun, in Verbindung mit den aus dem Vorhergehenden bekannten Längen, Data genug gewonnen haben, um mittelst der Formeln 9) oder 9*) für die Punkte

$$A_0,\overset{1}{A};\ \overset{1}{A},\overset{2}{A};\ \overset{2}{A},\overset{3}{A};\ldots;\overset{n-2}{A},\overset{n-1}{A};\ \overset{n-1}{A},A_1$$

sowohl die loxodromischen Curse, welche wir der Reihe nach durch

$$\overset{0,1}{\Theta},\ \overset{1,2}{\Theta},\ \overset{2,3}{\Theta},\ \overset{3,4}{\Theta},\ldots,\overset{n-1,n}{\Theta};$$

als auch die loxodromischen Entfernungen, welche wir der Reihe nach durch

$$\overset{0,1}{s},\ \overset{1,2}{s},\ \overset{2,3}{s},\ \overset{3,4}{s},\ldots,\overset{n-1,n}{s}$$

bezeichnen wollen, berechnen zu können.

Von diesen auf dem Wege der Rechnung gewonnenen Grössen lässt sich nun aber die folgende Anwendung machen.

§. 5.

Bei der Abfahrt von dem Punkte A_0 wird der Curs $\overset{0,1}{\Theta}$ gesteuert und mittelst der gewöhnlichen praktischen Hülfsmittel die Geschwindigkeit $\overset{0,1}{v}$ des Schiffs bestimmt. Bezeichnet dann $\overset{0,1}{t}$ die Zeit, welche das Schiff gebraucht, um den loxodromischen Weg $\overset{0,1}{s}$, welcher aus dem Vorhergehenden bekannt ist, zurückzulegen, so wird diese Zeit mittelst der Formel

$$\overset{0,1}{t}=\overset{0,1}{s}:\overset{0,1}{v}$$

gefunden; und behält nun das Schiff während der ganzen Zeit $\overset{0,1}{t}$ den Curs $\overset{0,1}{\Theta}$ bei, so wird es in dieser Zeit den Weg $\overset{0,1}{s}$ zurücklegen, und am Ende der Zeit $\overset{0,1}{t}$ sich also wieder auf dem die beiden Punkte A_0 und A_1 mit einander verbindenden Bogen eines grössten Kreises in dem Punkte $\overset{1}{A}$ befinden. Nach Verlauf der Zeit $\overset{0,1}{t}$ oder von deren Ende an wird der Curs $\overset{1,2}{\Theta}$ gesteuert und von Neuem die Geschwindigkeit $\overset{1,2}{v}$ des Schiffs auf dem gewöhnlichen Wege bestimmt. Bezeichnet dann $\overset{1,2}{t}$ die Zeit, welche das Schiff gebraucht, um den aus dem Vorhergehenden bekannten loxodromischen Weg $\overset{1,2}{s}$ zurückzulegen, so wird diese Zeit mittelst der Formel

$$\overset{1,2}{t}=\overset{1,2}{s}:\overset{1,2}{v}$$

gefunden; und behält nun wieder das Schiff während der ganzen Zeit $\overset{1,2}{t}$ den Curs $\overset{1,2}{\Theta}$ bei, so wird es in dieser Zeit den Weg $\overset{1,2}{s}$ zurücklegen, und sich am Ende der Zeit $\overset{1,2}{t}$ also wieder auf dem die beiden Punkte A_0 und A_2 mit einander verbindenden Bogen eines grössten Kreises in dem Punkte $\overset{2}{A}$ befinden. Nach Verlauf der Zeit $\overset{1,2}{t}$ oder von deren Ende an wird der Curs $\overset{2,3}{\Theta}$ gesteuert und wieder die Geschwindigkeit $\overset{2,3}{v}$ des Schiffs bestimmt, worauf sich

die Zeit $\overset{2,3}{t}$, welche das Schiff gebraucht, um den aus dem Vorhergehenden bekannten loxodromischen Weg $\overset{2,3}{s}$ zurückzulegen, mittelst der Formel

$$\overset{2,3}{t} = \overset{2,3}{s} : \overset{2,3}{v}$$

ergiebt; und behält also das Schiff während der ganzen Zeit $\overset{2,3}{t}$ den Curs $\overset{2,3}{\Theta}$ bei, so wird es in dieser Zeit den Weg $\overset{2,3}{s}$ zurücklegen, und am Ende der Zeit $\overset{2,3}{t}$ sich also wieder auf dem die Punkte A_0 und A_1 mit einander verbindenden Bogen eines grössten Kreises in dem Punkte $\overset{3}{A}$ befinden. Fährt man auf diese Art zu operiren fort, so wird das von dem Punkte A_0 ausgegangene Schiff nach und nach in alle Punkte

$$\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \overset{3}{A}, \overset{4}{A}, \ldots, \overset{n-1}{A}$$

des die Punkte A_0 und A_1 mit einander verbindenden Bogens eines grössten Kreises gelangen. Geht es dann, nachdem es in den Punkt $\overset{n-1}{A}$ am Ende der Zeit $\overset{n-2,n-1}{t}$ (im Sinne der vorher immer gebrauchten Bezeichnung) gelangt, mit dem Curs $\overset{n-1,n}{\Theta}$ weiter, so wird es gewiss sicher in dem Punkte A_1 als dem von ihm angestrebten eigentlichen Ziele seiner Fahrt ankommen, und wird sich während derselben mit desto grösserer Genauigkeit fortwährend auf dem die beiden Punkte A_0 und A_1 mit einander verbindenden Bogen eines grössten Kreises gehalten haben, je grösser die Zahl n angenommen worden ist. Auch ist für sich klar, dass man diese Genauigkeit beliebig weit treiben kann, wenn man nur die Zahl n gross genug annimmt.

Der ganze von dem Schiff bei seiner Fahrt zurückgelegte Weg ist

$$\overset{0,1}{s} + \overset{1,2}{s} + \overset{2,3}{s} + \overset{3,4}{s} + \ldots + \overset{n-1,n}{s}.$$

Bezeichnen wir den die Punkte A_0 und A_1 mit einander verbindenden Bogen eines grössten Kreises durch $\Sigma_{0,1}$; so ist

$$\cos \Sigma_{0,1} = \sin B_0 \sin B_1 + \cos B_0 \cos B_1 \cos \Delta_{0,1},$$

mittelst welcher Formel, oder mittelst anderer durch die sphärische Trigonometrie dargebotener Hülfsmittel, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht, sich die Länge des die beiden Punkte A_0 und A_1 mit einander verbindenden Bogens eines grössten Kreises ohne Schwierigkeit berechnen lässt. Aus der Vergleichung beider Wege mit einander wird sich aber in allen Fäl-

len leicht beurtheilen lassen, wie gross man etwa die Zahl n anzunehmen hat, um den Weg von A_0 nach A_1 in der beabsichtigten Weise zu verkürzen.

Freilich liegt dem Obigen die Voraussetzung zu Grunde, dass die Geschwindigkeit des Schiffs in den Zeiten $\overset{0,1}{t}, \overset{1,2}{t}, \overset{2,3}{t}, \overset{3,4}{t}, \ldots$ sich nicht ändere, eine Voraussetzung, die mit desto grösserer Genauigkeit erfüllt sein wird, je kleiner diese Zeiten sind, je grösser also die Zahl n ist. Wie man sich aber zu verhalten haben würde, wenn die Geschwindigkeit des Schiffs während einer der obigen Zeiten sich merklich geändert hätte, ist für sich klar, woraus sich jedoch auch von selbst die Nothwendigkeit ergiebt, die Geschwindigkeit so oft als möglich und mit aller nur möglichen Sorgfalt zu ermitteln. Aber über alle diese Dinge habe ich für jetzt hier eigentlich gar nichts weiter zu sagen, da ich schon oben bestimmt genug hervorgehoben habe, dass der Zweck und die Absicht dieser Abhandlung zunächst nur eine theoretische Darstellung des fraglichen sehr wichtigen Gegenstandes war, auf den ich vielleicht späterhin in praktischer Rücksicht wieder zurückkommen werde. Ganz in der Kürze mag indess zum Schluss noch Folgendes bemerkt werden.

Wenn etwa bei dem Abgange des Schiffs von dem Punkte A_0 seine Geschwindigkeit v_0 war und t_0 die Zeit bezeichnet, in welcher es mit dieser Geschwindigkeit den Weg $\overset{0,1}{s}$ zurücklegen würde, so ist

$$t_0 = \overset{0,1}{s} : v_0.$$

Aendert aber noch vor Ablauf der Zeit t_0, etwa nach Verlauf der Zeit τ_0, wo also $\tau_0 < t_0$ ist, das Schiff seine Geschwindigkeit und erhält die Geschwindigkeit v_1, so wird es den noch übrigen Theil des Wegs $\overset{0,1}{s}$, nämlich den Weg $\overset{0,1}{s} - v_0\tau_0$, in der Zeit

$$t_1 = (\overset{0,1}{s} - v_0\tau_0) : v_1$$

zurücklegen, insofern es nun die Geschwindigkeit v_1 unverändert beibehält. Aendert es aber noch vor Ablauf der Zeit t_1, etwa nach weiterem Verlauf der Zeit τ_1, wo also $\tau_1 < t_1$ ist, seine Geschwindigkeit und erhält die Geschwindigkeit v_2, so wird es den noch übrigen Theil des Wegs $\overset{0,1}{s}$, nämlich den Weg $\overset{0,1}{s} - v_0\tau_0 - v_1\tau_1$, in der Zeit

$$t_2 = (\overset{0,1}{s} - v_0\tau_0 - v_1\tau_1) : v_2$$

zurücklegen. Aendert es nach weiterem Verlauf der Zeit τ_2, wo $\tau_2 < t_2$ ist, wieder seine Geschwindigkeit und erhält die Geschwindigkeit v_3, so wird es den noch übrigen Theil des Wegs $\overset{0,1}{s}$, nämlich den Weg $\overset{0,1}{s} - v_0\tau_0 - v_1\tau_1 - v_2\tau_2$, in der Zeit

$$t_3 = (\overset{0,1}{s} - v_0\tau_0 - v_1\tau_1 - v_2\tau_2) : v_3$$

zurücklegen. Wie man auf diese Art weiter gehen und den Zeitpunkt bestimmen kann, wo das Schiff wieder auf dem durch A_0 und A_1 gehenden grössten Kreise angekommen ist, also der Curs geändert werden muss, ist klar.

XXX.

Ueber drei karakteristische Eigenschaften der Kegelschnittslinien.

Von

Herrn Doctor *Josef Zampieri*,

Lehrer an der k. k. Oberrealschule in Wien, Vorstadt Landstrasse.

Allen Kegelschnittslinien, und zwar ausschliesslich denselben, kommen folgende drei Eigenschaften zu:

1. Die Projection der Normale eines Punktes auf den Leitstrahl desselben ist constant und gleich dem halben Parameter.

2. Zwischen Normale und Leitstrahl eines Punktes einer Kegelschnittslinie herrscht dieselbe Relation, wie zwischen Ordi-

nate und Abszisse, wenn der Anfangspunkt im Scheitel der Kurve, die Hauptachse als Abszissenachse und ein rechtwinkliges Coordinaten-System angenommen wird.

3. Das Verhältniss jenes Stückes der Hauptachse, welches zwischen dem Durchschnittspunkte mit der Normale und dem Brennpunkte liegt, zum betreffenden Leitstrahl des Punktes der Kurve ist konstant und gleich der Exzentrizität.

Ueber diese Eigenschaften habe ich in dem im August 1858 erschienenen siebenten Programme der k. k. Oberrealschule in Wien, Vorstadt Landstrasse, bereits eine Abhandlung veröffentlicht, worin ich auch angab, wie ich zur Entdeckung jener Eigenschaften gelangt bin. Jene Abhandlung musste aber, als zunächst für Oberrealschüler berechnet, weitläufiger ausfallen, als die Natur der Sache bei unumschränkter Benützung der Hilfsmittel der Analysis es erfordert. Daher halte ich es für angemessen, der mathematischen Welt die Sache in der im gegenwärtigen Aufsatze eingeschlagenen Weise vorzuführen, und glaube hiermit um so mehr der Wissenschaft einen willkommenen, wenn auch nur kleinen Dienst zu leisten, als es mir, ungeachtet eifrigen Suchens in vielen ausführlichen und vortrefflichen Werken über Kegelschnittslinien, nicht gegeben war, über die in Rede stehenden Eigenschaften Erwähnung zu finden.

Zur Führung des Beweises wollen wir uns zuerst einige allgemeine Formeln entwickeln und sie dann speziell auf die Kegelschnittslinien anwenden.

I.

Sei M irgend ein Punkt der Kurve AB (Taf. III. Fig. 1.), O sei der Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems (Ox, Oy); $MP=y$, $OP=x$ die Coordinaten des Punktes M; JM die Berührungslinie, $MN \perp JM$, daher $MN=n$ die Normale, $OM=r$ der Leitstrahl des Punktes M; sei ferner $NK \perp OM$, somit $MK=u$ die Projection der Normale auf den Leitstrahl, und setzen wir $NK=v$, $ON=m$ und $\measuredangle xJM=\alpha$.

1. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke MNK folgt:

$$MK=MN.\cos KMN \quad \text{oder} \quad u=n\cos KMN,$$

und aus dem rechtwinkligen ΔMPN erhält man:

$$MN=\frac{MP}{\cos PMN} \quad \text{oder} \quad n=\frac{y}{\cos PMN};$$

somit

$$u = y\frac{\cos KMN}{\cos PMN}.$$

Es ist aber

$$\angle KMN = \angle PMN - \angle PMO,$$

daher

$$\cos KMN = \cos PMN . \cos PMO + \sin PMN . \sin PMO$$

und

$$\frac{\cos KMN}{\cos PMN} = \cos PMO + \sin PMO . \operatorname{tg} PMN;$$

aus dem rechtwinkligen $\Delta\ MPO$ folgt nun:

$$\operatorname{tg} PMO = \frac{OP}{MP} = \frac{x}{y};$$

daher hat man:

$$\cos PMO = \frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}} \quad \text{und} \quad \sin PMO = \frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}};$$

ferner ist $\angle PMN = \angle MJN$, da $NM \perp MJ$ ist, und $\angle MJN = 180^0 - \angle XJM$, daher $\angle PMN = 180^0 - \angle XJM = 180^0 - \alpha$, somit $\operatorname{tg} PMN = -\operatorname{tg}\alpha$, und wir erhalten durch Substitution:

$$\frac{\cos KMN}{\cos PMN} = \frac{y - x\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{y^2+x^2}},$$

somit

$$u = \frac{y(y - x\operatorname{tg}\alpha)}{\sqrt{y^2+x^2}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

2. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke MPN ergibt sich:

$$\overline{MN}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PN}^2;$$

da aber $PN = MP.\operatorname{tg} PMN = MP.\operatorname{tg} MJN$ ist, so hat man:

$$\overline{MN}^2 = \overline{MP}^2.(1 + \overline{\operatorname{tg} MJN}^2)$$

oder

$$n^2 = y^2(1 + \overline{\operatorname{tg}\alpha}^2), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

weil $\angle MJN = 180^0 - \angle XJM = 180^0 - \alpha$, daher $\operatorname{tg} MJN = -\operatorname{tg}\alpha$ ist.

3. Weiter erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke MNK

$$NK = MN.\sin KMN \quad \text{oder} \quad v = n\sin KMN;$$

es ist aber

$$n=\frac{y}{\cos PMN}, \text{ daher } v=y\,\frac{\sin KMN}{\cos PMN}.$$

Nun ist $\angle KMN=\angle PMN-\angle PMO$, folglich

$$\sin KMN=\sin PMN.\cos PMO-\cos PMN.\sin PMO$$

und

$$\frac{\sin KMN}{\cos PMN}=\cos PMO.\operatorname{tg} PMN-\sin PMO;$$

berücksichtigen wir nun die oben in No. 1. für $\cos PMO$, $\sin PMO$ und $\operatorname{tg} PMN$ gefundenen Werthe, so erhalten wir:

$$\frac{\sin KMN}{\cos PMN}=-\frac{y\operatorname{tg}\alpha+x}{\sqrt{y^2+x^2}},$$

und durch Substitution

$$v=-\frac{y(y\operatorname{tg}\alpha+x)}{\sqrt{y^2+x^2}}.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke OMK und OMP ergibt sich nun

$$\frac{ON}{OM}=\frac{NK}{MP} \text{ oder } \frac{m}{r}=\frac{v}{y},$$

somit

$$\frac{m}{r}=-\frac{y\operatorname{tg}\alpha+x}{\sqrt{y^2+x^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Erwägt man, dass α der Winkel ist, welchen die Berührungslinie mit der positiven Richtung der Abszissenachse einschliesst, und dass der erste Differenzialquotient der Ordinate als Function der Abszisse, gewonnen aus der Gleichung der Kurve, die trigonometrische Tangente jenes Winkels ausdrückt, so wird man $\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}$ setzen können, wodurch die drei oben entwickelten Formeln (1), (2) und (3) in folgende übergehen:

$$u=\frac{y\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{y^2+x^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$

$$n^2=y^2\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

$$\frac{m}{r}=-\frac{y\frac{dy}{dx}+x}{\sqrt{y^2+x^2}}. \quad \ldots\ldots\ldots (c)$$

III.

Nimmt man bei den Kegelschnittslinien den Brennpunkt als Anfangspunkt, die Richtung der Hauptachse als Abszissenachse an und adoptirt man ein rechtwinkliges Coordinaten-System, so ist bekanntlich

$$y^2 + x^2 = (p - ex)^2$$

die den drei Kegelschnittslinien gemeinschaftliche Gleichung, wobei die positiven Abszissen gegen den Scheitel der Kurve hin, und zwar bei der Ellipse und Hyperbel gegen den, dem als Anfangspunkte angenommenen Brennpunkte näher liegenden Scheitel gezählt werden, und wobei p den halben Parameter und e die Exzentrizität der Kurve bezeichnen, so dass jede Gleichung einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel entspricht, je nachdem $e < 1$, $e = 1$ oder $e > 1$ ist.

Hierbei findet bezüglich des aus dem Anfangspunkte zu einem Punkte der Kurve gezogenen Leitstrahls r folgende Relation statt:

$$r^2 = y^2 + x^2, \text{ somit } r = p - ex.$$

Aus der Gleichung $y^2 + x^2 = (p - ex)^2$ ergibt sich nun durch Differenziation:

$$y\frac{dy}{dx} + x = -e(p - ex)^2,$$

woraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ep + (1 - e^2)x}{y},$$

oder auch, da $p - ex = r$ ist,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{er + x}{y}.$$

Nun wollen wir den einen oder den anderen dieser zwei für $\frac{dy}{dx}$ gewonnenen Ausdrücke in jede der drei oben entwickelten Formeln (a), (b) und (c) substituiren.

1. Substituiren wir in die Formel (a) für $\frac{dy}{dx}$ den ersten Ausdruck, so erhalten wir:

$$u = \frac{y\left(y + \frac{epx + (1 - e^2)x^2}{y}\right)}{\sqrt{y^2 + x^2}}$$

oder

$$u = \frac{y^2 + x^2 + ex(p - ex)}{\sqrt{y^2 + x^2}},$$

und mit Rücksicht, dass $y^2 + x^2 = (p - ex)^2$ ist, erhält man:

$$u = \frac{(p - ex)^2 + ex(p - ex)}{p - ex} = p - ex + ex,$$

somit $u = p$, und da wir mit u im Allgemeinen die Projection der Normale eines Punktes der Kurve auf den Leitstrahl bezeichnet haben, so sehen wir, dass bei den Kegelschnittslinien diese Projection konstant und gleich ist dem halben Parameter der Kurve.

Dass dies rücksichtlich beider Leitstrahlen, die einem Punkte der Ellipse oder Hyperbel entsprechen, stattfinde, gehet aus der einfachen Betrachtung hervor, dass die Normale eines Punktes der Ellipse den Winkel, welchen die zwei Leitstrahlen einschliessen, und bei der Hyperbel den Winkel, welchen ein Leitstrahl mit der Verlängerung des anderen bildet, halbirt, und dass man stets die Projection einer Geraden auf einer anderen Geraden findet, wenn man die projicirte Gerade mit dem Cosinus des Winkels multiplizirt, welchen die beiden Geraden mit einander einschliessen.

Kehren wir nun die Aufgabe um und suchen wir die Kurven, bei welchen die besagte Projection constant ist, so haben wir zu diesem Ende die Gleichung

$$\frac{y\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{y^2 + x^2}} = p,$$

unter p eine konstante Grösse verstanden, zu integriren. Setzen wir zu diesem Behufe $y = xz$, unter z eine neue Veränderliche verstanden, so erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

und

$$\frac{y\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{y^2 + x^2}} = \frac{xz\left(xz - xz - x^2\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{x^2z^2 + x^2}}$$

$$= \frac{x^2 z\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1 + z^2}};$$

daher haben wir:

$$-\frac{x^2 z \frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+z^2}} = p,$$

woraus folgt:

$$\frac{z dz}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{p dx}{x^2},$$

und durch Integration:

$$\sqrt{1+z^2} = \frac{p}{x} + \text{Const.},$$

welche Integrationsconstante wir immerhin gleich $-e$ setzen dürfen, so dass wir mit Rücksicht, dass $z = \frac{y}{x}$ ist, erhalten:

$$\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{p}{x} - e,$$

oder

$$y^2 + x^2 = (p - ex)^2,$$

welche Gleichung ausschliesslich den Kegelschnittslinien angehört. Nur bei diesen Kurven ist also die Projection der Normale eines Punktes auf den Leitstrahl constant, es ist daher diese eine karakteristische Eigenschaft der Kegelschnittslinien.

2. Substituiren wir nun in die oben entwickelte Formel (b) für $\frac{dy}{dx}$ den oben gefundenen Ausdruck $-\frac{er+x}{y}$, so erhalten wir

$$n^2 = y^2 \left\{1 + \frac{(er+x)^2}{y^2}\right\} = y^2 + x^2 + 2erx + e^2 r^2;$$

berücksichtigen wir nun, dass $r = p - ex$, somit $ex = p - r$, und dass $y^2 + x^2 = r^2$ ist, so erhalten wir:

$$n^2 = r^2 + 2pr - 2r^2 + e^2 r^2 = 2pr - r^2 + e^2 r^2$$

oder

$$n^2 = 2pr - (1 - e^2) r^2,$$

woraus ersichtlich wird, dass zwischen n und r dieselbe Relation stattfindet, wie zwischen den Coordinaten y und x, wenn man den Scheitel der Kegelschnittslinie als Anfangspunkt, die Hauptachse als Abszissenachse und ein rechtwinkliges Coordinaten-System annimmt; denn bekanntlich gilt in diesem Falle für alle Kegelschnittslinien die Gleichung:

$$y^2 = 2px - (1 - e^2)x^2.$$

Für die Parabel, wo $e = 1$ ist, gehet obige Relation über in $n^2 = 2pr$. Für die Ellipse und Hyperbel gilt obige Relation auch für den zweiten, jedem Punkte einer solchen Kurve entsprechenden Leitstrahl, so wie die Gleichung $y^2 = 2px - (1 - e^2)x^2$ der Form nach für beide Kurven fortbesteht, auch wenn man den andern Scheitel als Anfangspunkt annimmt, nur dass sie bei der Hyperbel unter Beibehaltung derselben Abszissenrichtung bekanntlich in $y^2 = -2px - (1 - e^2)x^2$ übergeht. Um dieses zu rechtfertigen, brauchen wir nur zu berücksichtigen, dass zwischen den zwei, einem Punkte zukommenden Leitstrahlen r und r' bei der Ellipse die Relation $r + r' = 2a$ und bei der Hyperbel die Relation $r' - r = 2a$ stattfindet, unter a die halbe erste Achse der Kurve verstanden.

Denn, substituiren wir für r in die Gleichung

$$n^2 = 2pr - (1 - e^2)r^2$$

den aus der Relation $r + r' = 2a$ sich ergebenden Werth $r = 2a - r'$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} n^2 &= 4ap - 2pr' - (1 - e^2)(4a^2 - 4ar' + r'^2) \\ &= 4ap - 2pr' - 4a^2(1 - e^2) + 4ar'(1 - e^2) - (1 - e^2)r'^2, \end{aligned}$$

und da bekanntlich bei der Ellipse $a(1 - e^2) = p$ ist, so haben wir:

$$n^2 = 4ap - 2pr' - 4ap + 4pr' - (1 - e^2)r'^2,$$

somit

$$n^2 = 2pr' - (1 - e^2)r'^2.$$

Substituiren wir aber in die Gleichung $n^2 = 2pr - (1 - e^2)r^2$ für r den aus der Relation $r' - r = 2a$ sich ergebenden Werth $r = r' - 2a$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} n^2 &= 2pr' - 4ap - (1 - e^2)(r'^2 - 4ar' + 4a^2) \\ &= 2pr' - 4ap + 4ar'(1 - e^2) - 4a^2(1 - e^2) - (1 - e^2)r'^2. \end{aligned}$$

Da nun bei der Hyperbel bekanntlich $a(1 - e^2) = -p$ ist, so haben wir:

$$n^2 = 2pr' - 4ap - 4pr' + 4ap - (1 - e^2)r'^2$$

oder

$$n^2 = -2pr' - (1 - e^2)r'^2.$$

Dass die eben nachgewiesene Relation zwischen Normale und Leitstrahl eines Punktes nur für die Kegelschnittslinien mit der Relation zwischen den Coordinaten eines Punktes bei einem gewissen Coordinaten-System gelte, insofern also eine karakteristische Eigenschaft der Kegelschnittslinien sei, gehet einfach aus der Betrachtung hervor, dass die Gleichung von der Form

$$y^2 = 2px - (1-e^2)x^2$$

nur den Kegelschnittslinien entsprechen kann.

3. Substituiren wir nun in die in I. entwickelte Formel (c) für $\frac{dy}{dx}$ den oben gefundenen Werth $-\frac{ep+(1-e^2)x}{y}$, so erhalten wir:

$$\frac{m}{r} = \frac{-ep-(1-e^2)x+x}{\sqrt{y^2+x^2}} = \frac{e(p-ex)}{\sqrt{y^2+x^2}}.$$

Da aber $y^2+x^2 = (p-ex)^2$ ist, so erhalten wir:

$$\frac{m}{r} = \frac{e(p-ex)}{p-ex} \text{ oder } \frac{m}{r} = e.$$

Das m drückt, wie wir dies aus I. wissen, den Abstand des Durchschnittspunktes der Normale mit der Abszissenachse vom Anfangspunkt der Coordinaten aus; nun haben wir aber den Brennpunkt der Kegelschnittslinien als Anfangspunkt und die Hauptachse als Abszissenachse angenommen, daher sagt uns die Gleichung $\frac{m}{r} = e$, dass bei den Kegelschnittslinien das Verhältniss des Abstandes des Durchschnittspunktes der Normale mit der Hauptachse vom Brennpunkte zum betreffenden Leitstrahl des Punktes constant und gleich der Exzentrizität ist.

Bei der Parabel, wo $e = 1$ ist, hat man $\frac{m}{r} = 1$, also $m = r$.

Bei der Ellipse und Hyperbel gilt jenes Verhältniss auch zwischen dem Abstande des Durchschnittspunktes der Normale vom zweiten Brennpunkte und dem zweiten Leitstrahl.

Denn bezeichnen wir mit m' den letzterwähnten Abstand und mit r' den zweiten Leitstrahl, so haben wir:

bei der Ellipse $m+m' = 2ae$ und $r+r' = 2a$, unter a die halbe grosse Achse verstanden, folglich $m = 2ae - m'$ und $r = 2a - r'$, daher

$$\frac{m}{r} = \frac{2ae - m'}{2a - r'};$$

$$\text{aber } \frac{m}{r} = e, \text{ daher } \frac{2ae - m'}{2a - r'} = e,$$

woraus folgt:

$$2ae - m' = 2ae - er', \text{ daher } m' = er' \text{ und } \frac{m'}{r'} = e,$$

w. z. b. w.;

und bei der Hyperbel haben wir $m' - m = 2ae$ und $r' - r = 2a$, unter a die halbe erste Achse verstanden, daher $m = m' - 2ae$ und $r = r' - 2a$, folglich

$$\frac{m}{r} = \frac{m' - 2ae}{r' - 2a};$$

$$\text{aber } \frac{m}{r} = e, \text{ daher } \frac{m' - 2ae}{r' - 2a} = e,$$

woraus sich ergibt:

$$m' - 2ae = er' - 2ae, \text{ folglich } m' = er' \text{ und } \frac{m'}{r'} = e,$$

w. z. b. w.

Kehren wir nun die Aufgabe um und suchen wir die Kurven, bei welchen das oft erwähnte Verhältniss constant ist, so werden wir zu diesem Ende die Gleichung

$$-\frac{y\frac{dy}{dx} + x}{\sqrt{y^2 + x^2}} = e,$$

unter e eine constante Grösse verstanden, zu integriren haben. Zu diesem Behufe setzen wir vorerst $y = xz$, wobei z eine neue Veränderliche bezeichnet, so erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx},$$

und durch Substitution in die obige Differenzialgleichung:

$$\frac{xz^2 + x^2z\frac{dz}{dx} + x}{\sqrt{x^2z^2 + x^2}} = -e$$

oder

$$\frac{z^2 + 1 + xz\frac{dz}{dx}}{\sqrt{z^2 + 1}} = -e,$$

woraus folgt:

$$xz\frac{dz}{dx}=-[z^2+1+e\sqrt{z^2+1}],$$

daher

$$\frac{zdz}{z^2+1+e\sqrt{z^2+1}}=-\frac{dx}{x}.$$

Setzen wir nun $z^2+1=q^2$, unter q eine neue Veränderliche verstanden, so erhalten wir durch Differenziation:

$$zdz=qdq,$$

und durch Substitution in die letzte Differenzialgleichung

$$\frac{qdq}{q^2+eq}=-\frac{dx}{x}$$

oder

$$\frac{dq}{q+e}=-\frac{dx}{x},$$

woraus sich durch Integration ergibt:

$$\log\text{nat.}(q+e)=-\log\text{nat.}\,x+\text{Const.},$$

welche willkührliche Constante wir gleich lognat. p, wobei p eine beständige Grösse bezeichnet, setzen können, so dass wir haben:

$$\log\text{nat.}(q+e)=-\log\text{nat.}\,x+\log\text{nat.}\,p=\log\text{nat.}\frac{p}{x},$$

somit

$$q+e=\frac{p}{x} \text{ oder } q=\frac{p-ex}{x}$$

und

$$q^2=\frac{(p-ex)^2}{x^2}.$$

Es ist aber kraft der obigen Annahme $q^2=z^2+1$, $y=xz$, daher $z=\frac{y}{x}$ und $q^2=\frac{y^2}{x^2}+1$, folglich erhalten wir:

$$\frac{y^2}{x^2}+1=\frac{(p-ex)^2}{x^2} \text{ oder } y^2+x^2=(p-ex)^2$$

als Gleichung der fraglichen Kurven. Aber diese Gleichung entspricht nur den Kegelschnittslinien, wobei der Brennpunkt Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems ist, dessen

Abszissenachse mit der Hauptachse der Kurve zusammenfällt; daher sehen wir, dass nur bei diesen Kurven das Verhältniss des Abstandes des Durchschnittspunktes der Normale mit der Hauptachse vom Brennpunkte zum Leitstrahl des betreffenden Punktes der Kurve constant ist, dass somit diese eine karakteristische Eigenschaft der Kegelschnittslinien ist.

Nachschrift des Herausgebers.

Um Herrn Doctor Zampieri das Interesse zu beweisen, welches ich an den in der vorhergehenden Abhandlung mitgetheilten allgemeinen Sätzen von den Kegelschnitten genommen habe, und um zugleich an einem neuen lehrreichen Beispiele zu zeigen, mit welcher Leichtigkeit die von mir in Thl. XXXI. Nr. XIII. entwickelte neue Theorie der Kegelschnitte*) meistens zu solchen allgemeinen Sätzen führt, werde ich mir erlauben, die in Rede stehenden Sätze im Folgenden aus dieser von mir entwickelten neuen allgemeinen Theorie der Kegelschnitte abzuleiten, indem ich jedoch nicht unterlassen kann, noch darauf besonders hinzuweisen, dass die Abhandlung des Herrn Doctor Zampieri namentlich auch deshalb lehrreich ist, weil in derselben zugleich der Nachweis geführt worden ist, dass die bewiesenen Sätze den Kegelschnitten eigenthümlich, also nicht auch noch anderen Curven, zukommen, wovon natürlich im Nachstehenden nicht weiter die Rede sein wird.

Nach N. T. d. K. VIII. 2). S. 133. ist die Gleichung der dem Punkte (x_1y_1) entsprechenden Normale des Kegelschnitts:

$$1)\quad y-y_1=\frac{n^2B(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(y_1-g)}{n^2A(Ax_1+By_1+C)-(A^2+B^2)(x_1-f)}(x-x_1),$$

und die Gleichung des demselben Punkte (x_1y_1) des Kegelschnitts entsprechenden, aus dem Brennpunkte (fg) ausgehenden Vectors ist

$$2)\quad \ldots\ldots\quad y-y_1=\frac{y_1-g}{x_1-f}(x-x_1).$$

Bezeichnen wir nun die von der Normale und dem Vector eingeschlossenen Winkel durch μ, so ist, wie man nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie aus den beiden vorhergehenden Gleichungen leicht findet:

*) Ich bezeichne diese Abhandlung immer mit N. T. d. K.

$$3) \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{tang} \mu^2 = \left\{ \frac{A(y_1-g) - B(x_1-f)}{Af+Bg+C} \right\}^2,$$

wo man bei der Entwickelung dieser Formel mittelst der Gleichungen 1) und 2) nur zu beachten hat, dass

$$A(x_1-f) + B(y_1-g) = Ax_1 + By_1 + C - (Af+Bg+C)$$

gesetzt werden kann, und dass nach der in N. T. d. K. II. 2). S. 79. entwickelten allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte

$$n^2(Ax_1+By_1+C)^2 = (A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}$$

ist. Aus der Formel 3) ergiebt sich aber sogleich:

$$4) \quad . \quad . \cos \mu^2 = \frac{(Af+Bg+C)^2}{(Af+Bg+C)^2 + \{A(y_1-g) - B(x_1-f)\}^2}.$$

Bezeichnen wir jetzt die dem Punkte $(x_1 y_1)$ entsprechende Normale des Kegelschnitts durch N, so ist nach N. T. d. K. VIII. 7). S. 139.:

5)

$$N^2 = \frac{2n^2(Ax_1+By_1+C)\{Af+Bg+C+\frac{n^2-1}{2}(Ax_1+By_1+C)\}}{A^2+B^2}.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$(Af+Bg+C)^2 + \{A(y_1-g) - B(x_1-f)\}^2$$

$$= (Af+Bg+C)^2$$

$$+ \{(A^2+B^2)[(x_1-f)^2+(y_1-g)^2] - [A(x_1-f)+B(y_1-g)]^2\},$$

also, wenn man

$$A(x_1-f) + B(y_1-g) = Ax_1 + By_1 + C - (Af+Bg+C)$$

setzt, und wieder bemerkt, dass nach der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte

$$(A^2+B^2)[(x_1-f)^2+(y_1-g)^2] = n^2(Ax_1+By_1+C)^2$$

ist:

$$(Af+Bg+C)^2 + \{A(y_1-g) - B(x_1-f)\}^2$$

$$= 2(Ax_1+By_1+C)\{Af+Bg+C+\frac{n^2-1}{2}(Ax_1+By_1+C)\}.$$

Also ist nach 5):

$$6) \ldots N^2 = \frac{n^2\{(Af+Bg+C)^2+[A(y_1-g)-B(x_1-f)]^2\}}{A^2+B^2}.$$

Daher ergiebt sich aus 4) und 6) durch Multiplication:

$$(N\cos\mu)^2 = \frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{A^2+B^2}.$$

Nun ist aber nach N. T. d. K. VI. 2). S. 107., wenn p den Parameter bezeichnet:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{A^2+B^2}.$$

Also ist:

$$7) \ldots\ldots \quad (N\cos\mu)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

worin offenbar unmittelbar der erste der von Herrn Doctor Zampieri bewiesenen Sätze ausgesprochen ist, weil augenscheinlich der absolute Werth von $N\cos\mu$ die Projection der Normale auf den entsprechenden Vector ist.

Die Formeln 3) und 4) sind insofern bemerkenswerth, weil sie von der Charakteristik n ganz unabhängig sind.

Ist (u_2v_2) der Durchschnittspunkt der Normale mit der Axe des Kegelschnitts, so ist nach N. T. d. K. VIII. 5). S. 138.:

$$u_2 - f = \frac{n^2A(Ax_1+By_1+C)}{A^2+B^2},$$

$$v_2 - g = \frac{n^2B(Ax_1+By_1+C)}{A^2+B^2};$$

und bezeichnet nun E die Entfernung des Punktes (u_2v_2) von dem Brennpunkte (fg), so ist

$$E^2 = (u_2-f)^2 + (v_2-g)^2,$$

also nach den vorstehenden Formeln:

$$E^2 = \frac{n^4(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2}.$$

Bezeichnet aber V den von dem Brennpunkte (fg) nach dem Punkte (x_1y_1) gezogenen Vector, so ist nach N. T. d. K. V. 3). S. 103.:

$$V^2 = \frac{n^2(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2},$$

Also ist nach dem Vorhergehenden:

$$8) \quad \ldots\ldots \quad \frac{E}{V}=n.$$

Bei der Parabel ist bekanntlich $n=1$, folglich $E=V$. Bei der Ellipse und Hyperbel ist nach N. T. d. K. IV. 20), 21). S. 99.:

$$n=\frac{e}{a},$$

also:

$$9) \quad \ldots\ldots \quad \frac{E}{V}=\frac{e}{a}=\sqrt{1\mp\left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

wo das obere Zeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel gilt. Dies ist der dritte der von Herrn Doctor Zampieri bewiesenen Sätze.

Der zweite von Herrn Doctor Zampieri bewiesene Satz ist endlich unmittelbar in dem obigen Ausdruck 5) für das Quadrat der Normale enthalten. Denn nach N. T. d. K. V. 3). S. 103. und VI. 2). S. 107. ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$V=\pm\frac{n(Ax_1+By_1+C)}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad p=\pm\frac{2n(Af+Bg+C)}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

also:

$$Vp=\frac{2n^2(Ax_1+By_1+C)(Af+Bg+C)}{A^2+B^2},$$

$$V^2=\frac{n^2(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2};$$

folglich nach 5) offenbar:

$$10) \quad \ldots\ldots \quad N^2=pV-(1-n^2)V^2.$$

Da nun für die Parabel $n=1$ ist, so ist für diesen Kegelschnitt

$$N^2=pV,$$

was ganz mit der bekannten Gleichung der Parabel aus dem Scheitel übereinstimmt. Nimmt man nun für die Ellipse und Hyperbel immer respective die oberen und die unteren Zeichen, so ist nach N. T. d. K. IV. 20), 21). S. 99.:

$$1-n^2=\pm\frac{b^2}{a^2}=\pm\frac{p}{2a},$$

also nach 10):

$$N^2 = pV \mp \frac{pV^2}{2a},$$

was wieder ganz mit den bekannten Gleichungen der in Rede stehenden Kegelschnitte aus dem Scheitel übereinstimmt.

Man sieht hieraus, wie leicht sich die Sätze des Herrn Doctor Zampieri aus unserer neuen allgemeinen Theorie der Kegelschnitte ableiten lassen, was meistens von allen solchen Sätzen sich in gleicher Weise sagen lässt.

XXXI.

Neue Integrations-Methode für Differenzen-Gleichungen, deren Coefficienten ganze algebraische Functionen der unabhängig Veränderlichen sind.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie zu Wien.

Die Arbeit, die ich hier vorlege, hat zum Zwecke die Auflösung nachfolgender Gleichung:

$$X_n f(x+n) + X_{n-1} f(x+n-1) + \ldots + X_1 f(x+1) + X_0 f(x) = 0, \quad (1)$$

in welcher

$$X_n, \quad X_{n-1}, \ldots X_1, \quad X_0$$

gegebene ganze algebraische Functionen von x sind, denn auf diese Form (1) lässt sich jede lineare Differenzen-Gleichung mit ganzen algebraischen Coefficienten bringen.

deren Coeffic. ganze algebr. Funct. der unabhängig Veränderl. [illegible]

Ich setze das Integral der vorgelegten Gleichung in Form eines Differential-Quotienten voraus mit variablem Differentiations-Indexe, nämlich:

$$f(x) = \left[\frac{\partial^x \varphi(r)}{\partial r^x}\right]_{\lambda} [illegible]$$

woselbst $\varphi(r)$ eine, einstweilen noch unbekannte Function von r bedeutet und λ eine constante Zahl ist, die nach [illegible] $x$maliger Differentiation von $\varphi(r)$ in dem so erhaltenen Resultate statt r gesetzt werden muss.

Wenn nun die Coefficienten der vorgelegten Gleichung folgende Gestalt haben:

$$X_n = a_n + b_n x + c_n x^2 + \ldots + h_n x^{m-1} + [illegible]$$

$$X_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1} x + c_{n-1} x^2 + \ldots + h_{n-1} x^{m-1} + [illegible]$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$X_1 = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + \ldots + h_1 x^{m-1} + [illegible]$$

$$X_0 = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + \ldots + h_0 x^{m-1} + [illegible]$$

so erhält man, der in (2) stehenden [illegible] [illegible] führend und [illegible] von aus (2) hervorgehenden Gleichungen:

$$f(x+1) = \left[\frac{\partial^{x+1} \varphi(r)}{\partial r^{x+1}}\right] [illegible]$$

$$f(x+2) = \left[\frac{\partial^{x+2} \varphi(r)}{\partial r^{x+2}}\right] [illegible]$$

$$\ldots\ldots$$

$$f(x+n) = \left[\frac{\partial^{x+n} \varphi(r)}{\partial r^{x+n}}\right] [illegible]$$

nachfolgende Gleichung:

(5)

$$(a_n + b_n x + c_n x^2 + \ldots + h_n x^{m-1} + k_n x^m) \left[\frac{\partial^{x+n} \varphi(r)}{\partial r^{x+n}}\right] [illegible]$$

$$+ (a_{n-1} + b_{n-1} x + c_{n-1} x^2 + \ldots + h_{n-1} x^{m-1} + k_{n-1} x^m) [illegible]$$

$$\ldots\ldots$$

$$+ (a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + \ldots + h_1 x^{m-1} + k_1 x^m) [illegible]$$

$$+ (a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + \ldots + h_0 x^{m-1} + k_0 x^m) [illegible]$$

$$N^2 = pV \mp \frac{pV^2}{2a},$$

was wieder ganz mit den bekannten Gleichungen der in Rede stehenden Kegelschnitte aus dem Scheitel übereinstimmt.

Man sieht hieraus, wie leicht sich die Sätze des Herrn Doctor Zampieri aus unserer neuen allgemeinen Theorie der Kegelschnitte ableiten lassen, was meistens von allen solchen Sätzen sich in gleicher Weise sagen lässt.

XXXI.

Neue Integrations-Methode für Differenzen-Gleichungen, deren Coefficienten ganze algebraische Functionen der unabhängig Veränderlichen sind.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie zu Wien.

Die Arbeit, die ich hier vorlege, hat zum Zwecke die Auflösung nachfolgender Gleichung:

$$X_n f(x+n) + X_{n-1} f(x+n-1) + \ldots + X_1 f(x+1) + X_0 f(x) = 0, \quad (1)$$

in welcher

$$X_n, \quad X_{n-1}, \ldots \quad X_1, \quad X_0$$

gegebene ganze algebraische Functionen von x sind, denn auf diese Form (1) lässt sich jede lineare Differenzen-Gleichung mit ganzen algebraischen Coefficienten bringen.

Ich setze das Integral der vorgelegten Gleichung in Form eines Differential-Quotienten voraus mit variablem Differentiations-Indexe, nämlich:

$$f(x) = \left\{ \frac{\partial^x \varphi(r)}{\partial r^x} \right\}_\lambda, \tag{2}$$

woselbst $\varphi(r)$ eine, einstweilen noch unbestimmte Function von r bedeutet und λ eine constante Zahl ist, die nach verrichteter $x$maliger Differentiation von $\varphi(r)$ in dem so erhaltenen Resultate statt r gesetzt werden muss.

Wenn nun die Coefficienten der vorgelegten Gleichung folgende Gestalt haben:

$$\left.\begin{array}{l} X_n = a_n + b_n x + c_n x^2 + \ldots + h_n x^{m-1} + k_n x^m, \\ X_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1} x + c_{n-1} x^2 + \ldots + h_{n-1} x^{m-1} + k_{n-1} x^m, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_1 = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + \ldots + h_1 x^{m-1} + k_1 x^m, \\ X_0 = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + \ldots + h_0 x^{m-1} + k_0 x^m; \end{array}\right\} \tag{3}$$

so erhält man, den in (2) stehenden Werth von $f(x)$ in (1) einführend und zugleich Rücksicht nehmend auf folgendes System von aus (2) hervorgehenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} f(x+1) = \left\{ \dfrac{\partial^x \varphi'(r)}{\partial r^x} \right\}_\lambda, \\ f(x+2) = \left\{ \dfrac{\partial^x \varphi''(r)}{\partial r^x} \right\}_\lambda, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f(x+n) = \left\{ \dfrac{\partial^x \varphi^{(n)}(r)}{\partial r^x} \right\}_\lambda, \end{array}\right\} \tag{4}$$

nachfolgende Gleichung:

$$(5)$$

$$\begin{array}{l} (a_n + b_n x + c_n x^2 + \ldots + h_n x^{m-1} + k_n x^m) \cdot \left\{ \dfrac{\partial^x \varphi^{(n)}(r)}{\partial r^x} \right\}_\lambda \\ + (a_{n-1} + b_{n-1} x + c_{n-1} x^2 + \ldots + h_{n-1} x^{m-1} + k_{n-1} x^m) \cdot \left\{ \dfrac{\partial^x \varphi^{(n-1)}(r)}{\partial r^x} \right\}_\lambda \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + (a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + \ldots + h_1 x^{m-1} + k_1 x^m) \cdot \left\{ \dfrac{\partial^x \varphi'(r)}{\partial r^x} \right\}_\lambda \\ + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + \ldots + h_0 x^{m-1} + k_0 x^m) \cdot \left\{ \dfrac{\partial^x \varphi(r)}{\partial r^x} \right\}_\lambda = 0. \end{array}$$

$$N^2 = pV \mp \frac{pV^2}{2a},$$

was wieder ganz mit den bekannten Gleichungen der in Rede stehenden Kegelschnitte aus dem Scheitel übereinstimmt.

Man sieht hieraus, wie leicht sich die Sätze des Herrn Doctor Zampieri aus unserer neuen allgemeinen Theorie der Kegelschnitte ableiten lassen, was meistens von allen solchen Sätzen sich in gleicher Weise sagen lässt.

XXXI.

Neue Integrations-Methode für Differenzen-Gleichungen, deren Coefficienten ganze algebraische Functionen der unabhängig Veränderlichen sind.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie zu Wien.

Die Arbeit, die ich hier vorlege, hat zum Zwecke die Auflösung nachfolgender Gleichung:

$$X_n f(x+n) + X_{n-1} f(x+n-1) + \ldots + X_1 f(x+1) + X_0 f(x) = 0, \quad (1)$$

in welcher

$$X_n, \quad X_{n-1}, \ldots \quad X_1, \quad X_0$$

gegebene ganze algebraische Functionen von x sind, denn auf diese Form (1) lässt sich jede lineare Differenzen-Gleichung mit ganzen algebraischen Coefficienten bringen.

$$\left.\begin{array}{l}a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \\ b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_n z^n + h_{n-1} z^{n-1} + \ldots + h_1 z + h_0, \\ k_n z^n + k_{n-1} z^{n-1} + \ldots + k_1 z + k_0\end{array}\right\} \quad (11)$$

einen gemeinschaftlichen Factor haben. Sei etwa $z-\alpha$ ein solcher, so wird für

$$\varphi(r) = e^{\alpha r}$$

das System der Gleichungen (8) erfüllt; somit ist alsdann

$$f(x) = \left\{ \frac{\partial^x e^{\alpha r}}{\partial r^x} \right\}_\lambda = \alpha^x e^{\alpha\lambda},$$

wofür man kurz

$$f(x) = C\alpha^x$$

setzen kann.

Haben die Polynome (11) den gemeinschaftlichen Factor

$$(z-\alpha)^m,$$

so wird für

$$\varphi(r) = e^{\alpha r}(C_1 + C_2 r + \ldots + C_{m-1} r^{m-2} + C_m r^{m-1})$$

das System der Gleichungen (8) befriedigt, somit ist dann

$$f(x) = \left\{ \frac{\partial^x}{\partial r^x} [e^{\alpha r}(C_1 + C_2 r + \ldots + C_{m-1} r^{m-2} + C_m r^{m-1})] \right\}_\lambda,$$

und wird die $x$malige Differentiation wirklich ausgeführt und nach der Differentiation statt r λ gesetzt, so erhält man, wie man sich leicht überzeugt, für $f(x)$ einen Ausdruck von folgender Gestalt:

$$f(x) = \alpha^x (A_1 + A_2 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-2} + A_m x^{m-1}),$$

welcher der vorgelegten Gleichung genügt.

Ich kann nicht umhin, zu bemerken, dass diese in speciellen Fällen stattfindenden Auflösungen in dem Falle, als die vorgelegte Differenzen-Gleichung von folgender Gestalt ist:

$$(a_n + b_n x) f(x+n) + (a_{n-1} + b_{n-1} x) f(x+n-1) + \ldots$$
$$\ldots + (a_1 + b_1 x) f(x+1) + (a_0 + b_0 x) f(x) = 0,$$

schon von Prof. Petzval bemerkt wurden. Man sehe dessen Werk über Integration linearer Differentialgleich. I. Bd. S. 117.

Führt man nun nachstehende Bezeichnungsweise ein:

(6)

$$\begin{aligned}
U_0 &= a_n\varphi^{(n)}(r) + a_{n-1}\varphi^{(n-1)}(r) + \dots + a_1\varphi'(r) + a_0\varphi(r),\\
U_1 &= b_n\varphi^{(n)}(r) + b_{n-1}\varphi^{(n-1)}(r) + \dots + b_1\varphi'(r) + b_0\varphi(r),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
U_{m-1} &= h_n\varphi^{(n)}(r) + h_{n-1}\varphi^{(n-1)}(r) + \dots + h_1\varphi'(r) + h_0\varphi(r),\\
U_m &= k_n\varphi^{(n)}(r) + k_{n-1}\varphi^{(n-1)}(r) + \dots + k_1\varphi'(r) + k_0\varphi(r);
\end{aligned}$$

so erhält man statt der Gleichung (5) folgende Gleichung:

$$\left\{\frac{\partial^x U_0}{\partial r^x} + x\frac{\partial^x U_1}{\partial r^x} + \dots + x^{m-1}\frac{\partial^x U_{m-1}}{\partial r^x} + x^m\frac{\partial^x U_m}{\partial r^x}\right\}_\lambda = 0, \qquad (7)$$

und es ist nun die Aufgabe, jenen Werth von $\varphi(r)$ und jene Constante λ zu finden, welche diese Gleichung in eine identische verwandelt.

Bevor ich zur Lösung dieser Aufgabe schreite, will ich bemerken, dass die Gleichung (7) in einem speciellen Falle sehr leicht löslich ist. Wird nämlich für einen gewissen Werth von $\varphi(r)$

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 0, \dots \quad U_{m-1} = 0, \quad U_m = 0, \qquad (8)$$

so ist für denselben Werth von $\varphi(r)$ offenbar auch

$$\frac{\partial^x U_0}{\partial r^x} = 0, \quad \frac{\partial^x U_1}{\partial r^x} = 0, \dots \quad \frac{\partial^x U_{m-1}}{\partial r^x} = 0, \quad \frac{\partial^x U_m}{\partial r^x} = 0, \qquad (9)$$

somit die Gleichung (7) erfüllt. Da nun die Gleichungen (8) lauter lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten sind, so hängen die Auflösungen dieser Gleichungen ab von der Auflösung des nachfolgenden Systems algebraischer Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 &= 0,\\
b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0 &= 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots&\\
h_n z^n + h_{n-1}z^{n-1} + \dots + h_1 z + h_0 &= 0,\\
k_n z^n + k_{n-1}z^{n-1} + \dots + k_1 z + k_0 &= 0;
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

und diese algebraischen Gleichungen finden zugleich statt, wenn sämmtliche Polynome:

$$\left.\begin{array}{l} a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \\ b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_n z^n + h_{n-1} z^{n-1} + \ldots + h_1 z + h_0, \\ k_n z^n + k_{n-1} z^{n-1} + \ldots + k_1 z + k_0 \end{array}\right\} \quad (11)$$

einen gemeinschaftlichen Factor haben. Sei etwa $z - \alpha$ ein solcher, so wird für

$$\varphi(r) = e^{\alpha r}$$

das System der Gleichungen (8) erfüllt; somit ist alsdann

$$f(x) = \left\{ \frac{\partial^x e^{\alpha r}}{\partial r^x} \right\}_\lambda = \alpha^x e^{\alpha\lambda},$$

wofür man kurz

$$f(x) = C\alpha^x$$

setzen kann.

Haben die Polynome (11) den gemeinschaftlichen Factor

$$(z - \alpha)^m,$$

so wird für

$$\varphi(r) = e^{\alpha r}(C_1 + C_2 r + \ldots + C_{m-1} r^{m-2} + C_m r^{m-1})$$

das System der Gleichungen (8) befriedigt, somit ist dann

$$f(x) = \left\{ \frac{\partial^x}{\partial r^x} [e^{\alpha r}(C_1 + C_2 r + \ldots + C_{m-1} r^{m-2} + C_m r^{m-1})] \right\}_\lambda,$$

und wird die $x$malige Differentiation wirklich ausgeführt und nach der Differentiation statt r λ gesetzt, so erhält man, wie man sich leicht überzeugt, für $f(x)$ einen Ausdruck von folgender Gestalt:

$$f(x) = \alpha^x(A_1 + A_2 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-2} + A_m x^{m-1}),$$

welcher der vorgelegten Gleichung genügt.

Ich kann nicht umhin, zu bemerken, dass diese in speciellen Fällen stattfindenden Auflösungen in dem Falle, als die vorgelegte Differenzen-Gleichung von folgender Gestalt ist:

$$(a_n + b_n x) f(x+n) + (a_{n-1} + b_{n-1} x) f(x+n-1) + \ldots$$
$$\ldots + (a_1 + b_1 x) f(x+1) + (a_0 + b_0 x) f(x) = 0,$$

schon von Prof. Petzval bemerkt wurden. Man sehe dessen Werk über Integration linearer Differentialgleich. 1. Bd. S. 117.

Ich wende mich jetzt wieder zur Gleichung (7), welche ist:

$$\left\{\frac{\partial^x U_0}{\partial r^x}+x\frac{\partial^x U_1}{\partial r^x}+\ldots.+x^{m-1}\frac{\partial^x U_{m-1}}{\partial r^x}+x^m\frac{\partial^x U_m}{\partial r^x}\right\}_\lambda=0, \quad (7)$$

und strebe nun, die in dieser Gleichung vorkommenden Ausdrücke:

$$\left\{x\frac{\partial^x U_1}{\partial r^x}\right\}_\lambda, \ldots. \quad \left\{x^{m-1}\frac{\partial^x U_{m-1}}{\partial r^x}\right\}_\lambda, \quad \left\{x^m\frac{\partial^x U_m}{\partial r^x}\right\}_\lambda$$

als $x$te Differentialquotienten von Functionen darzustellen, welche bloss r enthalten. Es ist nun wirklich:

$$\left.\begin{array}{l}\left\{x\frac{\partial^x U_1}{\partial r^x}\right\}_\lambda=\left\{\frac{\partial^x}{\partial r^x}[(r-\lambda)U_1']\right\}_\lambda,\\ \left\{x^2\frac{\partial^x U_2}{\partial r^x}\right\}_\lambda=\left\{\frac{\partial^x}{\partial r^x}[(r-\lambda)^2U_2''+(r-\lambda)U_2']\right\}_\lambda,\\ \left\{x^3\frac{\partial^x U_3}{\partial r^x}\right\}_\lambda=\left\{\frac{\partial^x}{\partial r^x}[(r-\lambda)^3U_3'''+3(r-\lambda)^2U_3''+(r-\lambda)U_3']\right\}_\lambda,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}(12)$$

wie man sich leicht überzeugen kann. Denn differenzirt man

$$(r-\lambda)U_1'$$

$x$mal nach r, so erhält man:

$$(r-\lambda)\frac{\partial^x U_1'}{\partial r^x}+x\frac{\partial^x U_1}{\partial r^x},$$

folglich ist die Gleichung

$$\left\{x\frac{\partial^x U_1}{\partial r^x}\right\}_\lambda=\left\{(r-\lambda)\frac{\partial^x U_1'}{\partial r^x}+x\frac{\partial^x U_1}{\partial r^x}\right\}_\lambda$$

identisch, falls nur

$$(r-\lambda)\frac{\partial^x U_1'}{\partial r^x}$$

für $r=\lambda$ Null ist, somit in diesem Falle die erste der Gleichungen (12) bewiesen. Differenzirt man nun den Ausdruck

$$(r-\lambda)^2U_2''+(r-\lambda)U_2'$$

$x$mal nach r, so erhält man:

$$(r-\lambda)^2\frac{\partial^x U_2''}{\partial r^x}+(r-\lambda)(2x+1)\frac{\partial^x U_2'}{\partial r^x}+x^2\frac{\partial^x U_2}{\partial r^x},$$

folglich ist wieder die Gleichung

$$\left\{ x^2 \frac{\partial^x U_2}{\partial r^x} \right\}_\lambda = \left\{ (r-\lambda)^2 \frac{\partial^x U_2''}{\partial r^x} + (r-\lambda)(2x+1) \frac{\partial^x U_2'}{\partial r^x} + x^2 \frac{\partial^x U_2}{\partial r^x} \right\}_\lambda$$

identisch wahr, wenn

$$(r-\lambda)^2 \frac{\partial^x U_2''}{\partial r^x} + (r-\lambda)(2x+1) \frac{\partial^x U_2'}{\partial r^x}$$

für $r = \lambda$ Null wird, und so lässt sich auch die Richtigkeit der späteren Gleichung in (12) darthun, u. s. w.

Man kömmt daher, die in (12) angeführten Werthe in (7) einführend, zu folgender Gleichung:

$$\left\{ \frac{\partial^x}{\partial r^x} \left[U_0 + (r-\lambda) U_1' + (r-\lambda) U_2' + (r-\lambda)^2 U_2'' \right.\right.$$
$$\left.\left. + (r-\lambda) U_3' + 3(r-\lambda)^2 U_3'' + (r-\lambda)^3 U_3''' + \ldots \right] \right\}_\lambda = 0, \quad (13)$$

welche befriedigt wird, wenn

$$U_0 + (r-\lambda) U_1' + (r-\lambda) U_2' + (r-\lambda)^2 U_2''$$
$$+ (r-\lambda) U_3' + 3(r-\lambda)^2 U_3'' + (r-\lambda)^3 U_3''' + \ldots = 0 \quad (14)$$

ist. Diess ist aber bezüglich $\varphi(r)$ eine lineare Differentialgleichung mit Coefficienten, die ganze algebraische Functionen der unabhängig Variablen r sind, und dient daher zur Bestimmung von $\varphi(r)$. Hat man dasselbe gefunden, so ergibt sich:

$$f(x) = \left\{ \frac{\partial^x \varphi(r)}{\partial r^x} \right\}_\lambda,$$

unter λ eine willkührliche Zahl verstanden.

Ich habe jetzt noch von einer bemerkenswerthen Transformation zu sprechen, welche in sehr vielen Fällen wesentlich zur Vereinfachung der Auflösung der vorgelegten Gleichung dient.

Setzt man nämlich in der gegebenen Gleichung (1)

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{[F(x-n)]!},$$

woselbst $[F(x-n)]!$ folgende Bedeutung hat:

$$[F(x-n)]! = F(1-n) . F(2-n) . F(3-n) \ldots . F(x-n),$$

und bemerkt, dass

$$f(x+n) \quad = \frac{\psi(x+n)}{[F(x)]!},$$

$$f(x+n-1) = \frac{\psi(x+n-1)}{[F(x-1)]!},$$

. . . .

$$f(x+n) \quad = \frac{\psi(x+1)}{[F(x+1-n)]!}$$

ist, so hat man

$$X_n \frac{\psi(x+n)}{[F(x)]!} + X_{n-1} \cdot \frac{\psi(x+n-1)}{[F(x-1)]!} + \ldots + X_1 \cdot \frac{\psi(x+1)}{[F(x+1-n)]!}$$
$$+ X_0 \cdot \frac{\psi(x)}{[F(x-n)]!} = 0,$$

und diese Gleichung gibt, mit $[F(x)]!$ multiplicirt, folgende Gleichung:

$$X_n \psi(x+n) + X_{n-1} F(x) . \psi(x+n-1) + \ldots$$
$$\ldots + X_1 F(x) F(x-1) F(x-2) \ldots F(x+2-n) . \psi(x+1)$$
$$+ X_0 F(x) F(x-1) F(x-2) \ldots F(x+1-n) . \psi(x) = 0,$$

woraus man sieht, dass die Substitution

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{[F(x-n)]!}$$

in eine Differenzen-Gleichung gemacht, darauf hinauskömmt, sämmtliche Coefficienten derselben der Reihe nach mit den Zahlen

$$1, \quad F(x), \quad F(x) F(x-1), \quad F(x) F(x-1) F(x-2), \ldots$$

zu multipliciren.

Setzt man daher

$$F(x) = X_n,$$

so gestattet die neu erhaltene Gleichung eine Abkürzung durch X_n und der erste Coefficient der so erhaltenen Gleichung ist somit eins.

Ich will nun an der Gleichung

$$(a_2 + b_2 x) \Delta^2 y + (a_1 + b_1 x) \Delta y + (a_0 + b_0 x) y = 0 \qquad (14)$$

den Werth der hier mitgetheilten Methode prüfen.

Diese Gleichung wurde ursprünglich von Laplace *) und Euler **), alsdann von Petzval ***) behandelt. Wie man aus diesen Arbeiten sieht, hängt die Form des Integrals wesentlich von der Form der Partialbrüche des Bruches

$$\frac{a_2u^2+a_1u+a_0}{b_2u^2+b_1u+b_0}$$

ab. Da nun dieser Bruch sich auf folgende verschiedene Weisen:

$$m+\frac{A}{u-\alpha}+\frac{B}{u-\beta},$$

$$m+\frac{A}{(u-\alpha)^2}+\frac{B}{u-\alpha},$$

$$nu+m+\frac{A}{u-\alpha}, \text{ falls nämlich } b_2=0 \text{ ist;}$$

$$a_2u^2+a_1u+a_0, \text{ falls } b_2=b_1=0 \text{ ist;}$$

zerlegen lässt, so lässt sich die Gleichung (14) unter eine der vier folgenden Formen bringen:

(15)

$$(m+x)\Delta^2y+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]\Delta y+[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0,$$

(16)

$$(m+x)\Delta^2y+[B-2\alpha(m+x)]\Delta y+[A-B\alpha+\alpha^2(m+x)]y=0,$$

(17)

$$n\Delta^2y+(-n\alpha+m+x)\Delta y+[A-\alpha(m+x)]y=0,$$

(18)

$$a_2\Delta^2y+a_1\Delta y+(a_0+x)y=0.$$

Ich will daher die Integrale dieser vier Gleichungen der Reihe nach bestimmen.

Integration der Differenzen-Gleichung

$$(m+x)\Delta^2y+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]\Delta y+[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=0. \quad (15)$$

Ich setze in diese Gleichung

$$y=f(x),$$

---

*) Memoiren der Pariser Akademie. 1782.

**) Euler's vollst. Anleitung zur Integralrechnung. Deutsch von Salomon. 4. Band. S. 373.

***) Petzval's Integration linearer Differentialgleichungen. I. Bd. S. 113.

3. Es sei $A=1+\alpha$ und $B=1+\beta$, alsdann hat die Gleichung (19) folgende Gestalt:

$$(m+x)f(x+2)-(\alpha+\beta+2)(m+x-1)f(x+1)$$
$$+(1+\alpha)(1+\beta)(m+x-2)f(x)=0;$$

hieraus folgt:

$$f(x)=C_1\frac{(1+\alpha)^x}{m+x-2}+C_2\frac{(1+\beta)^x}{m+x-2}.$$

Integration der Differenzen-Gleichung

$$(m+x)\Delta^2y+[B-2\alpha(m+x)]\Delta y+[A-B\alpha+\alpha^2(m+x)]y=0. \quad (16)$$

Ich setze auch hier

$$y=f(x)$$

und erhalte sodann:

$$(m+x)f(x+2)+[B-2(\alpha+1)(m+x)]f(x+1)$$
$$+[A-B(\alpha+1)+(\alpha+1)^2(m+x)]f(x)=0.$$

Diese geht über, für

$$m+x=\xi,$$
$$\alpha+1=\alpha_1;$$
$$f(x)=f(\xi-m)=\frac{\psi(\xi)}{(\xi-2)!}$$

in:

$$\psi(\xi+2)+(B-2\alpha_1\xi)\psi(\xi+1)$$
$$+[-A+B\alpha_1+(A-B\alpha_1-\alpha_1^2)\xi+\alpha_1^2\xi^2]\psi(\xi)=0,$$

und lässt sich wieder nach meiner Methode leicht integriren. Ich setze nämlich

$$\psi(\xi)=\left\{\frac{\partial^\xi\varphi(r)}{\partial r^\xi}\right\}_\lambda,$$

und da

$$X_2=1,$$
$$X_1=B-2\alpha_1\xi,$$
$$X_0=-A+B\alpha_1+(A-B\alpha_1-\alpha_1^2)\xi+\alpha_1^2\xi^2$$

ist, ferner

$$U_0 = \varphi''(r) + B\varphi'(r) + (B\alpha_1 - A)\varphi(r),$$
$$U_1 = -2\alpha_1\varphi'(r) + (A - B\alpha_1 - \alpha_1^2)\varphi(r),$$
$$U_2 = \alpha_1^2\varphi(r);$$

so hat man als Gleichung zur Bestimmung von $\varphi(r)$:

(20)

$$[1-\alpha_1(r-\lambda)]^2\varphi''(r) + [B + (A-B\alpha_1)(r-\lambda)]\varphi'(r) + (B\alpha_1 - A)\varphi(r) = 0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich für

$$\lambda = -\frac{1}{\alpha_1},$$

denn man hat dann:

$$\alpha_1^2 r^2 \varphi''(r) + [A + (A - B\alpha_1)\alpha_1 r]\varphi'(r) + \alpha_1(B\alpha_1 - A)\varphi(r) = 0,$$

und wird diese einmal differenzirt, so erhält man:

$$\alpha_1^2 r^2 \varphi'''(r) + [A + (A - B\alpha_1)\alpha_1 r + 2\alpha_1^2 r]\varphi''(r) = 0,$$

woraus

$$\varphi''(r) = r^{-\frac{2\alpha_1^2 - B\alpha_1 + A}{\alpha_1^2}} \cdot e^{\frac{A}{\alpha_1^2 r}}$$

folgt. Es ist somit

$$\psi(\xi) = \left\{ \frac{\partial^{\xi-2}\left[r^{\frac{B\alpha_1 - 2\alpha_1^2 - A}{\alpha_1^2}} \cdot e^{\frac{A}{\alpha_1^2 r}}\right]}{\partial r^{\xi-2}} \right\}_{-\frac{1}{\alpha_1}},$$

folglich

$$f(x) = \frac{1}{(m+x-2)!}\left\{\frac{\partial^{m+x-2}}{\partial r^{m+x-2}}\left[r^{\frac{B\alpha_1 - 2\alpha_1^2 - A}{\alpha_1^2}} \cdot e^{\frac{A}{\alpha_1^2 r}}\right]\right\}_{-\frac{1}{\alpha_1}}$$

das Integral der vorgelegten Gleichung.

Der einzige specielle Fall $\alpha_1 = 0$ erfordert noch Beachtung. Die Gleichung (20) vereinfacht sich für $\alpha_1 = 0$ in

$$\varphi''(r) + [B + A(r-\lambda)]\varphi'(r) - A\varphi(r) = 0,$$

und gibt differenzirt:

$$\varphi'''(r) + [B + A(r-\lambda)]\varphi''(r) = 0;$$

hieraus folgt:

$$\varphi''(r) = e^{r(A\lambda - B) - \frac{Ar^2}{2}},$$

oder wenn man

$$\lambda = \frac{B}{A}$$

wählt,

$$\varphi''(r) = e^{-\frac{Ar^2}{2}}.$$

Es ist somit:

$$f(x) = \frac{1}{(m+x-2)!}\left\{\frac{\partial^{m+x-2} \cdot e^{-\frac{Ar^2}{2}}}{\partial r^{m+x-2}}\right\}_{\frac{B}{A}}$$

Integration der Differenzen-Gleichung

$$n\Delta^2 y + (-n\alpha + m + x)\Delta y + [A - \alpha(m+x)]y = 0. \quad (17)$$

Setzt man

$$y = f(x),$$

so erhält man:

$$nf(x+2) + [-n(2+\alpha) + m + x]\,f(x+1)$$
$$+ [A + n(1+\alpha) - (1+\alpha)(m+x)]\,f(x) = 0,$$

und setzt man weiter:

$$f(x) = \left\{\frac{\partial^x \varphi(r)}{\partial r^x}\right\}_\lambda,$$

und beachtet, dass

$$X_2 = n,$$
$$X_1 = m - n(2+\alpha) + x,$$
$$X_0 = A + (n-m)(1+\alpha) - x(1+\alpha);$$

ferner dass

$$U_0 = n\varphi''(r) + [m - n(2+\alpha)]\varphi'(r) + [A + (n-m)(1+\alpha)]\varphi(r),$$
$$U_1 = \varphi'(r) - (1+\alpha)\varphi(r)$$

ist; so hat man zur Bestimmung von $\varphi(r)$ die Gleichung:

$$(r + n - \lambda)\varphi''(r) + [m - n(2+\alpha) - (1+\alpha)(r-\lambda)]\varphi'(r)$$
$$+ [A + (n-m)(1+\alpha)]\varphi(r) = 0,$$

welche sich für $\lambda = n$ vereinfacht und in

$$r\varphi''(r) + [m - n - r(1+\alpha)]\varphi'(r) + [A + (n-m)(1+\alpha)]\varphi(r) = 0$$

übergeht, und diese gibt, nach Liouville's Methode integrirt:

$$\varphi(r) = C_1 \frac{\partial^{m-n-1-\frac{A}{1+\alpha}}}{\partial r^{m-n-1-\frac{A}{1+\alpha}}}[r^{-\frac{A}{1+\alpha}} . e^{(1+\alpha)r}]$$

$$+ C_2 e^{(1+\alpha)r} \frac{\partial^{\frac{A}{1+\alpha}-1}}{\partial r^{\frac{A}{1+\alpha}-1}}[r^{n-m+\frac{A}{1+\alpha}} . e^{-(1+\alpha)r}].$$

Man hat daher

$$f(x) = \left\{ \frac{\partial^x \varphi(r)}{\partial r^x} \right\}_n,$$

unter $\varphi(r)$ den eben aufgeschriebenen Werth verstanden. Auch hier erfordert der specielle Fall $1+\alpha=0$ eine eigene Behandlung. Man hat nämlich in diesem Falle zur Bestimmung von $\varphi(r)$ die Gleichung

$$r\varphi''(r) + (m-n)\varphi'(r) + A\varphi(r) = 0,$$

welche integrirt

$$\varphi(r) = \frac{\partial^{m-n-1}}{\partial r^{m-n-1}}[C_1 e^{+2\sqrt{-Ar}} + C_2 e^{-2\sqrt{-Ar}}]$$

gibt.

Integration der Differenzen-Gleichung

$$a_2\Delta^2 y + a_1 \Delta y + (a_0 + x) y = 0. \qquad (18)$$

Selbe verwandelt sich für

$$y = f(x)$$

in

$$a_2 f(x+2) + (a_1 - 2a_2) f(x+1) + (a_2 - a_1 + a_0 + x) f(x) = 0;$$

die Gleichung zur Bestimmung von $\varphi(r)$ lautet

$$a_2\varphi''(r) + (a_1 - 2a_2 - \lambda + r)\varphi'(r) + (a_2 - a_1 + a_0)\varphi(r) = 0,$$

und vereinfacht sich für

$$\lambda = a_1 - 2a_2.$$

Das Integral der vereinfachten Gleichung ist sodann:

$$\varphi(r) = C_1 \frac{\partial^{a_2-a_1+a_0-1}}{\partial r^{a_2-a_1+a_0-1}}[e^{-\frac{r^2}{2a_2}}] + C_2 e^{-\frac{x^2}{2a_2}} \frac{\partial^{a_1-a_0-a_2}}{\partial r^{a_1-a_0-a_2}}[e^{\frac{r^2}{2a_2}}],$$

oder wenn man

wählt,

Es ist somit:

$$f(x)=\frac{1}{(m+x}$$

Integration d

$$n\Delta^2 y+(-n\alpha+$$

Setzt man

so erhält man:

$$nf(x+2)+[-n(2+$$

und setzt man wei

und beachtet, dass

$$X_2$$

$$X_1$$

$$X$$

ferner dass

$$U_0=n\varphi''(r)$$

$$U_1=\varphi'(r)-$$

ist; so hat man

$$(r+n-$$

welche sich f

$$)\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}.$$

$$y_3)-\tfrac{1}{2}(x_2-x_1)(y_1+y_2)-\tfrac{1}{2}(x_3-x_2)(y_2+y_3)$$

$$y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\},$$

-hergehenden:

$$V=\tfrac{1}{3}i(y_1+y_2+y_3)F.$$

beiden Fällen, also in völliger Allgemeinheit:

$$V=\tfrac{1}{3}i(y_1+y_2+y_3)F;$$

einem bekannten Satze, wenn u die Entfernung s des Dreiecks von der Axe bezeichnet,

$$u=\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$$

$$V=iuF.$$

r w den Weg des Schwerpunkts, so ist offenbar

$$V=wF.$$

jetzt ein Netz von Dreiecken, deren Flächenräume

$$F_0,\quad F_1,\quad F_2,\quad F_3,\ \ldots.\ F_n$$

und bezeichnen wir die Entfernungen der Schwer- Dreiecke von der Drehungsaxe respective durch

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3,\ \ldots.\ u_n,$$

les ganzen bei der Drehung von dem Dreiecksnetz n Körpers durch V; so ist nach dem Vorhergehen- seine aus dem Obigen bekannte Bedeutung behält,

$$F_0+u_1F_1+u_2F_2+u_3F_3+\ldots.+u_nF_n).$$

den Flächeninhalt des ganzen Dreiecksnetzes seines Schwerpunkts von der Axe, so ist werpunkte:

$$\frac{F_2+u_3F_3+\ldots.+u_nF_n}{{}_2+F_3+\ldots.+F_n},$$

und folglich das Integral der vorgelegten Gleichung:

$$f(x)=\left\{\frac{\partial^x\varphi(r)}{\partial r^x}\right\}_{a_1-2a_2}.$$

XXXII.

Miscellen.

Von dem Herausgeber.

Guldin's, übrigens schon dem Pappus bekannte Regel wird meistens mit Hülfe der Integralrechnung bewiesen; indess reicht zu ihrer Begründung die elementare Lehre vom Schwerpunkte völlig hin, dieselbe wird aber nach meiner Meinung, wo sie überhaupt in einer solchen elementaren Darstellung gegeben wird, nicht immer in geeigneter Weise gegeben. Deshalb, und weil die Regel, wenn auch jetzt nicht mehr von besonderer Wichtigkeit, doch in manchen Fällen der Praxis vortheilhafte Anwendung finden kann, will ich hier wieder an dieselbe erinnern und sie elementar begründen, wobei ich zugleich den Wunsch ausspreche, dass die Theorie des Schwerpunktes, als eines durch eine bestimmte Eigenschaft charakterisirten rein geometrischen Punktes, immer mehr und mehr Aufnahme in die reine Geometrie finden möge.

In Taf. III. Fig. 2. sei zuerst AB eine beliebige gerade Linie und MN eine mit dieser Geraden in einer Ebene liegende Axe. Dreht sich nun diese Ebene um die Axe MN, so wird, nach Vollendung einer ganzen Umdrehung, AB den Mantel eines abgestumpften Kegels beschrieben haben, dessen Flächeninhalt leicht auf folgende Weise gefunden wird. Bezeichnen wir die Abstände der beiden Endpunkte der Linie AB von der Axe MN durch R

und R', so dass der erstere der grössere Abstand ist, und denken uns den abgestumpften Kegel zu einem ganzen Kegel ergänzt, so ist, wenn S und S' die Seiten des ganzen und des von der Spitze aus abgeschnittenen Kegels bezeichnen, der Flächeninhalt des Mantels des abgestumpften Kegels bekanntlich:

$$(RS - R'S')\pi.$$

Es ist aber:

$$R:R' = S:S',$$

$$RS:R'S' = S^2:S'^2,$$

$$RS:RS-R'S' = S^2:S^2-S'^2 = S^2:(S-S')(S+S');$$

also, wenn s die Seite des abgestumpften Kegels bezeichnet:

$$R:RS-R'S' = S:s(S+S'),$$

und folglich

$$RS-R'S' = \frac{sR(S+S')}{S}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden der Flächeninhalt des Mantels des abgestumpften Kegels:

$$\frac{sR(S+S')}{S}\pi = s(R+\frac{RS'}{S})\pi = s(R+R')\pi.$$

Der Schwerpunkt der Geraden AB ist bekanntlich ihr Mittelpunkt, und folglich, wenn wir dessen Abstand von der Axe durch r bezeichnen, offenbar $R+R'=2r$, also $2rs\pi$ der Flächeninhalt des Mantels des abgestumpften Kegels.

Hat die Ebene, in welcher die Gerade AB liegt, keine ganze Drehung um die Axe MN vollendet, sondern nur einen durch den Winkel i bestimmten Theil einer ganzen Drehung, so ist offenbar der Flächeninhalt des entsprechenden Theils des Mantels des abgestumpften Kegels, wenn wir i in Theilen der Einheit ausgedrückt annehmen, $\frac{i}{2\pi}.2rs\pi = irs$. Nun ist aber offenbar ir der Weg, welchen bei der in Rede stehenden Drehung der Schwerpunkt von s beschrieben hat, also, wenn w diesen Weg bezeichnet, ws der Flächeninhalt des entsprechenden Theils des Mantels des abgestumpften Kegels, wo $s=AB$ ist.

Wenn, wie in Taf. III. Fig. 3. die Linie AB die Axe MN in C schneidet, wir $AC=s'$, $BC=s''$ setzen, und durch w' und w'' die Wege der Schwerpunkte von s' und s'' bezeichnen; so

sind nach dem Vorhergehenden die von s' und s'' beschriebenen Kegelmäntel respective $w's'$ und $w''s''$, oder, wenn i wieder den Drehungswinkel bezeichnet, und r' und r'' die Abstände der Schwerpunkte von s' und s'' von der Axe sind, $ir's'$ und $ir''s''$. Ist nun r der Abstand des Schwerpunkts der ganzen Linie $AB = s$ von der Axe, wobei wir diesen Abstand als positiv oder negativ betrachten wollen, jenachdem er links oder rechts von der Axe liegt; so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte:

$$r(s'+s'') = rs = r's' - r''s'',$$

also

$$irs = ir's' - ir''s'',$$

und folglich, wenn M' und M'' die von s' und s'' beschriebenen Kegelmäntel sind, w den Weg des Schwerpunkts der ganzen Linie s bezeichnet:

$$ws = M' - M''.$$

Hieraus wird sich mit völliger Deutlichkeit ergeben, wie man sich in allen ähnlichen Fällen zu verhalten hat, zugleich aber auch ganz von selbst der Grund erhellen, warum wir es, um nicht in unnütze Weitläufigkeiten zu verfallen, zweckmässig finden müssen, im Folgenden alle Linien und Figuren, durch deren Drehung um eine Axe wir uns Flächen und Körper entstanden denken, auf einer Seite der Drehungsaxe liegend anzunehmen, was deshalb hier ein für alle Mal bemerkt wird.

Haben wir nun eine beliebige gebrochene Linie, die ganz in einer Ebene liegt und aus den einzelnen geradlinigen Theilen

$$s_0, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3, \ldots . \; s_n$$

besteht, und denken uns die in Rede stehende Ebene um eine gewisse Axe gedreht, so ist, wenn

$$w_0, \quad w_1, \quad w_2, \quad w_3, \ldots . \; w_n$$

die bei dieser Drehung von den Schwerpunkten der einzelnen Geraden

$$s_0, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3, \ldots . \; s_n$$

beschriebenen Wege bezeichnen, der Inhalt der von der gebrochenen Linie beschriebenen Fläche nach dem Vorhergehenden:

$$s_0w_0 + s_1w_1 + s_2w_2 + s_3w_3 + \ldots . + s_nw_n;$$

oder, wenn i der Drehungswinkel ist, und

$$r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$$

die Abstände der Schwerpunkte von

$$s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$$

von der Drehungsaxe sind:

$$i(r_0s_0 + r_1s_1 + r_2s_2 + r_3s_3 + \ldots + r_ns_n).$$

Ist nun r der Abstand des Schwerpunkts der ganzen gebrochenen Linie, welche wir durch s bezeichnen wollen, wo also

$$s = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n$$

ist, von der Axe; so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte:

$$rs = r_0s_0 + r_1s_1 + r_2s_2 + r_3s_3 + \ldots + r_ns_n;$$

also nach dem Vorhergehenden irs, oder, wenn w den Weg des Schwerpunkts der ganzen gebrochenen Linie bezeichnet, sw der Inhalt der von der ganzen gebrochenen Linie beschriebenen Fläche.

Denkt man sich eine krumme Linie aus unendlich vielen unendlich kleinen geradlinigen Elementen bestehend, so übersieht man auf der Stelle, dass der im Vorhergehenden für beliebige gebrochene Linien bewiesene Satz auch ganz allgemein für alle krummen Linien gilt.

Dass man sich dieses Satzes auch häufig umgekehrt zur Bestimmung der Lage des Schwerpunkts krummer Linien zweckmässig bedienen kann, ist klar. Dreht sich z. B. ein Halbkreis, dessen Halbmesser ϱ sein mag, um seinen Durchmesser, so ist nach den Lehren der Elementar-Geometrie $4\varrho^2\pi$ der Inhalt der von demselben beschriebenen Kugelfläche. Ist nun u die Entfernung seines Schwerpunkts von der Drehungsaxe, so ist der Weg des Schwerpunkts $w = 2u\pi$, die Länge des Halbkreises ist aber $s = \varrho\pi$. Weil nach dem im Obigen bewiesenen Satze sw der Inhalt der beschriebenen Kugelfläche ist, so ist

$$\varrho\pi . 2u\pi = 2\varrho u\pi^2 = 4\varrho^2\pi,$$

woraus sich $u = \frac{2\varrho}{\pi}$ ergiebt, was auch aus der anderweitig längst bekannten Bestimmung des Schwerpunkts jedes Kreisbogens folgt.

In Taf. III. Fig. 4. sei jetzt ABC ein beliebiges Dreieck und MN eine in dessen Ebene liegende Axe, um welche wir uns die Ebene des Dreiecks gedreht denken; MN nehme man als x-Axe und O als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der

xy an, und bezeichne die Coordinaten der drei Spitzen A, B, C des Dreiecks in diesem Systeme respective durch x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3. Der Drehungswinkel sei i und V sei das Volumen des bei der Drehung von dem Dreieck ABC beschriebenen Körpers, der Flächeninhalt dieses Dreiecks aber werde durch F bezeichnet.

In dem ersten der beiden in der Figur dargestellten Fälle ist offenbar nach der aus der elementaren Stereometrie bekannten Formel für den Inhalt des abgestumpften Kegels, wenn i in Theilen der Einheit ausgedrückt angenommen wird:

$$\begin{aligned}V= &\tfrac{1}{6}i(x_2-x_1)(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)\\ &+\tfrac{1}{6}i(x_3-x_2)(y_2^2+y_2y_3+y_3^2)\\ &-\tfrac{1}{6}i(x_3-x_1)(y_1^2+y_1y_3+y_3^2),\end{aligned}$$

also, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}V= &\tfrac{1}{6}ix_1\{y_1(y_3-y_2)+(y_3^2-y_2^2)\}\\ &+\tfrac{1}{6}ix_2\{y_2(y_1-y_3)+(y_1^2-y_3^2)\}\\ &+\tfrac{1}{6}ix_3\{y_3(y_2-y_1)+(y_2^2-y_1^2)\},\end{aligned}$$

und folglich:

$$V=\tfrac{1}{6}i(y_1+y_2+y_3)\{x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}F&=\tfrac{1}{2}(x_2-x_1)(y_1+y_2)+\tfrac{1}{2}(x_3-x_2)(y_2+y_3)-\tfrac{1}{2}(x_3-x_1)(y_1+y_3)\\ &=\tfrac{1}{2}\{x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\},\end{aligned}$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$V=\tfrac{1}{3}i(y_1+y_2+y_3)F.$$

In dem zweiten der beiden in der Figur dargestellten Fälle ist auf ähnliche Weise:

$$\begin{aligned}V= &\tfrac{1}{6}i(x_3-x_1)(y_1^2+y_1y_3+y_3^2)\\ &-\tfrac{1}{6}i(x_2-x_1)(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)\\ &-\tfrac{1}{6}i(x_3-x_2)(y_2^2+y_2y_3+y_3^2),\end{aligned}$$

also, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}V= &\tfrac{1}{6}ix_1\{y_1(y_2-y_3)+(y_2^2-y_3^2)\}\\ &+\tfrac{1}{6}ix_2\{y_2(y_3-y_1)+(y_3^2-y_1^2)\}\\ &+\tfrac{1}{6}ix_3\{y_3(y_1-y_2)+(y_1^2-y_2^2)\},\end{aligned}$$

und folglich:

$$V = \tfrac{1}{6}i(y_1 + y_2 + y_3)\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}.$$

Nun ist aber

$$F = \tfrac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_1 + y_3) - \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2) - \tfrac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_2 + y_3)$$
$$= \tfrac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$V = \tfrac{1}{3}i(y_1 + y_2 + y_3)F.$$

Folglich ist in beiden Fällen, also in völliger Allgemeinheit:

$$V = \tfrac{1}{3}i(y_1 + y_2 + y_3)F;$$

und da nun nach einem bekannten Satze, wenn u die Entfernung des Schwerpunkts des Dreiecks von der Axe bezeichnet,

$$u = \tfrac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

ist; so ist

$$V = iuF.$$

Bezeichnet aber w den Weg des Schwerpunkts, so ist offenbar $w = iu$, also

$$V = wF.$$

Haben wir jetzt ein Netz von Dreiecken, deren Flächenräume

$$F_0,\ F_1,\ F_2,\ F_3, \ldots . F_n$$

sein mögen, und bezeichnen wir die Entfernungen der Schwerpunkte dieser Dreiecke von der Drehungsaxe respective durch

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots .\ u_n,$$

den Inhalt des ganzen bei der Drehung von dem Dreiecksnetz beschriebenen Körpers durch V; so ist nach dem Vorhergehenden, wenn i seine aus dem Obigen bekannte Bedeutung behält, offenbar:

$$V = i(u_0F_0 + u_1F_1 + u_2F_2 + u_3F_3 + \ldots . + u_nF_n).$$

Bezeichnet aber F den Flächeninhalt des ganzen Dreiecksnetzes und u die Entfernung seines Schwerpunkts von der Axe, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte:

$$u = \frac{u_0F_0 + u_1F_1 + u_2F_2 + u_3F_3 + \ldots . + u_nF_n}{F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \ldots . + F_n},$$

also, weil offenbar

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n$$

ist,

$$u_0 F_0 + u_1 F_1 + u_2 F_2 + u_3 F_3 + \ldots + u_n F_n = uF,$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$V = iuF,$$

oder, wenn wieder w den Weg des Scherpunkts des Netzes bezeichnet:

$$V = wF.$$

Weil man sich jede krummlinige Figur als ein Netz unendlich vieler unendlich kleiner dreieckiger Elemente denken kann, so ist klar, dass vorstehende Gleichung auch für alle krummlinigen Figuren gilt, und wir können daher jetzt den folgenden allgemeinen Satz aussprechen:

Wenn eine beliebige Linie oder Figur in einer Ebene ganz auf einer Seite einer in derselben Ebene liegenden Geraden oder Axe liegt, und um diese Axe die Ebene um einen beliebigen Winkel gedreht wird; so wird der Inhalt der von der in Rede stehenden Linie beschriebenen Fläche oder des von der in Rede stehenden Figur beschriebenen Körpers immer dargestellt durch das Product aus der Länge der Linie oder dem Inhalte der Figur in den Weg, welchen ihr Schwerpunkt bei der Drehung der Ebene beschrieben hat.

Hat z. B. eine Ellipse, deren Halbaxen a, b sein mögen, um eine Axe eine ganze Drehung vollendet, wodurch ein Ring entstanden ist, und bezeichnet u den Abstand des Mittelpunkts der Ellipse von der Drehungsaxe; so ist, da $ab\pi$ bekanntlich der Flächeninhalt der Ellipse ist, nach dem obigen Satze $ab\pi . 2u\pi = 2abu\pi$ der körperliche Inhalt des Ringes, und wenn E den Umfang der Ellipse bezeichnet, so ist $2Eu\pi$ die Oberfläche des Ringes.

Aehnliche Beispiele würden sich leicht mehrere geben lassen, was aber hier nicht nöthig ist.

Zwei Beweise für die im Archiv. Thl. XXXI. Heft 4. S. 477. mitgetheilte Construction der mittleren Proportionale.

Von Herrn A. Krüger, Director der königl. Realschule zu Fraustadt.

I. Man denke sich CE (Taf. III. Fig. 5.) gezogen und von E auf AB das Perpendikel EF gefällt, welches AB in F halbiren wird; dann ist

$$\overline{EF}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AF}^2 = \overline{CE}^2 - \overline{CF}^2,$$

d. h.

$$\overline{AE}^2 - \frac{b^2}{4} = a^2 - (a - b + \frac{b}{2})^2$$

$$= a^2 - a^2 - \frac{b^2}{4} + ab,$$

also:

$$\overline{AE}^2 = ab.$$

II. Nach der Construction sind die beiden Dreiecke ACE und AEB gleichschenklig, und folglich, da sie den Basiswinkel BAE gemein haben, einander ähnlich; mithin ist:

$$AC : AE = AE : AB,$$

d. h.

$$a : AE = AE : b.$$

Anmerkung. Wäre auch $\Delta\, BCE$ gleichschenklig, d. h. $BE = BC$, so wäre in Verbindung mit dem Vorigen:

$$AC : BC = BC : AB,$$

also die Gerade AC in B nach dem goldenen Schnitte getheilt. Noch erlaube ich mir zu bemerken, dass die von Gouzy mitgetheilte Construction schon in dem durch seine litterar-historischen Anmerkungen ausgezeichneten Lehrbuche der Geometrie von Kunze. Jena 1842. S. 176. angegeben und ein Beweis durch die Aehnlichkeit rechtwinkliger Dreiecke geführt wird.

Von dem Herausgeber.

In Taf. III. Fig. 6. sei P ein beliebiger Punkt einer mit den beiden Halbaxen a, b um den Mittelpunkt C beschriebenen Ellipse, dessen Coordinaten CQ, PQ wir wie gewöhnlich durch x, y bezeichnen wollen. Legt man nun durch P eine, die beiden,

nöthigenfalls gehörig verlängerten Axen in A' und B' schneidende Gerade $A'B'$, und setzt $PA'=u$, $PB'=v$, $QA'=w$; so ist

$$w:x=u:v, \text{ also } v=\frac{ux}{w}.$$

Nun ist aber

$$w=\sqrt{u^2-y^2}=\sqrt{u^2-\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}=\frac{\sqrt{a^2(u^2-b^2)+b^2x^2}}{a},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$v=\frac{aux}{\sqrt{a^2(u^2-b^2)+b^2x^2}},$$

aus welcher Formel sich ergiebt, dass, wenn die Linie $A'B'$ so gezogen wird, dass $u=b$ ist, dann jederzeit $v=a$, folglich $A'B'=a+b$ ist.

Dieser Eigenschaft der Ellipse kann man sich bedienen, um, wenn mit zwei gegebenen Axen eine Ellipse gezeichnet werden soll, schnell mehrere Punkte derselben in beliebiger Anzahl zu finden. Sind nämlich a, b die beiden gegebenen Halbaxen, so ziehe man zwei in dem Punkte C auf einander senkrecht stehende Linien xx_1 und yy_1, nehme in yy_1 einen beliebigen Punkt B' an, dessen Entfernung von der Linie xx_1 nicht grösser als $a+b$ ist, setze den Zirkel in B' ein und beschreibe mit dem Halbmesser oder der Zirkelöffnung $a+b$ einen Kreisbogen, welcher die Linie xx_1 in den beiden Punkten A' und A_1' schneiden wird. Hierauf ziehe man die Linien $A'B'$ und $A_1'B'$, und schneide auf denselben von B' aus die Stücke $B'P=a$ und $B'P_1=a$ ab, so sind P und P_1 zwei Punkte der zu beschreibenden Ellipse.

Die weitere Ausführung dieser Construction, die übrigens, wie leicht in die Augen fällt, mehrfache Modificationen zulässt, zeigt Taf. III. Fig. 7. deutlich. Man sieht aus dieser Figur auch ohne Weiteres, wie man durch Zusammenfügung von vier Linealen zu einem verschiebbaren Rhombus sich ein einfaches Instrument zur Beschreibung aller Arten von Ellipsen bilden kann. Ob sich die Sache schon anderweitig findet, weiss ich nicht.

Physische Zusammenkünfte der 42 ersten *) kleinen Planeten während der nächsten Jahre.

Von
Herrn *Karl von Littrow*,
wirklichem Mitgliede der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

(Aus dem Decemberhefte des Jahrgangs 1857 der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien [Bd. XXVII. S. 523.] besonders abgedruckt.)

(Auszug aus einer für die Denkschriften bestimmten Abhandlung.)

Die hier vorliegende Aufgabe theilt sich ihrer Natur nach in zwei Theile: zuerst sind die Orte aufzusuchen, in welchen die Bahnen der betrachteten Himmelskörper einander besonders nahe kommen, dann die Zeiten zu bestimmen, zu welchen je zwei Planeten in diesen Bahnnähen zusammentreffen.

Den ersten Theil des Problemes habe ich auf graphischem Wege im wesentlichen auf dieselbe Art zu lösen gesucht, die ich in einer früher bekannt gemachten Arbeit (Jahrgang 1854, Jännerheft dieser Sitzungsberichte) über die Bahnnähen von periodischen Gestirnen unseres Sonnensystems befolgte.

Es fanden sich so zwischen den hier in Untersuchung gezogenen 42 Asteroiden 549 Bahnnähen mit Distanzen unter 0·1 der halben grossen Erdbahnaxe, darunter 157 von besonderer Enge, etwa 0·02 Distanz und darunter. Je zwei Bahnen näherten sich einander an z w e i Punkten in 109 Fällen.

Die Vervollkommnung der Zeichnungen, welche der Arbeit zu Grunde lagen, erlaubte den Ort der Bahnnähe im Raume vollständig anzugeben, und sich so zu überzeugen, dass irgend besondere Vertheilungen derselben nicht stattfinden.

Für die nach solcher vorläufigen Kenntniss der Bahnnähen nun weiter nothwendige genauere Sichtung derselben auf dem Wege der Rechnung habe ich nebst den bekannten Näherungsmethoden, welche dem eigentlichen Minimum der Bahndistanz die gegenseitige Entfernung der beiden Curven in der gemeinschaftlichen Knotenlinie oder in dem Breitenkreise der Bahnnähe substituiren, eine Weise angegeben, wie man ohne zu grosse Weitläufigkeit die kürzeste Distanz selbst finden könne, zog es jedoch vor, diesen Gang der Untersuchung nicht einzuschlagen, sondern

*) Durch die in Kreise eingeschlossenen Zahlen 1 bis 42 bezeichnet.

jene Sichtung mit dem zweiten Theile der Aufgabe zu verbinden, also gleich auf die Bestimmung der Durchgangszeiten je zweier Planeten durch ihre bezüglichen Bahnnähen überzugehen, eine Arbeit, die für den grössten Theil der Combinationen mit Bahnnähen jedenfalls durchzuführen ist, und die ganz ebenso wie die Grösse der Distanz über das Interesse entscheidet, welches einer Bahnnähe zukommt. Sechs der betrachteten Planeten: Daphne, Harmonia, Isis, Laetitia, Leda und Leucothea fügten sich dieser Behandlungsweise nicht, da ihre Elemente für eine solche Vorausbestimmung noch zu wenig genau bekannt sind, und mussten der empirischen Vergleichung von Ephemeriden vorbehalten bleiben. Von den übrigen 36 Himmelskörpern wurden die Differenzen der Durchgangszeiten durch die betreffenden Bahnnähen Umlauf für Umlauf bis zum Ende des laufenden Jahrhunderts bestimmt, und einstweilen diejenigen Combinationen herausgehoben, bei welchen Zusammenkünfte während der nächsten 10 Jahre (1858—1867) zu erwarten sind. Ich fand im Ganzen 19 solcher Fälle. Die näheren Modalitäten von Zusammenkünften der Asteroiden lassen sich aus bekannten Gründen immer nur für die nächste Erscheinung angeben. So hat man für das Jahr 1858:

	gegenseitige Distanz.	*Zeit der Zusammenkunft.*
Euterpe-Lutetia	0·0395	October 20.
Bellona-Metis	0·0684	November 7.—9.
Polyhymnia-Vesta	0.1469	November 17.—19.
Egeria-Laetitia	0·1238	December 15.—16.

sämmtlich, wie man sieht, noch zu grosse Distanzen, als dass man irgend besonderen Wirkungen dieser Zusammenkünfte entgegensehen dürfte. Da ich aber von 1867 bis 1900 noch beiläufig 50 Zusammenkünfte auffand, so kann man der Hoffnung Raum geben, in nicht zu ferner Zukunft einem wirklich merkwürdigen Phänomene dieser Art zu begegnen.

Ich hatte die Arbeit, deren Ergebnisse hier kurz angedeutet wurden, völlig beendigt, als mir von Herrn C. Linsser in Sonneberg bei Coburg eine Behandlung des ersten Theiles vorliegenden Problemes für dieselben 42 Asteroiden zuging, die sich von meinem Standpunkt dadurch wesentlich unterscheidet, dass Herr Linsser lediglich auf dem Wege der Rechnung die Bahnnähen aufsucht. Er entwirft nämlich für sämmtliche Planeten Tafeln, die von 5° zu 5° der Länge den Radius Vector und die Breite des Planeten geben. Die Vergleichung zweier solcher Tafeln lehrt ihn beiläufig die Punkte kennen, in welchen zwei Bahnen einander nahe liegen. Durch die Bestimmung der Distanz entwe-

der in der gemeinsamen Knotenlinie oder in einem jenen Punkten naheliegenden Breitenkreise entscheidet er dann, ob eine wirkliche Bahnnähe innerhalb der angenommenen Grenze 0·1 stattfindet. Die Vergleichung seiner Arbeit, welche er mir in meine Abhandlung auszugsweise aufzunehmen gestattete, mit meinen Resultaten zeigt eine im allgemeinen befriedigende Uebereinstimmung, beweist aber zugleich, dass, wie ich von vornherein vermuthete, jene beiden abkürzenden Voraussetzungen eine Menge merkwürdiger Fälle übergehen lassen. Herr Linsser hat so 123, mitunter sehr enge Bahnnähen, die ich aufführe, nicht, während in meiner Zusammenstellung keine der bei ihm vorkommenden fehlt.

Ueber ein merkwürdiges Neben-Sonnen-Phänomen.

Beobachtet zu Culm a. d. W. am 21sten April 1856 von Herrn Kuhse, damals Lehrer an der Realschule zu Culm, jetzt Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaft am Gymnasium zu Lyck.

(M. s. Taf. III. Fig. 8.)

Um die Sonne als Mittelpunkt zeigten sich zwei ziemlich vollständige Kreise von etwa $22\frac{1}{2}^0$ und 45^0 Halbmesser, von denen der kleinere sehr viel schwächer als der andere war, auch mit Ausnahme seines obersten Theiles ohne Regenbogenfarben. Die Nebensonnen im kleineren Kreise waren äusserst glänzend, nach der Sonne zu roth, nach aussen hin blendend weiss. Der zugehörige Berührungsbogen hatte nur wenige Grade. Der zweite Kreis um die Sonne war nach Süden und Osten hin fast vollständig ausgebildet, etwa $\frac{3}{4}$ so breit, wie der gewöhnliche Regenbogen, und glänzte hier, wenn auch nicht überall gleich lebhaft, in den schönsten Regenbogenfarben. Sein Berührungsbogen umfasste fast einen Halbkreis und war sehr deutlich ausgebildet. Der Mittelpunkt beider Berührungsbogen lag scheinbar im Zenith. Die Lage der fünf Nebensonnen erhellt aus der Figur. Die weisse Nebensonne im Süden hatte nur sehr matten Glanz; die beiden in SO. und NW. waren hellglänzend. Die letzteren beiden gehörten ihrer Lage nach einem dritten concentrischen Kreise um die Sonne an, dessen Halbmesser 90^0 betrug; von diesem Kreise selbst aber war nichts zu bemerken. Die einzelnen Theile des Phänomens verschwanden nach und nach, zuletzt die beiden farbigen Nebensonnen.

Nach einem Berichte aus Bromberg ist das Phänomen dort lange nicht so vollständig gesehen worden, wie hier in Culm.

Von dem Herausgeber.

Wenn die Linie AB (Taf. III. Fig. 9.) in C nach dem äusseren und mittleren Verhältnisse getheilt ist, über AB als Durchmesser ein Halbkreis beschrieben und in C auf AB ein Perpendikel errichtet wird, welches den Halbkreis in D schneidet, so ist, wenn BC der grössere der beiden Theile AC und BC ist, immer $AD = BC$.

Weil nämlich AB in C nach dem äusseren und mittleren Verhältnisse getheilt und BC der grössere Theil ist, so ist

$$AC:BC = BC:AB.$$

Nun ist aber:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2, \quad \overline{CD}^2 = AC.BC;$$

also:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + AC.BC = AC.(AC+BC) = AC.AB,$$

folglich, weil nach dem Obigen

$$AB = \frac{\overline{BC}^2}{AC}$$

ist:

$$\overline{AD}^2 = \frac{AC.\overline{BC}^2}{AC} = \overline{BC}^2, \quad AD = BC, \text{ w. z. b. w.}$$

Diesen Satz habe ich aus J. Kepleri, Astronomi, Opera omnia edidit Ch. Frisch. Volumen I. Pars I. p. 35. entlehnt. Ist derselbe noch nicht bekannt, was ich nicht weiss, so kann er eine leichte Uebungsaufgabe abgeben.

Zöge man BD, so wäre

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + AC.BC = BC.(AC+BC) = BC.AB,$$

also nach dem Obigen:

$$\overline{BD}^2 = \frac{BC.\overline{BC}^2}{AC} = \frac{\overline{BC}^3}{AC}.$$

Berichtigung.

Thl. XXX. S. 353. Z. 3. v. u. statt „eingeschrieber" setze man „eingeschriebener."

Thl. XXXI. S. 217. und S. 218. setze man überall Heis statt Heiss.

Statt der Seitenzahl „454" in Thl. XXXI. steht fälschlich „444."

Thl. XXXI. S. 244. Z. 17. statt „einfache" s. m. „einfach."

Thl. XXXII. S. 140. Z. 12. v. u. statt „ihm" setze man „ihn."

XXXIII.

Neue Methode zur Entwerfung perspectivischer Zeichnungen, nebst einer streng wissenschaftlichen Darstellung der Perspective überhaupt.

Von
dem Herausgeber.

Einleitung.

Die Perspective ist eine der ältesten mathematischen Wissenschaften, und verdankt ihre Entstehung den zeichnenden und architektonischen Künsten, so wie die ebene, sphärische, sphäroidische und loxodromische Trigonometrie ihre Entstehung der Geodäsie, Astronomie und Nautik verdanken. An Bearbeitern der Perspective hat es daher auch unter Malern und Architekten zu keiner Zeit gefehlt, und mehrere berühmte Mathematiker haben dieser Wissenschaft ihre Kräfte gewidmet. Aber ungeachtet dieser vielfachen, seit dem ersten, mehr wissenschaftlichen, jedoch ungedruckt gebliebenen Tractat von Leonardo da Vinci, auf den er sich in seinem Werke über die Malerei, welches lange nach seinem Tode herausgekommen ist, häufig bezieht, oft wiederholten Bearbeitungen, steht die Perspective immer noch auf der Stufe der Kindheit, und lässt sowohl in Bezug auf wahre wissenschaftliche Behandlung, als auch auf die Allgemeinheit der Methoden, nach denen sie ihre graphischen Darstellungen ausführt, noch sehr Vieles, ja fast Alles zu wünschen übrig. Einen bedeutenden Schritt vorwärts hat indess jedenfalls im Jahre 1820 der Engländer Farisch gethan, welcher zuerst den gewiss sehr glücklichen und fruchtbaren Gedanken fasste, den graphischen Darstellungen der Perspective, wenn auch freilich in sehr beschränktem Sinne, ein eigenthümliches System perspectivischer Coordinaten zu Grunde zu legen, woraus gegenwärtig die freilich mit dem nicht eben glücklich gewählten Namen „Axonometrie“ oder

„Axonometrische Projections-Methode“ belegte graphische Darstellungsmethode hervorgegangen ist, welche jetzt so häufig bei der Zeichnung von Maschinen und anderen Gegenständen in Anwendung gebracht wird. Aber der von dem Erfinder dieser jedenfalls sehr verdienstlichen Methode und allen seinen Nachfolgern festgehaltene Gesichtspunkt ist viel zu eingeschränkt, und hat bis jetzt der eigentlichen Perspective gar keine Frucht getragen; denn bei den sogenannten axonometrischen Darstellungen wird, wie man gewöhnlich sagt, das Auge des Beschauers in eine unendlich grosse Entfernung von der Tafel versetzt, diese Darstellungen liefern eigentlich gar nichts weiter, als die orthographischen Projectionen der abzubildenden Gegenstände auf der Tafel, und bieten vor anderen Zeichnungsmethoden dieser Projectionen dem Zeichner in der That eigentlich nur den Vortheil dar, dass er bei jeder Lage der Tafel gegen den abzubildenden Gegenstand die Zeichnung ziemlich mit gleicher Leichtigkeit auszuführen im Stande ist. Ich habe mich daher seit längerer Zeit damit beschäftigt, den glücklichen Gedanken von Farisch für die Perspective im Allgemeinen fruchtbar zu machen, und will, wie mir dies gelungen und von welchen Grundansichten ich dabei ausgegangen, bevor ich zu der Ausführung im Einzelnen übergehe, zuerst in der Kürze in einigen allgemeinen Umrissen darlegen.

Die Perspective ist eine in den weiten Kreis der Anwendung der Mathematik gehörende Wissenschaft. So wie die Geodäsie, muss sie allen ihren Operationen gewisse, durch unmittelbare Messung gewonnene und allein nur zu gewinnende Data zu Grunde legen, welche, mögen sie nun Linien oder Winkel sein, jederzeit, durch eine gewisse Maass-Einheit ausgedrückt, in Zahlen gegeben sein werden. Wenn nun auch die Operationen der Perspective selbst eigentlich ganz graphischer Natur sind, so hat sie dies doch insofern ganz mit der Geodäsie gemein, dass, wie in dieser die Anfertigung eines Plans oder Risses der orthographischen Projection des abzubildenden Gegenstandes auf einer horizontalen Ebene, welcher eine der orthographischen Projection nach geometrischen Begriffen ähnliche Figur ist, als letzter und eigentlicher Zweck sich ergiebt, auch ihre Absicht lediglich auf die Entwerfung eines, freilich auf ganz anderen Grundsätzen, die hier füglich im Allgemeinen als bekannt vorausgesetzt werden können, beruhenden Plans oder Risses des abzubildenden Gegenstandes gerichtet ist. Man weiss, mit wie grossem Vortheil für die Genauigkeit die Pläne der Geodäsie jetzt vielfach mit Hülfe rechtwinkliger Coordinaten, die ganz der orthographischen Projectionsmethode und den geodätischen Operationen überhaupt entsprechen, entworfen werden, welche Coordinaten aber in allen Fällen erst

aus den durch unmittelbare Messung gewonnenen Daten berechnet, und dann nach einem gewissen verjüngten Maassstabe mit aller nur möglichen Genauigkeit aufgetragen werden müssen, woraus dann nach und nach der ganze zu entwerfende Riss oder Plan hervorgeht. Eine ganz ähnliche Methode muss nach meiner Meinung, unter Zugrundelegung eines anderen zweckentsprechenden Coordinatensystems, bei der Anfertigung aller perspectivischen Risse oder Pläne befolgt werden, wenn die Perspective überhaupt auf den Namen einer mathematischen Wissenschaft soll Anspruch machen dürfen. Erstens müssen also jederzeit gewisse Data durch unmittelbare Messung mit den dazu geeigneten Instrumenten, aber unter Anwendung einer möglichst geringen Anzahl von Hülfsmitteln, gewonnen werden; und ich werde im Folgenden namentlich zeigen, dass dazu blosse, aus einem einzigen Standpunkte, dem Orte des Auges, vorgenommene Winkelmessungen völlig ausreichen, so dass künftighin vielleicht ein kleiner zweckmässig, aber keineswegs von der gewöhnlichen Construction wesentlich abweichend eingerichteter Theodolit das beste und bequemste Instrument zur Gewinnung aller bei der Ausführung perspectivischer Zeichnung nothwendigen Data sein dürfte. Zweitens muss auf der, zur Aufnahme der Zeichnung bestimmten Tafel, deren Lage im Raume natürlich auf eine gewisse Weise vollkommen bestimmt sein muss, ein zweckentsprechendes Coordinatensystem angenommen und mit Hülfe einiger vorher auszuführenden einfachen Rechnungen, oder auch bloss mittelst graphischer Metdoden, genau verzeichnet werden, auf welches die mittelst möglichst einfacher Formeln aus den durch Messung gewonnenen Daten berechneten perspectivischen Coordinaten der zu entwerfenden Punkte zu beziehen sind und nach einem genauen Maassstabe aufgetragen werden müssen. Drittens müssen endlich aus diesen aufgetragenen Coordinaten mittelst einer besonderen Construction durchaus bloss auf graphischem Wege die perspectivischen Projectionen der abzubildenden Punkte gewonnen werden. — Auf diesem Wege werden, sehr zum Vortheil möglichster Genauigkeit, Rechnung und Zeichnung zweckmässig mit einander verbunden, und man schliesst sich ganz der Methode an, welche gegenwärtig als die einfachste und genaueste bei der Entwerfung geodätischer Pläne oder Risse immer mehr und mehr anerkannt wird und sich immer mehr und mehr Geltung in der Praxis verschafft; die Perspective selbst aber wird nach meiner Meinung erst auf diesem Wege zu einer wirklichen praktischen mathematischen Wissenschaft erhoben, ein Name, auf den sie bisher gewiss nicht Anspruch machen durfte. Bemerken will ich noch, dass man nicht selten die Meinung aussprechen hört, die

Operationen der Perspective seien durchaus graphischer Natur, sie müsse sich daher der Rechnung ganz entschlagen, und zu allen ihren Resultaten bloss durch geometrische Constructionen gelangen. Dies ist aber, wenigstens im Sinne der reinen Geometrie, der man die Perspective gern einverleiben möchte, geradezu unmöglich. Denn in jener Wissenschaft werden alle der Auflösung der verschiedenen Aufgaben zu Grunde zu legenden Data wirklich verzeichnet oder construirt vorliegend, nie in Zahlen, in einem bestimmten Maasse ausgedrückt, gegeben gedacht, wo dann freilich Lineal und Zirkel zur Auflösung aller Aufgaben hinreichen; die Perspective als solche ist aber eine praktische Wissenschaft und will nichts Anderes sein; die ihren Zeichnungen zu Grunde zu legenden Data können nur durch unmittelbare Messung mit Maassstab und Winkelmesser, oder mit letzterem allein, gewonnen werden, und bei deren Benutzung für die zu entwerfende Zeichnung wird man also immer wieder den verjüngten Maassstab und den Transporteur zur Hand nehmen müssen, was die damit aufzutragenden Grössen wiederum in, unter allen Umständen am Besten und Einfachsten auf dem Wege der Rechnung zu erhaltenden Zahlen gegeben voraussetzt, wodurch jedenfalls ein wesentlicher Unterschied zwischen diesen und den rein geometrischen Constructionen bedingt wird. Daher führt, *eben so* wie in der Geodäsie, auch in der Perspective eine Verbindung der Rechnung und Zeichnung zu der besten, der einfachsten und genauesten Methode; was mittelst des verjüngten Maassstabes und des Transporteurs aufgetragen werden muss, muss vorher auf dem Wege der Rechnung erhalten werden; bei Allem, wobei zum Auftragen Lineal und Zirkel genügen, ist die Rechnung gänzlich zu vermeiden und bloss die Construction in Anwendung zu bringen.

Was ich vorher nur ganz in allgemeinen Umrissen dargelegt habe, werde ich nun im Einzelnen entwickeln, und werde dabei alle Formeln und Gleichungen in grösster Allgemeinheit zu gewinnen suchen, was zwar für den nächsten, hier zu erreichenden Zweck nicht unbedingt erforderlich, aber nothwendig ist, wenn man zugleich zu den Grundlagen gelangen will, welche ein leichtes, noch weiteres Fortschreiten auf dem im Folgenden vorgezeichneten Wege möglich machen.

Im Allgemeinen bezwecke ich aber, um dies nochmals *mit* Bestimmtheit hervorzuheben, durch die folgende Abhandlung der Perspective eine solche, theoretisch und praktisch, wissenschaftliche Form zu geben, welche es möglich macht, durch geeignete Messungen mit zweckmässigen Instrumenten perspectivische Risse

oder Pläne von gegebenen Objecten mit derselben Sicherheit auf dem Wege der Rechnung und Zeichnung zu entwerfen, wie die Geodäsie die ihren Zwecken entsprechenden Risse oder Pläne zu entwerfen lehrt, die Perspective also zu derselben Vollkommenheit zu erheben, wie sie die Geodäsie schon längst besitzt.

§. 1.

Ort des Auges.

Bestimmung der Lage der Tafel.

Allen unseren Untersuchungen ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz zu Grunde legend, werden wir im Folgenden den Ort des Auges immer durch (FGH) bezeichnen, so dass also F, G, H die Coordinaten des Auges in Bezug auf das angenommene rechtwinklige Coordinatensystem der xyz sind.

Die Lage der Tafel kann auf sehr verschiedene Arten bestimmt werden, von denen jedoch im Folgenden hauptsächlich nur zwei Anwendung finden sollen, die wir daher jetzt etwas näher erläutern wollen.

Im Allgemeinen hat die Gleichung der Tafel die Form

1) . . . . . $Ax+By+Cz+D=0.$

Sind nun aber a, b, c die Coordinaten eines gegebenen Punktes, durch welchen die Tafel gelegt ist, so ist

$$Aa+Bb+Cc+D=0,$$

und die Gleichung der Tafel erhält die folgende Form:

2) . . . $A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0.$

Bezeichnen ferner a', b', c' die Coordinaten eines anderen Punktes und λ, μ, ν die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der eine der beiden von dem Punkte $(a'b'c')$ ausgehenden Theile einer durch diesen Punkt gelegten, auf der Tafel senkrecht stehenden Geraden respective mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst; so sind

3) . . . . . $\dfrac{x-a'}{\cos\lambda}=\dfrac{y-b'}{\cos\mu}=\dfrac{z-c'}{\cos\nu}$

die Gleichungen dieser Geraden, und weil dieselbe auf der Tafel senkrecht steht, so hat man nach den Lehren der analytischen Geometrie die Gleichungen

4) . . . . $\frac{A}{\cos\lambda}=\frac{B}{\cos\mu}=\frac{C}{\cos\nu}$,

woraus sich nach 2) als Gleichung der Tafel die Gleichung

5) . . . $(x-a)\cos\lambda+(y-b)\cos\mu+(z-c)\cos\nu=0$

ergiebt, unter welcher Form wir die Gleichung der Tafel im Folgenden meistens in Anwendung bringen werden.

Obgleich es an sich willkührlich ist, auf welchen der beiden von dem Punkte $(a'b'c')$ ausgehenden Theile der in Rede stehenden Geraden die Winkel λ, μ, ν sich beziehen, so wollen wir grösserer Bestimmtheit wegen dazu doch immer den Theil dieser Geraden wählen, welcher von dem Punkte $(a'b'c')$ aus nach derselben Richtung hin geht, wie von dem Anfange der Coordinaten aus das von demselben auf die Tafel gefällte Perpendikel.

Uebrigens erhellet leicht, dass unter der vorhergehenden Voraussetzung λ, μ, ν die 180° nicht übersteigenden Winkel sind, unter welchen die auf den positiven Seiten der Ebenen der yz, zx, xy liegenden Theile der Tafel nach der Seite derselben hin, auf welcher der Anfang der Coordinaten liegt, gegen die Ebenen der yz, zx, xy geneigt sind, so dass also nach 5) durch *diese* drei Winkel und den Punkt (abc) die Lage der Tafel immer vollkommen bestimmt ist.

Man kann die Lage der Tafel auch durch die drei Punkte bestimmen, in denen von ihr die drei Coordinaten-Axen geschnitten werden. Denn bezeichnen wir die mit ihren gehörigen Zeichen genommenen Entfernungen der drei Durchschnittspunkte der Tafel mit den Axen der x, y, z von dem Anfange der Coordinaten, welche wir die Parameter der Tafel nennen wollen, respective durch p, q, r; so haben wir offenbar die drei folgenden Gleichungen:

$$Ap+D=0,\quad Bq+D=0,\quad Cr+D=0;$$

aus denen sich

$$A=-\frac{D}{p},\quad B=-\frac{D}{q},\quad C=-\frac{D}{r}$$

und folglich nach 1) als Gleichung der Tafel die Gleichung

6) . . . . $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$

ergiebt.

Man kann leicht λ, μ, ν aus p, q, r und umgekehrt p, q, r aus a, b, c; λ, μ, ν berechnen.

Aus den, aus dem Obigen sich unmittelbar ergebenden Gleichungen

$$\frac{A}{\cos\lambda}=\frac{B}{\cos\mu}=\frac{C}{\cos\nu},\quad Ap=Bq=Cr$$

folgt nämlich auf der Stelle, wenn man mit den ersten Gleichungen in die zweiten dividirt:

$$p\cos\lambda=q\cos\mu=r\cos\nu;$$

und nimmt man nun hierzu die bekannte Gleichung

$$\cos\lambda^2+\cos\mu^2+\cos\nu^2=1,$$

so hat man zur Bestimmung von λ, μ, ν drei Gleichungen, durch deren Auflösung sich leicht die folgenden Formeln ergeben, in denen überall die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen:

$$7)\begin{cases}\cos\lambda=\pm\dfrac{1}{p\sqrt{\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{r^2}}},\\[2ex]\cos\mu=\pm\dfrac{1}{q\sqrt{\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{r^2}}},\\[2ex]\cos\nu=\pm\dfrac{1}{r\sqrt{\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{r^2}}};\end{cases}\quad\text{oder}\quad 8)\begin{cases}\cos\lambda=\pm\dfrac{qr}{\sqrt{p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2}},\\[2ex]\cos\mu=\pm\dfrac{rp}{\sqrt{p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2}},\\[2ex]\cos\nu=\pm\dfrac{pq}{\sqrt{p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2}};\end{cases}$$

wobei man zu beachten hat, dass in den Systemen 7) und 8) die Zeichen durchaus in keiner Beziehung zu einander stehen, indem hier und im Folgenden eine Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander im Allgemeinen immer nur in jedem einzelnen Systeme für sich Statt findet, was sich übrigens auch ganz von selbst versteht.

Aus den obigen Formeln ergiebt sich ferner unmittelbar:

$$9)\quad\begin{cases}\sin\lambda=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}}{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}}}=\sqrt{\dfrac{p^2(q^2+r^2)}{p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2}},\\[2ex] \sin\mu=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{p^2}}{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}}}=\sqrt{\dfrac{q^2(r^2+p^2)}{p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2}},\\[2ex] \sin\nu=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}}{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}}}=\sqrt{\dfrac{r^2(p^2+q^2)}{p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2}};\end{cases}$$

und mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander in jedem der beiden folgenden Systeme:

$$10)\quad\begin{cases}\tan\lambda=\pm p\sqrt{\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}},\\ \tan\mu=\pm q\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{p^2}},\\ \tan\nu=\pm r\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}};\end{cases}\quad\text{oder}\quad 11)\quad\begin{cases}\tan\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{p^2(q^2+r^2)}}{qr},\\ \tan\mu=\pm\dfrac{\sqrt{q^2(r^2+p^2)}}{rp},\\ \tan\nu=\pm\dfrac{\sqrt{r^2(p^2+q^2)}}{pq}.\end{cases}$$

Aus der Gleichung 5) der Tafel ergeben sich unmittelbar die drei folgenden Gleichungen:

$$(p-a)\cos\lambda-b\cos\mu-c\cos\nu=0,$$

$$-a\cos\lambda+(q-b)\cos\mu-c\cos\nu=0,$$

$$-a\cos\lambda-b\cos\mu+(r-c)\cos\nu=0;$$

aus denen man zur Bestimmung von p, q, r aus a, b, c; λ, μ, ν unmittelbar die folgenden Formeln erhält:

$$12)\quad\ldots\quad\begin{cases}p=\dfrac{a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu}{\cos\lambda},\\[2ex] q=\dfrac{a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu}{\cos\mu},\\[2ex] r=\dfrac{a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu}{\cos\nu}.\end{cases}$$

Fällen wir von dem Anfange der Coordinaten auf die Tafel ein Perpendikel, und bezeichnen die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieses Perpendikels mit der Tafel durch A, B, C; so haben wir zu deren Bestimmung die folgenden Gleichungen:

$$\frac{A}{\cos\lambda}=\frac{B}{\cos\mu}=\frac{C}{\cos\nu},$$

$$(A-a)\cos\lambda+(B-b)\cos\mu+(C-c)\cos\nu=0;$$

aus denen man zur Bestimmung von A, B, C leicht die folgenden Formeln erhält:

$$13)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} A=(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu)\cos\lambda,\\ B=(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu)\cos\mu,\\ C=(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu)\cos\nu; \end{array}\right.$$

und bezeichnen wir nun die Entfernung des Anfangs der Coordinaten von der Tafel durch Π, so ist

$$\Pi^2=A^2+B^2+C^2,$$

also nach 13) offenbar:

$$\Pi=\pm(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu),$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse $a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu$ positiv oder negativ ist. Nach 12) ist aber

$$a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu=p\cos\lambda=q\cos\mu=r\cos\nu;$$

und erinnert man sich nun aus dem Obigen an die Bedeutung von p, q, r und der Winkel λ, μ, ν, so wird auf der Stelle erhellen, dass z. B. p immer positiv oder negativ ist, jenachdem λ zwischen 0 und 90° oder zwischen 90° und 180° liegt, jenachdem also $\cos\lambda$ positiv oder negativ ist, woraus sich ergiebt, dass p und $\cos\lambda$ jederzeit gleiche Vorzeichen haben, also $p\cos\lambda$, und nach dem Obigen folglich auch die Grösse $a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu$ stets positiv ist, weshalb man also allgemein

$$14)\ \ldots\ \Pi=a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu$$

zu setzen berechtigt ist.

Fällen wir ferner auch von dem Auge (FGH) auf die Tafel ein Perpendikel, und bezeichnen die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieses Perpendikels mit der Tafel durch X, Y, Z; so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\frac{X-F}{\cos\lambda}=\frac{Y-G}{\cos\mu}=\frac{Z-H}{\cos\nu},$$

$$(X-a)\cos\lambda+(Y-b)\cos\mu+(Z-c)\cos\nu=0;$$

aus denen man, wenn man die letzte Gleichung unter der Form

$$(X-F)\cos\lambda+(Y-G)\cos\mu+(Z-H)\cos\nu$$
$$=-\{(F-a)\cos\lambda+(G-b)\cos\mu+(H-c)\cos\nu\}$$

darstellt, zur Bestimmung von X, Y, Z leicht die folgenden Formeln erhält:

15)

$$X-F=-\{(F-a)\cos\lambda+(G-b)\cos\mu+(H-c)\cos\nu\}\cos\lambda,$$
$$Y-G=-\{(F-a)\cos\lambda+(G-b)\cos\mu+(H-c)\cos\nu\}\cos\mu,$$
$$Z-H=-\{(F-a)\cos\lambda+(G-b)\cos\mu+(H-c)\cos\nu\}\cos\nu$$

oder:

16)

$$X=F-\{(F-a)\cos\lambda+(G-b)\cos\mu+(H-c)\cos\nu\}\cos\lambda,$$
$$Y=G-\{(F-a)\cos\lambda+(G-b)\cos\mu+(H-c)\cos\nu\}\cos\mu,$$
$$Z=H-\{(F-a)\cos\lambda+(G-b)\cos\mu+(H-c)\cos\nu\}\cos\nu.$$

Bezeichnen wir die Länge des von dem Auge auf die Tafel gefällten Perpendikels durch P, so ist

$$P^2=(X-F)^2+(Y-G)^2+(Z-H)^2,$$

und folglich nach 15):

$$P^2=\{(F-a)\cos\lambda+(G-b)\cos\mu+(H-c)\cos\nu\}^2.$$

Weil

$$(x-a)\cos\lambda+(y-b)\cos\mu+(z-c)\cos\nu=0$$

die Gleichung der Tafel ist, so haben nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie die Grössen

$$-(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu)$$

und

$$(F-a)\cos\lambda+(G-b)\cos\mu+(H-c)\cos\nu$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen, jenachdem der Anfang der

Coordinaten und das Auge auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Tafel liegen; und da nun nach dem Obigen die Grösse

$$a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu$$

stets positiv ist, so ist die Grösse

$$(F-a)\cos\lambda + (G-b)\cos\mu + (H-c)\cos\nu$$

negativ oder positiv, jenachdem der Anfang der Coordinaten und das Auge auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Tafel liegen; also ist nach dem Obigen

$$17) \ldots \mathrm{P} = \mp\{(F-a)\cos\lambda + (G-b)\cos\mu + (H-c)\cos\nu\}$$

oder

$$18) \ldots \mathrm{P} = \pm\{(a-F)\cos\lambda + (b-G)\cos\mu + (c-H)\cos\nu\}$$

zu setzen, indem man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem der Anfang der Coordinaten und das Auge auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Tafel liegen. Betrachtet man das Perpendikel P nicht bloss als positiv, oder bezeichnet vielmehr P nicht bloss den absoluten Werth des von dem Auge auf die Tafel gefällten Perpendikels, sondern betrachtet man P als positiv oder als negativ, jenachdem der Anfang der Coordinaten und das Auge auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite der Tafel liegen, so ist nach dem Obigen allgemein

$$19) \ldots \mathrm{P} = (F-a)\cos\lambda + (G-b)\cos\mu + (H-c)\cos\nu$$

zu setzen.

§. 2.

Bild eines Punktes.

Das Bild eines Punktes (fgh) im Raume ist bekanntlich der Durchschnittspunkt der durch diesen Punkt und das Auge (FGH) gezogenen Geraden mit der Tafel, welchen wir durch $(f_1g_1h_1)$ bezeichnen wollen, so dass also f_1, g_1, h_1 die Coordinaten des Bildes von (fgh) sind, die wir nun zunächst im Allgemeinen bestimmen müssen.

Die Gleichungen der durch den Punkt (fgh) und das Auge (FGH) gezogenen Geraden sind:

$$\frac{x-f}{F-f} = \frac{y-g}{G-g} = \frac{z-h}{H-h} \text{ oder } \frac{x-F}{F-f} = \frac{y-G}{G-g} = \frac{z-H}{H-h},$$

und man hat also hiernach und nach 5) zur Bestimmung der Coordinaten f_1, g_1, h_1 des Bildes von (fgh) die folgenden Gleichungen:

$$(f_1-a)\cos\lambda+(g_1-b)\cos\mu+(h_1-c)\cos\nu=0,$$

$$\frac{f_1-f}{F-f}=\frac{g_1-g}{G-g}=\frac{h_1-h}{H-h}$$

oder

$$(f_1-a)\cos\lambda+(g_1-b)\cos\mu+(h_1-c)\cos\nu=0,$$

$$\frac{f_1-F}{F-f}=\frac{g_1-G}{G-g}=\frac{h_1-H}{H-h};$$

welche zwei Systeme von Gleichungen man aber auch auf die folgenden Formen bringen kann:

$$(f_1-f)\cos\lambda+(g_1-g)\cos\mu+(h_1-h)\cos\nu$$
$$=(a-f)\cos\lambda+(b-g)\cos\mu+(c-h)\cos\nu,$$

$$\frac{f_1-f}{F-f}=\frac{g_1-g}{G-g}=\frac{h_1-h}{H-h}$$

und

$$(f_1-F)\cos\lambda+(g_1-G)\cos\mu+(h_1-H)\cos\nu$$
$$=(a-F)\cos\lambda+(b-G)\cos\mu+(c-H)\cos\nu,$$

$$\frac{f_1-F}{F-f}=\frac{g_1-G}{G-g}=\frac{h_1-H}{H-h}.$$

Nach 19) ist

$$\mathrm{P}=(F-a)\cos\lambda+(G-b)\cos\mu+(H-c)\cos\nu,$$

und bezeichnen wir das von dem Punkte (fgh) auf die Tafel gefällte, jenachdem der Anfang der Coordinaten und der Punkt (fgh) auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite der Tafel liegen, als positiv oder als negativ betrachtete Perpendikel durch p, so ist natürlich ganz eben so:

20) .... $\mathrm{p}=(f-a)\cos\lambda+(g-b)\cos\mu+(h-c)\cos\nu,$

so dass sich also die beiden obigen Systeme von Gleichungen zur Bestimmung der Coordinaten f_1, g_1, h_1 des Bildes unter den folgenden Formen darstellen lassen:

$$(f_1-f)\cos\lambda+(g_1-g)\cos\mu+(h_1-h)\cos\nu=-\mathrm{p},$$

$$\frac{f_1-f}{F-f}=\frac{g_1-g}{G-g}=\frac{h_1-h}{H-h}$$

und

$$(f_1-F)\cos\lambda+(g_1-G)\cos\mu+(h_1-H)\cos\nu=-\mathrm{P},$$

$$\frac{f_1-F}{F-f}=\frac{g_1-G}{G-g}=\frac{h_1-H}{H-h}.$$

Weil nach 19) und 20)

$$21)\ldots \mathrm{P}-\mathrm{p}=(F-f)\cos\lambda+(G-g)\cos\mu+(H-h)\cos\nu$$

ist, so folgt aus den zwei vorstehenden Systemen von Gleichungen leicht:

$$22)\quad\ldots\quad\left\{\begin{aligned} f_1-f&=-\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(F-f),\\ g_1-g&=-\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(G-g),\\ h_1-h&=-\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(H-h)\end{aligned}\right.$$

und

$$23)\quad\ldots\quad\left\{\begin{aligned} f_1-F&=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(F-f),\\ g_1-G&=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(G-g),\\ h_1-H&=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(H-h);\end{aligned}\right.$$

woraus sich ferner:

$$24)\ldots f_1=\frac{\mathrm{P}f-\mathrm{p}F}{\mathrm{P}-\mathrm{p}},\quad g_1=\frac{\mathrm{P}g-\mathrm{p}G}{\mathrm{P}-\mathrm{p}},\quad h_1=\frac{\mathrm{P}h-\mathrm{p}H}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}$$

ergiebt.

Aus dem Obigen folgt leicht, dass der absolute Werth von $\mathrm{P}-\mathrm{p}$ die absolut genommene Differenz oder die Summe der Entfernungen des Punktes (fgh) und des Auges (FGH) von der Tafel ist, jenachdem der Punkt (fgh) und das Auge auf derselben Seite oder verschiedenen Seiten der Tafel liegen.

§. 3.

Bild einer Geraden.

Das Bild einer durch die Gleichungen

$$25)\quad\ldots\quad\frac{x-f}{\cos\alpha}=\frac{y-g}{\cos\beta}=\frac{z-h}{\cos\gamma}$$

$$\left.\begin{array}{l}\{(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta\}(f_1-F)\\+\{(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma\}(g_1-G)\\+\{(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha\}(h_1-H)\end{array}\right\}=0$$

führt, welche, von der zweiten der Gleichungen 28) abgezogen, für die in Rede stehende Ebene die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}\{(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta\}(x-f_1)\\+\{(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma\}(y-g_1)\\+\{(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha\}(z-h_1)\end{array}\right\}=0$$

giebt; und da nun in dieser Ebene das durch die Gleichungen 29) charakterisirte Bild liegt, so erhalten wir die Gleichung:

$$31)\ \ldots.\ \left.\begin{array}{l}\{(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta\}\cos\alpha_1\\+\{(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma\}\cos\beta_1\\+\{(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha\}\cos\gamma_1\end{array}\right\}=0.$$

Denken wir uns eine beliebige, auf der durch die Gleichungen 26) charakterisirten Geraden senkrecht stehende Ebene, und bezeichnen die Entfernungen der Punkte (FGH) und (fgh) von dieser Ebene, indem wir diese Entfernungen als positiv oder negativ betrachten, jenachdem der Anfang der Coordinaten und der Punkt (FGH) oder der Punkt (fgh) auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite der in Rede stehenden Ebene liegen, respective durch Q und q; so ist offenbar auf ganz ähnliche Art wie in §. 1. und §. 2.:

$$32)\quad \mathrm{Q}-\mathrm{q}=(F-f)\cos\alpha+(G-g)\cos\beta+(H-h)\cos\gamma.$$

Auch wollen wir der Kürze wegen

$$33)\ \ldots.\ \cos\theta=\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu$$

setzen, und die Entfernung der Punkte (fgh) und (FGH) von einander soll durch D bezeichnet werden, so dass also

$$34)\ \ldots.\ D^2=(F-f)^2+(G-g)^2+(H-h)^2$$

ist.

Aus den beiden Gleichungen 30) und 31) ergiebt sich, wenn Ω einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\cos\alpha_1$$

$$=\Omega\{\cos\nu[(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma]-\cos\mu[(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha]\},$$

$$\cos\beta_1$$

$$=\Omega\{\cos\lambda[(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha]-\cos\nu[(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta]\},$$

$$\cos\gamma_1$$

$$=\Omega\{\cos\mu[(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta]-\cos\lambda[(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma]\};$$

also, wie man sogleich übersieht, nach 21) und 33):

$$\cos\alpha_1=\Omega\{(\mathrm{P}-\mathrm{p})\cos\alpha-(F-f)\cos\theta\},$$

$$\cos\beta_1=\Omega\{(\mathrm{P}-\mathrm{p})\cos\beta-(G-g)\cos\theta\},$$

$$\cos\gamma_1=\Omega\{(\mathrm{P}-\mathrm{p})\cos\gamma-(H-h)\cos\theta\};$$

woraus sich mit Rücksicht auf 32) und 34) die Gleichung

$$\Omega^{-2}=(\mathrm{P}-\mathrm{p})^2-2(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{Q}-\mathrm{q})\cos\theta+D^2\cos\theta^2$$

ergiebt. Bestimmt man hieraus Ω durch Ausziehung der Quadratwurzel, so kommt es vorzüglich auf die Bestimmung des Zeichens an, mit welchem man die Quadratwurzel zu nehmen hat, worüber das Folgende zu bemerken ist.

Die Gleichung der durch die Punkte (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ senkrecht gegen die Ebene der xy gelegten Ebene hat im Allgemeinen die Form

$$M(x-f)+N(y-g)=0,$$

woraus sich

$$M(f_1-f)+N(g_1-g)=0$$

ergiebt, so dass also die Gleichung der in Rede stehenden Ebene auch unter der Form

$$M(x-f_1)+N(y-g_1)=0$$

dargestellt werden kann. Weil nun aber

$$\begin{array}{lcl} M(x-f)=-N(y-g) & & M(x-f_1)=-N(y-g_1) \\ & \text{oder} & \\ M(f_1-f)=-N(g_1-g) & & M(f_1-f)=-N(g_1-g) \end{array}$$

ist, so erhalten wir durch Division dieser Gleichungen durch einander für unsere Ebene sogleich die Gleichung

$$(g_1-g)(x-f)-(f_1-f)(y-g)=0$$

oder

$$(g_1-g)(x-f_1)-(f_1-f)(y-g_1)=0.$$

Der Punkt (fgh) theilt die gegebene Gerade in zwei Theile, deren einem die Winkel α, β, γ entsprechen, und eben so theilt der Punkt $(f_1g_1h_1)$ das Bild der gegebenen Geraden in zwei Theile, von denen nur der eine als das wirkliche Bild des Theils der gegebenen Geraden, welchem die Winkel α, β, γ entsprechen, zu betrachten ist; diesem Theile des Bildes der gegebenen Geraden sollen von jetzt an die Winkel α_1, β_1, γ_1 entsprechen.

Sind ϱ und ϱ_1 die Entfernungen zweier beliebigen Punkte in den Theilen der gegebenen Geraden und ihres Bildes, welchen nach dem vorher Bemerkten die Winkel α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 entsprechen, von den beiden Punkten (fgh) und $(f_1g_1h_1)$; so sind die Coordinaten der beiden in Rede stehenden, durch die Entfernungen ϱ und ϱ_1 bestimmten Punkte respective

$$f+\varrho\cos\alpha,\quad g+\varrho\cos\beta,\quad h+\varrho\cos\gamma$$

und

$$f_1+\varrho_1\cos\alpha_1,\quad g_1+\varrho_1\cos\beta_1,\quad h_1+\varrho_1\cos\gamma_1.$$

Wenn nun das Auge nicht zwischen den beiden Punkten (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ liegt, so liegen die durch die vorhergehenden Coordinaten bestimmten beiden Punkte offenbar jederzeit auf einer und derselben Seite der durch die Punkte (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ senkrecht gegen die Ebene der xy gelegten Ebene; wenn dagegen das Auge zwischen den beiden Punkten (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ liegt, so liegen die durch die obigen Coordinaten bestimmten beiden Punkte offenbar jederzeit auf verschiedenen Seiten der durch die Punkte (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ senkrecht gegen die Ebene der xy gelegten Ebene. In diesen beiden Fällen haben also nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie die Grössen

$$(g_1-g)\{(f+\varrho\cos\alpha)-f\}-(f_1-f)\{(g+\varrho\cos\beta)-g\}$$

und

$$(g_1-g)\{(f_1+\varrho_1\cos\alpha_1)-f\}-(f_1-f)\{(g_1+\varrho_1\cos\beta_1)-g\},$$

also die Grössen

$$(g_1-g)\cos\alpha-(f_1-f)\cos\beta \text{ und } (g_1-g)\cos\alpha_1-(f_1-f)\cos\beta_1$$

oder die Grössen

$$(f_1-f)\cos\beta-(g_1-g)\cos\alpha \text{ und } (f_1-f)\cos\beta_1-(g_1-g)\cos\alpha_1$$

respective gleiche und ungleiche Vorzeichen. Nach 22) ist aber

$$f_1 - f = -\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(F-f),$$

$$g_1 - g = -\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(G-g);$$

also

$$(f_1-f)\cos\beta - (g_1-g)\cos\alpha = -\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}\{(F-f)\cos\beta - (G-g)\cos\alpha\}$$

und, wenn man die obigen Werthe von $\cos\alpha_1$ und $\cos\beta_1$ einführt:

$$(f_1-f)\cos\beta_1 - (g_1-g)\cos\alpha_1 = -\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}\Omega(\mathrm{P}-\mathrm{p})\{(F-f)\cos\beta - (G-g)\cos\alpha\};$$

und

$$(f_1-f)\cos\beta - (g_1-g)\cos\alpha \quad \text{und} \quad (f_1-f)\cos\beta_1 - (g_1-g)\cos\alpha_1$$

haben also gleiche oder ungleiche Vorzeichen, jenachdem

$$\Omega \text{ und } \mathrm{P}-\mathrm{p}$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Folglich muss, jenachdem das Auge nicht zwischen (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ oder zwischen (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ liegt, Ω so genommen werden, dass es mit

$$\mathrm{P}-\mathrm{p} = (F-f)\cos\lambda + (G-g)\cos\mu + (H-h)\cos\nu$$

gleiches oder ungleiches Vorzeichen hat. Weil nun nach dem Obigen

$$\Omega^{-2} = (\mathrm{P}-\mathrm{p})^2\left\{1 - 2\frac{\mathrm{Q}-\mathrm{q}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}\cos\theta + \left(\frac{D}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}\right)^2\cos\theta^2\right\}$$

ist, so muss man, wenn wir der Kürze wegen

$$35) \ldots\ldots \Theta = \sqrt{1 - 2\frac{\mathrm{Q}-\mathrm{q}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}\cos\theta + \left(\frac{D}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}\right)^2\cos\theta^2}$$

setzen,

$$36) \ldots\ldots \frac{1}{\Omega} = \pm(\mathrm{P}-\mathrm{p})\Theta, \quad \Omega = \pm\frac{1}{(\mathrm{P}-\mathrm{p})\Theta}$$

setzen, indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem das Auge nicht zwischen den Punkten (fgh) und $(f_1g_1h_1)$, oder zwischen den Punkten (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ liegt.

Mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens ist nach dem Obigen:

$$37) \ldots \left\{\begin{array}{l} \Theta\cos\alpha_1 = \pm\{\cos\alpha - \frac{F-f}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}\cos\theta\}, \\ \Theta\cos\beta_1 = \pm\{\cos\beta - \frac{G-g}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}\cos\theta\}, \\ \Theta\cos\gamma_1 = \pm\{\cos\gamma - \frac{H-h}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}\cos\theta\}. \end{array}\right.$$

Die zur Bestimmung von f_1, g_1, h_1 erforderlichen Formeln sind aus 22), 23), 24) bekannt.

Wenn man die aus dem Obigen bekannten Gleichungen

$$\cos\alpha_1$$
$$=\Omega\{\cos\nu[(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma]-\cos\mu[(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha]\},$$
$$\cos\beta_1$$
$$=\Omega\{\cos\lambda[(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha]-\cos\nu[(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta]\},$$
$$\cos\gamma_1$$
$$=\Omega\{\cos\mu[(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta]-\cos\lambda[(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma]\}$$

quadrirt und zu einander addirt, so findet man:

$$\begin{aligned} \Omega^{-2}= &\quad \{(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta\}^2\sin\lambda^2 \\ &+\{(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma\}^2\sin\mu^2 \\ &+\{(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha\}^2\sin\nu^2 \\ &-2\{(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta\}\{(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma\}\cos\lambda\cos\mu \\ &-2\{(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma\}\{(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha\}\cos\mu\cos\nu \\ &-2\{(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha\}\{(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta\}\cos\nu\cos\lambda \end{aligned}$$

oder, wie man sogleich übersieht:

$$\begin{aligned} \Omega^{-2}= &\quad \{(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha\}^2 \\ &+\{(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta\}^2 \\ &+\{(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma\}^2 \\ &-\left\{\begin{array}{r}[(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha]\cos\nu+[(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta]\cos\lambda \\ +[(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma]\cos\mu\end{array}\right\}^2; \end{aligned}$$

und weil nun nach dem Obigen

$$\Theta^2=\frac{1}{(\mathrm{P}-\mathrm{p})^2\Omega^2},$$

also Θ die positiv genommene Quadratwurzel aus dem Bruche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist, so ist nach dem Obigen Θ die positiv genommene Quadratwurzel aus

$$\frac{\left\{\begin{array}{c} \{(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta\}^2\sin\lambda^2 \\ +\{(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma\}^2\sin\mu^2 \\ +\{(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha\}^2\sin\nu^2 \\ -2\{(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta\}\{(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma\}\cos\lambda\cos\mu \\ -2\{(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma\}\{(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha\}\cos\mu\cos\nu \\ -2\{(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha\}\{(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta\}\cos\nu\cos\lambda \end{array}\right\}}{\{(F-f)\cos\lambda+(G-g)\cos\mu+(H-h)\cos\nu\}^2}$$

oder aus

$$\frac{\left\{\begin{array}{c} \{(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha\}^2 \\ +\{(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta\}^2 \\ +\{(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma\}^2 \\ -\left\{\begin{array}{r} [(F-f)\cos\beta-(G-g)\cos\alpha]\cos\nu+[(G-g)\cos\gamma-(H-h)\cos\beta]\cos\lambda \\ +[(H-h)\cos\alpha-(F-f)\cos\gamma]\cos\mu \end{array}\right\}^2 \end{array}\right\}}{\{(F-f)\cos\lambda+(G-g)\cos\mu+(H-h)\cos\nu\}^2}.$$

§. 4.

Punkt der Tafel, in welchem die Bilder paralleler Linien sich sämmtlich schneiden.

Die Bilder paralleler Linien schneiden sich offenbar sämmtlich in dem Punkte, in welchem die Tafel von der durch das Auge diesen Linien parallel gezogenen Geraden getroffen wird. Sind nun α, β, γ die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die Parallelen mit den positiven Theilen der Coordinaten-Axen einschliessen, so sind

$$\frac{x-F}{\cos\alpha}=\frac{y-G}{\cos\beta}=\frac{z-H}{\cos\gamma}$$

die Gleichungen der durch das Auge mit den sämmtlichen Parallelen parallel gezogenen Geraden; und bezeichnen wir nun durch X, Y, Z die gesuchten Coordinaten des Durchschnittspunkts

dieser Geraden mit der Tafel, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\frac{X-F}{\cos\alpha}=\frac{Y-G}{\cos\beta}=\frac{Z-H}{\cos\gamma},$$

$$(X-a)\cos\lambda+(Y-b)\cos\mu+(Z-c)\cos\nu=0$$

oder statt der letzten Gleichung die Gleichung

$$(X-F)\cos\lambda+(Y-G)\cos\mu+(Z-H)\cos\nu=-\mathrm{P}.$$

Also ist, wie man sogleich übersieht:

$$38)\quad X-F=-\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}\mathrm{P},\quad Y-G=-\frac{\cos\beta}{\cos\theta}\mathrm{P},\quad Z-H=-\frac{\cos\gamma}{\cos\theta}\mathrm{P}$$

oder

$$39)\quad X=F-\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}\mathrm{P},\quad Y=G-\frac{\cos\beta}{\cos\theta}\mathrm{P},\quad Z=H-\frac{\cos\gamma}{\cos\theta}\mathrm{P}.$$

§. 5.

Länge des Bildes der Entfernung zweier Punkte von einander.

Die beiden Punkte seien (fgh) und $(f'g'h')$, und $(f_1g_1h_1)$ und $(f_1'g_1'h_1')$ seien ihre Bilder. Bezeichnen wir dann die Länge des Bildes der Entfernung der beiden Punkte (fgh) und $(f'g'h')$ von einander durch L_1, so ist

$$L_1^2=(f_1'-f_1)^2+(g_1'-g_1)^2+(h_1'-h_1)^2.$$

Setzen wir nun

$$40)\quad ..\ \mathrm{p}'=(f'-a)\cos\lambda+(g'-b)\cos\mu+(h'-c)\cos\nu,$$

also

$$41)\quad \mathrm{P}-\mathrm{p}'=(F-f')\cos\lambda+(G-g')\cos\mu+(H-h')\cos\nu;$$

so ist nach 23):

$$f_1-F=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(F-f),\quad f_1'-F=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}'}(F-f'),$$

$$g_1-G=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(G-g),\quad g_1'-G=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}'}(G-g'),$$

$$h_1-H=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(H-h);\quad h_1'-H=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}'}(H-h');$$

also:

$$f_1'-f_1=\frac{\mathrm{P}\{(F-f)(\mathrm{P}-\mathrm{p}')-(F-f')(\mathrm{P}-\mathrm{p})\}}{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')},$$

$$g_1'-g_1=\frac{\mathrm{P}\{(G-g)(\mathrm{P}-\mathrm{p}')-(G-g')(\mathrm{P}-\mathrm{p})\}}{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')},$$

$$h_1'-h_1=\frac{\mathrm{P}\{(H-h)(\mathrm{P}-\mathrm{p}')-(H-h')(\mathrm{P}-\mathrm{p})\}}{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')};$$

woraus man ferner leicht findet:

$$\frac{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')}{\mathrm{P}}(f_1'-f_1)=\{(F-f)(G-g')-(F-f')(G-g)\}\cos\mu$$
$$-\{(H-h)(F-f')-(H-h')(F-f)\}\cos\nu,$$

$$\frac{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')}{\mathrm{P}}(g_1'-g_1)=\{(G-g)(H-h')-(G-g')(H-h)\}\cos\nu$$
$$-\{(F-f)(G-g')-(F-f')(G-g)\}\cos\lambda,$$

$$\frac{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')}{\mathrm{P}}(h_1'-h_1)=\{(H-h)(F-f')-(H-h')(F-f)\}\cos\lambda$$
$$-\{(G-g)(H-h')-(G-g')(H-h)\}\cos\mu.$$

Quadrirt man nun diese Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man leicht:

42) . . . . . $$\left\{\frac{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')}{\mathrm{P}}\right\}^2.L_1^2$$
$$=\{(G-g)(H-h')-(G-g')(H-h)\}^2\sin\lambda^2$$
$$+\{(H-h)(F-f')-(H-h')(F-f)\}^2\sin\mu^2$$
$$+\{(F-f)(G-g')-(F-f')(G-g)\}^2\sin\nu^2$$
$$-2\{(G-g)(H-h')-(G-g')(H-h)\}$$
$$\times\{(H-h)(F-f')-(H-h')(F-f)\}\cos\lambda\cos\mu$$
$$-2\{(H-h)(F-f')-(H-h')(F-f)\}$$
$$\times\{(F-f)(G-g')-(F-f')(G-g)\}\cos\mu\cos\nu$$
$$-2\{(F-f)(G-g')-(F-f')(G-g)\}$$
$$\times\{(G-g)(H-h')-(G-g')(H-h)\}\cos\nu\cos\lambda,$$

mittelst welcher Formel L_1 immer berechnet werden kann.

dieser Geraden mit der Tafel, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\frac{X-F}{\cos\alpha}=\frac{Y-G}{\cos\beta}=\frac{Z-H}{\cos\gamma},$$

$$(X-a)\cos\lambda+(Y-b)\cos\mu+(Z-c)\cos\nu=0$$

oder statt der letzten Gleichung die Gleichung

$$(X-F)\cos\lambda+(Y-G)\cos\mu+(Z-H)\cos\nu=-\mathrm{P}.$$

Also ist, wie man sogleich übersieht:

$$38)\quad X-F=-\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}\mathrm{P},\quad Y-G=-\frac{\cos\beta}{\cos\theta}\mathrm{P},\quad Z-H=-\frac{\cos\gamma}{\cos\theta}\mathrm{P}$$

oder

$$39)\quad X=F-\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}\mathrm{P},\quad Y=G-\frac{\cos\beta}{\cos\theta}\mathrm{P},\quad Z=H-\frac{\cos\gamma}{\cos\theta}\mathrm{P}.$$

§. 5.

Länge des Bildes der Entfernung zweier Punkte von einander.

Die beiden Punkte seien (fgh) und $(f'g'h')$, und $(f_1g_1h_1)$ und $(f_1'g_1'h_1')$ seien ihre Bilder. Bezeichnen wir dann die Länge des Bildes der Entfernung der beiden Punkte (fgh) und $(f'g'h')$ von einander durch L_1, so ist

$$L_1^2=(f_1'-f_1)^2+(g_1'-g_1)^2+(h_1'-h_1)^2.$$

Setzen wir nun

$$40)\quad ..\ \mathrm{p}'=(f'-a)\cos\lambda+(g'-b)\cos\mu+(h'-c)\cos\nu,$$

also

$$41)\quad \mathrm{P}-\mathrm{p}'=(F-f')\cos\lambda+(G-g')\cos\mu+(H-h')\cos\nu;$$

so ist nach 23):

$$f_1-F=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(F-f),\quad f_1'-F=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}'}(F-f'),$$

$$g_1-G=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(G-g),\quad g_1'-G=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}'}(G-g'),$$

$$h_1-H=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(H-h);\quad h_1'-H=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}'}(H-h');$$

also:

$$f_1'-f_1=\frac{\mathrm{P}\{(F-f)(\mathrm{P}-\mathrm{p}')-(F-f')(\mathrm{P}-\mathrm{p})\}}{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')},$$

$$g_1'-g_1=\frac{\mathrm{P}\{(G-g)(\mathrm{P}-\mathrm{p}')-(G-g')(\mathrm{P}-\mathrm{p})\}}{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')},$$

$$h_1'-h_1=\frac{\mathrm{P}\{(H-h)(\mathrm{P}-\mathrm{p}')-(H-h')(\mathrm{P}-\mathrm{p})\}}{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')};$$

woraus man ferner leicht findet:

$$\frac{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')}{\mathrm{P}}(f_1'-f_1)=\{(F-f)(G-g')-(F-f')(G-g)\}\cos\mu$$
$$-\{(H-h)(F-f')-(H-h')(F-f)\}\cos\nu,$$

$$\frac{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')}{\mathrm{P}}(g_1'-g_1)=\{(G-g)(H-h')-(G-g')(H-h)\}\cos\nu$$
$$-\{(F-f)(G-g')-(F-f')(G-g)\}\cos\lambda,$$

$$\frac{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')}{\mathrm{P}}(h_1'-h_1)=\{(H-h)(F-f')-(H-h')(F-f)\}\cos\lambda$$
$$-\{(G-g)(H-h')-(G-g')(H-h)\}\cos\mu.$$

Quadrirt man nun diese Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man leicht:

42) . . . . . $\left\{\frac{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')}{\mathrm{P}}\right\}^2.L_1^2$

$$\begin{aligned}
= \; & \{(G-g)(H-h')-(G-g')(H-h)\}^2\sin\lambda^2\\
& +\{(H-h)(F-f')-(H-h')(F-f)\}^2\sin\mu^2\\
& +\{(F-f)(G-g')-(F-f')(G-g)\}^2\sin\nu^2\\
& -2\{(G-g)(H-h')-(G-g')(H-h)\}\\
& \quad\times\{(H-h)(F-f')-(H-h')(F-f)\}\cos\lambda\cos\mu\\
& -2\{(H-h)(F-f')-(H-h')(F-f)\}\\
& \quad\times\{(F-f)(G-g')-(F-f')(G-g)\}\cos\mu\cos\nu\\
& -2\{(F-f)(G-g')-(F-f')(G-g)\}\\
& \quad\times\{(G-g)(H-h')-(G-g')(H-h)\}\cos\nu\cos\lambda,
\end{aligned}$$

mittelst welcher Formel L_1 immer berechnet werden kann.

dieser Geraden mit der Tafel, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\frac{X-F}{\cos\alpha}=\frac{Y-G}{\cos\beta}=\frac{Z-H}{\cos\gamma},$$

$$(X-a)\cos\lambda+(Y-b)\cos\mu+(Z-c)\cos\nu=0$$

oder statt der letzten Gleichung die Gleichung

$$(X-F)\cos\lambda+(Y-G)\cos\mu+(Z-H)\cos\nu=-\mathrm{P}.$$

Also ist, wie man sogleich übersieht:

$$38)\quad X-F=-\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}\mathrm{P},\quad Y-G=-\frac{\cos\beta}{\cos\theta}\mathrm{P},\quad Z-H=-\frac{\cos\gamma}{\cos\theta}\mathrm{P}$$

oder

$$39)\quad X=F-\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}\mathrm{P},\quad Y=G-\frac{\cos\beta}{\cos\theta}\mathrm{P},\quad Z=H-\frac{\cos\gamma}{\cos\theta}\mathrm{P}.$$

§. 5.

Länge des Bildes der Entfernung zweier Punkte von einander.

Die beiden Punkte seien (fgh) und $(f'g'h')$, und $(f_1g_1h_1)$ und $(f_1'g_1'h_1')$ seien ihre Bilder. Bezeichnen wir dann die Länge des Bildes der Entfernung der beiden Punkte (fgh) und $(f'g'h')$ von einander durch L_1, so ist

$$L_1^2=(f_1'-f_1)^2+(g_1'-g_1)^2+(h_1'-h_1)^2.$$

Setzen wir nun

$$40)\quad ..\ \mathrm{p}'=(f'-a)\cos\lambda+(g'-b)\cos\mu+(h'-c)\cos\nu,$$

also

$$41)\quad \mathrm{P}-\mathrm{p}'=(F-f')\cos\lambda+(G-g')\cos\mu+(H-h')\cos\nu;$$

so ist nach 23):

$$f_1-F=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(F-f),\quad f_1'-F=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}'}(F-f'),$$

$$g_1-G=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(G-g),\quad g_1'-G=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}'}(G-g'),$$

$$h_1-H=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}(H-h);\quad h_1'-H=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}'}(H-h');$$

also:

$$f_1'-f_1=\frac{\mathrm{P}\{(F-f)(\mathrm{P}-\mathrm{p}')-(F-f')(\mathrm{P}-\mathrm{p})\}}{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')},$$

$$g_1'-g_1=\frac{\mathrm{P}\{(G-g)(\mathrm{P}-\mathrm{p}')-(G-g')(\mathrm{P}-\mathrm{p})\}}{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')},$$

$$h_1'-h_1=\frac{\mathrm{P}\{(H-h)(\mathrm{P}-\mathrm{p}')-(H-h')(\mathrm{P}-\mathrm{p})\}}{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')};$$

woraus man ferner leicht findet:

$$\frac{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')}{\mathrm{P}}(f_1'-f_1)=\{(F-f)(G-g')-(F-f')(G-g)\}\cos\mu$$
$$-\{(H-h)(F-f')-(H-h')(F-f)\}\cos\nu,$$

$$\frac{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')}{\mathrm{P}}(g_1'-g_1)=\{(G-g)(H-h')-(G-g')(H-h)\}\cos\nu$$
$$-\{(F-f)(G-g')-(F-f')(G-g)\}\cos\lambda,$$

$$\frac{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')}{\mathrm{P}}(h_1'-h_1)=\{(H-h)(F-f')-(H-h')(F-f)\}\cos\lambda$$
$$-\{(G-g)(H-h')-(G-g')(H-h)\}\cos\mu.$$

Quadrirt man nun diese Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man leicht:

42) . . . . . $$\left\{\frac{(\mathrm{P}-\mathrm{p})(\mathrm{P}-\mathrm{p}')}{\mathrm{P}}\right\}^2.L_1^2$$
$$=\{(G-g)(H-h')-(G-g')(H-h)\}^2\sin\lambda^2$$
$$+\{(H-h)(F-f')-(H-h')(F-f)\}^2\sin\mu^2$$
$$+\{(F-f)(G-g')-(F-f')(G-g)\}^2\sin\nu^2$$
$$-2\{(G-g)(H-h')-(G-g')(H-h)\}$$
$$\times\{(H-h)(F-f')-(H-h')(F-f)\}\cos\lambda\cos\mu$$
$$-2\{(H-h)(F-f')-(H-h')(F-f)\}$$
$$\times\{(F-f)(G-g')-(F-f')(G-g)\}\cos\mu\cos\nu$$
$$-2\{(F-f)(G-g')-(F-f')(G-g)\}$$
$$\times\{(G-g)(H-h')-(G-g')(H-h)\}\cos\nu\cos\lambda,$$

mittelst welcher Formel L_1 immer berechnet werden kann.

§. 6.

Bilder des Anfangspunkts der Coordinaten und der drei Coordinaten-Axen.

Für den Anfangspunkt der Coordinaten ist in den in §. 2. entwickelten Formeln $f=0$, $g=0$, $h=0$ zu setzen. Also ist in diesem Falle nach 24), wenn wir das Bild des Anfangs der Coordinaten durch $(f_0 g_0 h_0)$ bezeichnen:

$$43)\quad f_0=-\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}F,\quad g_0=-\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}G,\quad h_0=-\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{P}-\mathrm{p}}H;$$

wo nach 20) und 21)

$$44)\quad \mathrm{p}=-(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu),\quad \mathrm{P}-\mathrm{p}=F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu$$

ist. Also ist:

$$45)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} f_0=\dfrac{a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu}{F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu}F,\\[2mm] g_0=\dfrac{a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu}{F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu}G,\\[2mm] h_0=\dfrac{a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu}{F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu}H; \end{array}\right.$$

oder nach 14) auch:

$$46)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} f_0=\dfrac{\Pi F}{F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu},\\[2mm] g_0=\dfrac{\Pi G}{F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu},\\[2mm] h_0=\dfrac{\Pi H}{F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu}. \end{array}\right.$$

Um die Bilder der drei Coordinaten-Axen zu bestimmen, wollen wir für die Axen der x, y, z die Werthe der in §. 3. im Allgemeinen durch Θ, α_1, β_1, γ_1 bezeichneten Grössen respective durch

$$\Theta_x,\quad \alpha_x,\quad \beta_x,\quad \gamma_x;$$

$$\Theta_y,\quad \alpha_y,\quad \beta_y,\quad \gamma_y;$$

$$\Theta_z,\quad \alpha_z,\quad \beta_z,\quad \gamma_z$$

bezeichnen, und alle diese Grössen sollen sich auf die positiven Theile der drei Axen beziehen, wobei wir mit Bezug auf §. 3. zugleich im Allgemeinen bemerken, dass in allen folgenden Formeln die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, jenachdem das Auge nicht zwischen dem Anfange der Coordinaten und dessen Bilde oder zwischen dem Anfange der Coordinaten und dessen Bilde liegt.

Für den positiven Theil der Axe der x ist in den in §. 3. entwickelten Formeln $\alpha=0$, $\beta=90^0$, $\gamma=90^0$, also $\cos\alpha=1$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=0$ zu setzen. Für den positiven Theil der Axe der y muss man $\alpha=90^0$, $\beta=0$, $\gamma=90^0$, also $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=1$, $\cos\gamma=0$; und für den positiven Theil der Axe der z muss man $\alpha=90^0$, $\beta=90^0$, $\gamma=0$, also $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=1$ setzen. Für alle drei Axen ist in den erwähnten Formeln $f=0$, $g=0$, $h=0$ zu setzen.

Daher ist nach 21) für alle drei Axen

$$\mathrm{P}-\mathrm{p}=F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu,$$

und nach den am Ende von §. 3. gegebenen Formeln ist:

$$47)\quad \begin{cases} \Theta_x=\sqrt{\dfrac{G^2\sin\nu^2+2GH\cos\mu\cos\nu+H^2\sin\mu^2}{(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)^2}}, \\ \Theta_y=\sqrt{\dfrac{H^2\sin\lambda^2+2HF\cos\nu\cos\lambda+F^2\sin\nu^2}{(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)^2}}, \\ \Theta_z=\sqrt{\dfrac{F^2\sin\mu^2+2FG\cos\lambda\cos\mu+G^2\sin\lambda^2}{(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)^2}} \end{cases}$$

oder

$$48)\ \ldots \begin{cases} \Theta_x=\sqrt{\dfrac{G^2+H^2-(G\cos\nu-H\cos\mu)^2}{(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)^2}}, \\ \Theta_y=\sqrt{\dfrac{H^2+F^2-(H\cos\lambda-F\cos\nu)^2}{(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)^2}}, \\ \Theta_z=\sqrt{\dfrac{F^2+G^2-(F\cos\mu-G\cos\lambda)^2}{(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)^2}}. \end{cases}$$

Ferner ist für die positiven Theile der Axen der x, y, z nach 33) respective

$$\cos\theta=\cos\lambda,\quad \cos\theta=\cos\mu,\quad \cos\theta=\cos\nu;$$

also nach 37):

[illegible]

61)

$$\Theta_x \cos\alpha_x = [illegible]$$

$$\Theta_y \cos\alpha_y = [illegible]$$

$$\Theta_z \cos\alpha_z = [illegible]$$

$$\Theta_x \cos\beta_x = [illegible]$$

$$\Theta_y \cos\beta_y = [illegible]$$

$$\Theta_z \cos\beta_z = [illegible]$$

$$\Theta_x \cos\gamma_x = [illegible]$$

$$\Theta_y \cos\gamma_y = [illegible]$$

$$\Theta_z \cos\gamma_z = \mp \frac{F\cos\lambda + G\cos\mu}{F\cos\lambda + G\cos\mu + H\cos\nu}.$$

Die Bilder der drei Coordinaten-Axen wollen wir die Axen [illegible] nennen, wobei wir [illegible] jeder Bild-Axe einen positiven und einen negativen Theil [illegible] diese Theile die Bilder der positiven oder negativen Theile der drei entsprechenden Coordinaten-Axen [illegible] der positiven Theilen der Bild-Axen eingeschlossenen [illegible] Winkel sollen durch [illegible] bezeichnet werden. Dann ist nach einer bekannten Formel:

$$\cos(x_0 y_0) = \cos\alpha_x \cos\alpha_y + \cos\beta_x \cos\beta_y + \cos\gamma_x \cos\gamma_y,$$

$$\cos(y_0 z_0) = \cos\alpha_y \cos\alpha_z + \cos\beta_y \cos\beta_z + \cos\gamma_y \cos\gamma_z,$$

$$\cos(z_0 x_0) = \cos\alpha_z \cos\alpha_x + \cos\beta_z \cos\beta_x + \cos\gamma_z \cos\gamma_x;$$

und folglich nach den obigen Formeln:

62)

$$\cos(x_0 y_0) = -\frac{FG + (G\cos\nu - H\cos\mu)(H\cos\lambda - F\cos\nu)}{\Theta_x \Theta_y (F\cos\lambda + G\cos\mu + H\cos\nu)^2},$$

$$\cos(y_0 z_0) = -\frac{GH + (H\cos\lambda - F\cos\nu)(F\cos\mu - G\cos\lambda)}{\Theta_y \Theta_z (F\cos\lambda + G\cos\mu + H\cos\nu)^2},$$

$$\cos(z_0 x_0) = -\frac{HF + (F\cos\mu - G\cos\lambda)(G\cos\nu - H\cos\mu)}{\Theta_z \Theta_x (F\cos\lambda + G\cos\mu + H\cos\nu)^2}.$$

also nach 47) und 48):

$$
53)\quad \begin{cases}
\cos(x_0y_0) = -\dfrac{FG+(G\cos\nu-H\cos\mu)(H\cos\lambda-F\cos\nu)}{\sqrt{(G^2\sin\nu^2+2GH\cos\mu\cos\nu+H^2\sin\mu^2)(H^2\sin\lambda^2+2HF\cos\nu\cos\lambda+F^2\sin\nu^2)}}, \\[2ex]
\cos(y_0z_0) = -\dfrac{GH+(H\cos\lambda-F\cos\nu)(F\cos\mu-G\cos\lambda)}{\sqrt{(H^2\sin\lambda^2+2HF\cos\nu\cos\lambda+F^2\sin\nu^2)(F^2\sin\mu^2+2FG\cos\lambda\cos\mu+G^2\sin\lambda^2)}}, \\[2ex]
\cos(z_0x_0) = -\dfrac{HF+(F\cos\mu-G\cos\lambda)(G\cos\nu-H\cos\mu)}{\sqrt{(F^2\sin\mu^2+2FG\cos\lambda\cos\mu+G^2\sin\lambda^2)(G^2\sin\nu^2+2GH\cos\mu\cos\nu+H^2\sin\mu^2)}}
\end{cases}
$$

oder:

$$
54)\quad \begin{cases}
\cos(x_0y_0) = -\dfrac{FG+(G\cos\nu-H\cos\mu)(H\cos\lambda-F\cos\nu)}{\sqrt{\{G^2+H^2-(G\cos\nu-H\cos\mu)^2\}\{H^2+F^2-(H\cos\lambda-F\cos\nu)^2\}}}, \\[2ex]
\cos(y_0z_0) = -\dfrac{GH+(H\cos\lambda-F\cos\nu)(F\cos\mu-G\cos\lambda)}{\sqrt{\{H^2+F^2-(H\cos\lambda-F\cos\nu)^2\}\{F^2+G^2-(F\cos\mu-G\cos\lambda)^2\}}}, \\[2ex]
\cos(z_0x_0) = -\dfrac{HF+(F\cos\mu-G\cos\lambda)(G\cos\nu-H\cos\mu)}{\sqrt{\{F^2+G^2-(F\cos\mu-G\cos\lambda)^2\}\{G^2+H^2-(G\cos\nu-H\cos\mu)^2\}}}.
\end{cases}
$$

Auch sind die Zähler dieser Brüche nach der Reihe:

$$(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)(F\cos\mu+G\cos\lambda)-(F^2+G^2+H^2)\cos\lambda\cos\mu,$$

$$(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)(G\cos\nu+H\cos\mu)-(F^2+G^2+H^2)\cos\mu\cos\nu,$$

[illegible] $(H\cos\lambda+F\cos\nu)-(F^2+G^2+H^2)\cos\nu\cos\lambda.$

Mittelst leichter Rechnung findet man ferner:

$$55)\quad \begin{cases} \sin(x_0y_0)=\sqrt{\dfrac{(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)^2H^2}{(G^2\sin\nu^2+2GH\cos\mu\cos\nu+H^2\sin\mu^2)(H^2\sin\lambda^2+2HF\cos\nu\cos\lambda+F^2\sin\nu^2)}}, \\ \sin(y_0z_0)=\sqrt{\dfrac{(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)^2F^2}{(H^2\sin\lambda^2+2HF\cos\nu\cos\lambda+F^2\sin\nu^2)(F^2\sin\mu^2+2FG\cos\lambda\cos\mu+G^2\sin\lambda^2)}}, \\ \sin(z_0x_0)=\sqrt{\dfrac{(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)^2G^2}{(F^2\sin\mu^2+2FG\cos\lambda\cos\mu+G^2\sin\lambda^2)(G^2\sin\nu^2+2GH\cos\mu\cos\nu+H^2\sin\mu^2)}}; \end{cases}$$

also:

$$56)\quad \begin{cases} \tan(x_0y_0)=-\dfrac{\sqrt{(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)^2H^2}}{FG+(G\cos\nu-H\cos\mu)(H\cos\lambda-F\cos\nu)}, \\ \tan(y_0z_0)=-\dfrac{\sqrt{(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)^2F^2}}{GH+(H\cos\lambda-F\cos\nu)(F\cos\mu-G\cos\lambda)}, \\ \tan(z_0x_0)=-\dfrac{\sqrt{(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)^2G^2}}{HF+(F\cos\mu-G\cos\lambda)(G\cos\nu-H\cos\mu)}; \end{cases}$$

wo die Quadratwurzeln in den Zählern auf keinen Fall wirklich ausgezogen werden dürfen, wenn die den Tangenten zukommenden Zeichen nicht alterirt werden sollen, oder man müsste schreiben:

57) $$\begin{cases} \tan(x_0y_0) = -\dfrac{\text{val. abs.}(F\cos\lambda + G\cos\mu + H\cos\nu)H}{FG + (G\cos\nu - H\cos\mu)(H\cos\lambda - F\cos\nu)}, \\ \tan(y_0z_0) = -\dfrac{\text{val. abs.}(F\cos\lambda + G\cos\mu + H\cos\nu)F}{GH + (H\cos\lambda - F\cos\nu)(F\cos\mu - G\cos\lambda)}, \\ \tan(z_0x_0) = -\dfrac{\text{val. abs.}(F\cos\lambda + G\cos\mu + H\cos\nu)G}{HF + (F\cos\mu - G\cos\lambda)(G\cos\nu - H\cos\mu)}. \end{cases}$$

Auch erhellet aus dem Obigen leicht, dass

58)

$$\cot(x_0y_0)$$
$$= \frac{F^2 + G^2 + H^2}{\text{val. abs.}(F\cos\lambda + G\cos\mu + H\cos\nu)H}\cos\lambda\cos\mu \mp \frac{F\cos\mu + G\cos\lambda}{\text{val. abs. } H},$$

$$\cot(y_0z_0)$$
$$= \frac{F^2 + G^2 + H^2}{\text{val. abs.}(F\cos\lambda + G\cos\mu + H\cos\nu)F}\cos\mu\cos\nu \mp \frac{G\cos\nu + H\cos\mu}{\text{val. abs. } F},$$

$$\cot(z_0x_0)$$
$$= \frac{F^2 + G^2 + H^2}{\text{val. abs.}(F\cos\lambda + G\cos\mu + H\cos\nu)G}\cos\nu\cos\lambda \mp \frac{H\cos\lambda + F\cos\nu}{\text{val. abs. } G}$$

ist, wenn man in diesen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse $F\cos\lambda + G\cos\mu + H\cos\nu$ positiv oder negativ ist.

§. 7.

Die drei Fundamental-Punkte.

Die drei Punkte, in welchen die Tafel von drei durch das Auge parallel mit den Coordinaten-Axen gelegten Geraden geschnitten wird, sind die Punkte, durch welche die Bilder aller den Coordinaten-Axen parallelen Geraden gehen, und sollen im Folgenden die Fundamental-Punkte genannt werden. Dass auch die Bilder der Coordinaten-Axen selbst durch diese drei Punkte gehen, und die drei Fundamental-Punkte daher jederzeit

in den drei Bild-Axen liegen, versteht sich von selbst. So wie die Fundamental-Punkte durch die Durchschnitte der durch das Auge parallel mit den Axen der x, y, z gelegten Geraden mit der Tafel gebildet werden, wollen wir dieselben der Reihe nach durch X_0, Y_0, Z_0 bezeichnen.

Die, jenachdem die Fundamental-Punkte X_0, Y_0, Z_0 in den positiven oder negativen Theilen der Bild-Axen liegen, als positiv oder negativ betrachteten Entfernungen der Punkte X_0, Y_0, Z_0 von dem Bilde des Anfangs-Punktes der Coordinaten sollen respective durch A_0, B_0, C_0 bezeichnet werden, und wir wollen nun diese drei Entfernungen zu bestimmen suchen.

Weil die Gleichung der Tafel

$$(x-a)\cos\lambda+(y-b)\cos\mu+(z-c)\cos\nu=0$$

ist, so sind die Coordinaten der Punkte X_0, Y_0, Z_0 offenbar respective:

$$a-\frac{(G-b)\cos\mu+(H-c)\cos\nu}{\cos\lambda},\quad G,\quad H;$$

$$F,\quad b-\frac{(F-a)\cos\lambda+(H-c)\cos\nu}{\cos\mu},\quad H;$$

$$F,\quad G,\quad c-\frac{(F-a)\cos\lambda+(G-b)\cos\mu}{\cos\nu};$$

oder, wie sogleich erhellet:

$$F-\frac{\mathrm{P}}{\cos\lambda},\quad G,\quad H,$$

$$F,\quad G-\frac{\mathrm{P}}{\cos\mu},\quad H,$$

$$F,\quad G,\quad H-\frac{\mathrm{P}}{\cos\nu}.$$

Offenbar sind diese Coordinaten aber auch, mögen nun A_0, B_0, C_0 positiv oder negativ sein, wobei man nur immer festzuhalten hat, dass die Winkel α_x, β_x, γ_x; α_y, β_y, γ_y; α_z, β_z, γ_z den positiven Theilen der Bild-Axen entsprechen, in völliger Allgemeinheit:

$$f_0+A_0\cos\alpha_x,\quad g_0+A_0\cos\beta_x,\quad h_0+A_0\cos\gamma_x;$$

$$f_0+B_0\cos\alpha_y,\quad g_0+B_0\cos\beta_y,\quad h_0+B_0\cos\gamma_y;$$

$$f_0+C_0\cos\alpha_z,\quad g_0+C_0\cos\beta_z,\quad h_0+C_0\cos\gamma_z;$$

und wir haben daher die folgenden Gleichungen:

$$F-\frac{P}{\cos\lambda}=f_0+A_0\cos\alpha_x,\quad G=g_0+A_0\cos\beta_x,\quad H=h_0+A_0\cos\gamma_x;$$

$$F=f_0+B_0\cos\alpha_y,\quad G-\frac{P}{\cos\mu}=g_0+B_0\cos\beta_y,\quad H=h_0+B_0\cos\gamma_y;$$

$$F=f_0+C_0\cos\alpha_z,\quad G=g_0+C_0\cos\beta_z,\quad H-\frac{P}{\cos\nu}=h_0+C_0\cos\gamma_z;$$

aus denen sich die folgenden Formeln ergeben:

$$A_0\cos\alpha_x=F-f_0-\frac{P}{\cos\lambda},$$

$$B_0\cos\beta_y=G-g_0-\frac{P}{\cos\mu},$$

$$C_0\cos\gamma_z=H-h_0-\frac{P}{\cos\nu};$$

also, weil nach 45) offenbar

$$F-f_0=\frac{PF}{F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu},$$

$$G-g_0=\frac{PG}{F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu},$$

$$H-h_0=\frac{PH}{F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu}$$

ist:

$$A_0\cos\alpha_x=-\frac{P(G\cos\mu+H\cos\nu)}{(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)\cos\lambda},$$

$$B_0\cos\beta_y=-\frac{P(F\cos\lambda+H\cos\nu)}{(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)\cos\mu},$$

$$C_0\cos\gamma_z=-\frac{P(F\cos\lambda+G\cos\mu)}{(F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu)\cos\nu};$$

folglich, wenn man für

$$\cos\alpha_x,\quad \cos\beta_y,\quad \cos\gamma_z$$

ihre Werthe aus §. 6. einführt:

$$59)\ \ldots\ A_0=\mp\frac{P\Theta_x}{\cos\lambda},\quad B_0=\mp\frac{P\Theta_y}{\cos\mu},\quad C_0=\mp\frac{P\Theta_z}{\cos\nu}$$

oder

$$60)\ A_0=\mp P\Theta_x\sec\lambda,\quad B_0=\mp P\Theta_y\sec\mu,\quad C_0=\mp P\Theta_z\sec\nu;$$

wo man die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen hat, jenachdem das Auge nicht zwischen dem Anfange der Coordinaten und dessen Bilde, oder zwischen dem Anfange der Coordinaten und dessen Bilde liegt. Mittelst der obigen Formeln können A_0, B_0, C_0 immer ohne alle Zweideutigkeit bestimmt werden.

§. 8.

Die perspectivischen Coordinaten eines Punktes.

Unter den perspectivischen Coordinaten eines Punktes verstehen wir die auf den Bild-Axen liegenden Bilder seiner wirklichen Coordinaten, welche offenbar die mit ihren gehörigen Zeichen genommenen Entfernungen der Bilder der Endpunkte seiner wirklichen Coordinaten von dem Bilde des Anfangs der Coordinaten sind. Diese perspectivischen Coordinaten des Punktes (fgh), nämlich die Bilder der Coordinaten f, g, h, wollen wir respective durch f_x, g_y, h_z bezeichnen, und nun zu bestimmen suchen.

Die Coordinaten der Endpunkte von

$$f,\ g,\ h$$

sind respective:

$$f,\ 0,\ 0;\quad 0,\ g,\ 0;\quad 0,\ 0,\ h.$$

Also sind nach 22), wenn wir der Kürze wegen

$$\mathrm{p}_x=(f-a)\cos\lambda-b\cos\mu-c\cos\nu,$$

$$\mathrm{p}_y=-a\cos\lambda+(g-b)\cos\mu-c\cos\nu,$$

$$\mathrm{p}_z=-a\cos\lambda-b\cos\mu+(h-c)\cos\nu$$

setzen, die Coordinaten der Bilder der Endpunkte der Coordinaten

$$f,\ g,\ h$$

respective:

$$f-\frac{\mathrm{p}_x}{\mathrm{P}-\mathrm{p}_x}(F-f),\quad -\frac{\mathrm{p}_x}{\mathrm{P}-\mathrm{p}_x}G,\quad -\frac{\mathrm{p}_x}{\mathrm{P}-\mathrm{p}_x}H;$$

$$-\frac{\mathrm{p}_y}{\mathrm{P}-\mathrm{p}_y}F,\quad g-\frac{\mathrm{p}_y}{\mathrm{P}-\mathrm{p}_y}(G-g),\quad -\frac{\mathrm{p}_y}{\mathrm{P}-\mathrm{p}_y}H;$$

$$-\frac{\mathrm{p}_z}{\mathrm{P}-\mathrm{p}_z}F,\quad -\frac{\mathrm{p}_z}{\mathrm{P}-\mathrm{p}_z}G,\quad h-\frac{\mathrm{p}_z}{\mathrm{P}-\mathrm{p}_z}(H-h).$$

Offenbar sind diese Coordinaten aber auch:

$$f_0+f_x\cos\alpha_x,\quad g_0+f_x\cos\beta_x,\quad h_0+f_x\cos\gamma_x;$$
$$f_0+g_y\cos\alpha_y,\quad g_0+g_y\cos\beta_y,\quad h_0+g_y\cos\gamma_y;$$
$$f_0+h_z\cos\alpha_z,\quad g_0+h_z\cos\beta_z,\quad h_0+h_z\cos\gamma_z;$$

woraus sich, wenn man dies mit dem Obigen vergleicht, eine Reihe von Gleichungen zur Bestimmung von f_x, g_y, h_z ergiebt, von denen wir zu dieser Bestimmung der Symmetrie wegen die folgenden wählen wollen:

$$f-\frac{\mathrm{p}_x}{\mathrm{P}-\mathrm{p}_x}(F-f)=f_0+f_x\cos\alpha_x,$$

$$g-\frac{\mathrm{p}_y}{\mathrm{P}-\mathrm{p}_y}(G-g)=g_0+g_y\cos\beta_y,$$

$$h-\frac{\mathrm{p}_z}{\mathrm{P}-\mathrm{p}_z}(H-h)=h_0+h_z\cos\gamma_z$$

oder:

$$f_x\cos\alpha_x=f-f_0-\frac{\mathrm{p}_x}{\mathrm{P}-\mathrm{p}_x}(F-f),$$

$$g_y\cos\beta_y=g-g_0-\frac{\mathrm{p}_y}{\mathrm{P}-\mathrm{p}_y}(G-g),$$

$$h_z\cos\gamma_z=h-h_0-\frac{\mathrm{p}_z}{\mathrm{P}-\mathrm{p}_z}(H-h).$$

Setzen wir der Kürze wegen

61) . . . . $\varDelta=F\cos\lambda+G\cos\mu+H\cos\nu,$

so ist nach 45) und 14):

$$f_0=\frac{\Pi}{\varDelta}F,\quad g_0=\frac{\Pi}{\varDelta}G,\quad h_0=\frac{\Pi}{\varDelta}H;$$

und nach dem Obigen ist offenbar:

$$\mathrm{p}_x=f\cos\lambda-\Pi,$$
$$\mathrm{p}_y=g\cos\mu-\Pi,$$
$$\mathrm{p}_z=h\cos\nu-\Pi$$

so wie nach 21):

$$\mathrm{P}-\mathrm{p}_x=\varDelta-f\cos\lambda,$$
$$\mathrm{P}-\mathrm{p}_y=\varDelta-g\cos\mu,$$
$$\mathrm{P}-\mathrm{p}_z=\varDelta-h\cos\nu.$$

Folglich hat man nach dem Obigen zur Bestimmung von f_z, g_y, h_z die folgenden Gleichungen:

$$f_z\cos\alpha_z=f-\frac{\Pi}{\Delta}F-\frac{f\cos\lambda-\Pi}{\Delta-f\cos\lambda}(F-f),$$

$$g_y\cos\beta_y=g-\frac{\Pi}{\Delta}G-\frac{g\cos\mu-\Pi}{\Delta-g\cos\mu}(G-g),$$

$$h_z\cos\gamma_z=h-\frac{\Pi}{\Delta}H-\frac{h\cos\nu-\Pi}{\Delta-h\cos\nu}(H-h);$$

woraus sich mittelst leichter Rechnung

$$f_z\cos\alpha_z=\frac{(\Delta-\Pi)(\Delta-F\cos\lambda)}{\Delta(\Delta-f\cos\lambda)}f,$$

$$g_y\cos\beta_y=\frac{(\Delta-\Pi)(\Delta-G\cos\mu)}{\Delta(\Delta-g\cos\mu)}g,$$

$$h_z\cos\gamma_z=\frac{(\Delta-\Pi)(\Delta-H\cos\nu)}{\Delta(\Delta-h\cos\nu)}h$$

ergiebt. Nun ist aber nach 49), 50), 51) offenbar:

$$\cos\alpha_z=\pm\frac{\Delta-F\cos\lambda}{\Delta\Theta_x},\quad \cos\beta_y=\pm\frac{\Delta-G\cos\mu}{\Delta\Theta_y},$$

$$\cos\gamma_z=\pm\frac{\Delta-H\cos\nu}{\Delta\Theta_z};$$

also nach gehöriger Substitution in die obigen Gleichungen:

$$f_z=\pm\frac{(\Delta-\Pi)\Theta_x f}{\Delta-f\cos\lambda},\quad g_y=\pm\frac{(\Delta-\Pi)\Theta_y g}{\Delta-g\cos\mu},\quad h_z=\pm\frac{(\Delta-\Pi)\Theta_z h}{\Delta-h\cos\nu}$$

oder, weil offenbar

$$\mathrm{P}=\Delta-\Pi$$

ist:

$$62)\quad f_z=\pm\frac{\mathrm{P}\Theta_x f}{\Delta-f\cos\lambda},\quad g_y=\pm\frac{\mathrm{P}\Theta_y g}{\Delta-g\cos\mu},\quad h_z=\pm\frac{\mathrm{P}\Theta_z h}{\Delta-h\cos\nu};$$

in welchen Formeln man die oberen oder unteren Zeichen nehmen muss, jenachdem das Auge nicht zwischen dem Anfange der Coordinaten und dessen Bilde oder zwischen dem Anfange der Coordinaten und dessen Bilde liegt.

Auch kann man nach 50) allgemein

$$63) \ldots \begin{cases} f_x = -A_0 \dfrac{f\cos\lambda}{\Delta - f\cos\lambda}, \quad g_y = -B_0 \dfrac{g\cos\mu}{\Delta - g\cos\mu}, \\ h_z = -C_0 \dfrac{h\cos\nu}{\Delta - h\cos\nu} \end{cases}$$

setzen.

§. 9.

Zusammenstellung aller Formeln zur Berechnung der perspectivischen Coordinaten.*

Am bequemsten scheinen sich die perspectivischen Coordinaten f_x, g_y, h_z des Punktes (fgh) nach den folgenden Formeln berechnen zu lassen:

$$\Delta = F\cos\lambda + G\cos\mu + H\cos\nu,$$

$$\mathrm{P} = (F-a)\cos\lambda + (G-b)\cos\mu + (H-c)\cos\nu;$$

$$\Theta_x = \sqrt{\frac{G^2\sin\nu^2 + 2GH\cos\mu\cos\nu + H^2\sin\mu^2}{\Delta^2}},$$

$$\Theta_y = \sqrt{\frac{H^2\sin\lambda^2 + 2HF\cos\nu\cos\lambda + F^2\sin\nu^2}{\Delta^2}},$$

$$\Theta_z = \sqrt{\frac{F^2\sin\mu^2 + 2FG\cos\lambda\cos\mu + G^2\sin\lambda^2}{\Delta^2}};$$

$$A_0 = \mp\frac{\mathrm{P}\Theta_x}{\cos\lambda}, \quad B_0 = \mp\frac{\mathrm{P}\Theta_y}{\cos\mu}, \quad C_0 = \mp\frac{\mathrm{P}\Theta_z}{\cos\nu};$$

$$f_x = -A_0\frac{f\cos\lambda}{\Delta - f\cos\lambda}, \quad g_y = -B_0\frac{g\cos\mu}{\Delta - g\cos\mu}, \quad h_z = -C_0\frac{h\cos\nu}{\Delta - h\cos\nu};$$

die oberen oder unteren Zeichen genommen, jenachdem das Auge nicht zwischen dem Anfange der Coordinaten und dessen Bilde oder zwischen dem Anfange der Coordinaten und dessen Bilde liegt.

Man hat nicht unbeachtet zu lassen, dass die Grössen

$$\Delta,\ \mathrm{P};\quad \Theta_x,\ \Theta_y,\ \Theta_z;\quad A_0,\ B_0,\ C_0$$

sämmtlich Constanten sind, die bei der Berechnung der perspectivischen Coordinaten aller Punkte in Anwendung kommen, und daher nur ein Mal zu berechnen sind. Dasselbe gilt von den

Winkeln (x_0y_0), (y_0z_0), (z_0x_0), die mittelst der in §. 6. entwickelten Formeln auf verschiedene Arten berechnet werden können.

§. 10.

Perspectivische Entwerfung gegebener Punkte oder überhaupt gegebener Gegenstände durch Construction.

Wenn man die Bilder gegebener Punkte, überhaupt einen perspectivischen Plan oder Riss eines gegebenen Gegenstandes auf einer der Lage nach gegebenen Tafel für einen gegebenen Ort des Auges entwerfen soll, so berechnet man zuerst die Winkel (x_0y_0), (y_0z_0), (z_0x_0) nach den in §. 6., und die Constanten

$$\Delta,\ \mathrm{P};\quad \Theta_x,\ \Theta_y,\ \Theta_z;\quad \mathrm{A}_0,\ \mathrm{B}_0,\ \mathrm{C}_0$$

nach den in §. 9. gegebenen Formeln, wobei man der Controle bei der Berechnung der obigen Winkel wegen zu beachten hat, dass natürlich immer

$$(x_0y_0)+(y_0z_0)+(z_0x_0)=360^\circ$$

sein muss.

Nun nehme man auf der Tafel, auf welcher die Zeichnung entworfen werden soll, einen Punkt O (Fig. 1.) beliebig an, welcher das Bild des Anfangspunkts der Coordinaten vorstellt, und trage um denselben als Spitze herum die drei vorher berechneten Winkel (x_0y_0), (y_0z_0), (z_0x_0) neben einander auf, so sind die Schenkel dieser Winkel die positiven Theile der drei Bild-Axen, und geben, rückwärts über O hinaus verlängert, die negativen Theile dieser Axen, also die drei Bild-Axen überhaupt. Die positiven Theile der den Coordinaten-Axen der x, y, z entsprechenden Bild-Axen wollen wir in der Figur respective durch OX, OY, OZ bezeichnen. Hierauf tragen wir die drei vorher berechneten Entfernungen A_0, B_0, C_0 mit gehöriger Berücksichtigung ihrer Vorzeichen von O aus auf die drei Bild-Axen auf, so liefern uns die Endpunkte X_0, Y_0, Z_0 dieser drei Entfernungen die drei Fundamental-Punkte, und wir haben nun alle festen Grundlagen, welche nothwendig sind, um die Bilder aller gegebenen Punkte auf der Tafel entwerfen zu können. Dass auf diesen Theil der Zeichnung ganz besondere Sorgfalt verwandt werden muss, versteht sich von selbst, da er die Grundlage aller folgenden Operationen bildet.

Wir wollen nun den Punkt (fgh) als einen allgemeinen Repräsentanten aller zu entwerfenden Punkte betrachten, und ihn durch M (Fig. 2.) bezeichnen. Für diesen Punkt berechnen wir jetzt nach den in §. 9. gegebenen Formeln die perspectivischen Coordinaten f_x, g_y, h_z, und tragen dieselben mit gehöriger Berücksichtigung ihrer Vorzeichen von O aus auf die drei Bild-Axen auf, wodurch wir in Fig. 1. die Punkte X_1, Y_1, Z_1 als die Endpunkte der perspectivischen Coordinaten erhalten. Nun wollen wir uns von dem Punkte M (Fig. 2.) im Raume etwa auf die Ebene der xy ein Perpendikel gefällt denken, und dessen Fusspunkt durch M' bezeichnen. Ferner denken wir uns von M' in der Ebene der xy auf die Axen der x und y Perpendikel gefällt, und bezeichnen deren Fusspunkte durch N_x und N_y. Weil die Linie $M'N_y$ der Axe der x parallel ist, so geht ihr Bild durch den Punkt X_0 (Fig. 1.); da aber N_y in der Linie $M'N_y$ liegt und bekanntlich Y_1 (Fig. 1.) das Bild von N_y ist, so muss das Bild der Linie $M'N_y$ auch durch Y_1 (Fig. 1.) gehen, und dieses Bild der Linie $M'N_y$ wird also erhalten, wenn man in Fig. 1. die Linie X_0Y_1 zieht. Ganz eben so erhält man das Bild der Linie $M'N_x$, wenn man in Fig. 1. die Linie Y_0X_1 zieht, und der Durchschnittspunkt M_{xy} der Linien X_0Y_1 und Y_0X_1 in Fig. 1. ist also das Bild des Punktes M'. Betrachten wir nun die der Axe der z parallele Linie MM' (Fig. 2.), so muss ihr Bild durch den Punkt Z_0 (Fig. 1.), nach dem Vorhergehenden aber auch durch den Punkt M_{xy} (Fig. 1.) gehen, und wird daher erhalten, wenn man in Fig. 1. die Linie $M_{xy}Z_0$ zieht, in welcher Linie also auch das gesuchte Bild des Punktes M liegen muss. Durch ganz ähnliche Constructionen kann man noch zwei andere Linien finden, in denen das Bild des Punktes M liegen muss, nämlich in Fig. 1. die Linien $M_{yz}X_0$ und $M_{zx}Y_0$, worauf dann die drei Linien $M_{xy}Z_0$, $M_{yz}X_0$, $M_{zx}Y_0$ in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte M_1 (Fig. 1.) das gesuchte Bild des Punktes M (Fig. 2.) im Raume geben.

Hieraus ergiebt sich nun, nachdem man die vorher berechneten perspectivischen Coordinaten des Punktes (fgh) auf die Bild-Axen aufgetragen, und dadurch in Fig. 1. die Punkte X_1, Y_1, Z_1 erhalten hat, die folgende merkwürdige Construction des Bildes des Punktes (fgh).

Man zieht die Linien

X_0Y_1	und	Y_0X_1	mit dem Durchschnittspunkte	M_{xy},
Y_0Z_1	„	Z_0Y_1	„ „ „	M_{yz},
Z_0X_1	„	X_0Z_1	„ „ „	M_{zx}.

Dann zieht man die Linien

$$M_{xy}Z_0, \quad M_{yz}X_0, \quad M_{xz}Y_0,$$

so ist deren gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt M_1 das gesuchte Bild des Punktes (fgh).

Natürlich ist nur die Construction zweier der Linien $M_{xy}Z_0$, $M_{yz}X_0$, $M_{xz}Y_0$ zur Bestimmung des Bildes M_1 des Punktes (fgh) nothwendig; die dritte Linie bietet aber eine erwünschte Controle für die Richtigkeit der Zeichnung überhaupt dar; und dass man bei der praktischen Ausführung die obigen Linien nicht vollständig ausziehen, sondern sein Augenmerk überall bloss auf die möglichst genaue Ermittelung der betreffenden Durchschnittspunkte richten wird, versteht sich von selbst, weil sonst die Zeichnung des ganzen Risses des zu entwerfenden Gegenstandes zu sehr mit Linien überladen werden würde.

Anmerkung.

Aus dieser Construction ergiebt sich auch der folgende bemerkenswerthe geometrische

Lehrsatz.

Wenn in einer Ebene durch einen beliebigen Punkt O derselben drei beliebige gerade Linien gezogen, und auf jeder dieser drei geraden Linien ganz willkührlich zwei Punkte

$$X_0, X_1; \quad Y_0, Y_1; \quad Z_0, Z_1$$

angenommen, dann die Linien

$$X_0Y_1, \; Y_0X_1; \quad Y_0Z_1, \; Z_0Y_1; \quad Z_0X_1, \; X_0Z_1$$

gezogen, und die Durchschnittspunkte

$$M_{xy}, \quad M_{yz}, \quad M_{xz}$$

jedes dieser drei Paare von Linien bestimmt werden; so schneiden sich jederzeit sowohl die drei Linien

$$M_{xy}Z_0, \quad M_{yz}X_0, \quad M_{xz}Y_0$$

als auch die drei Linien

$$M_{xy}Z_1, \quad M_{yz}X_1, \quad M_{xz}Y_1$$

in einem und demselben Punkte.

§. 11.

Betrachtung des Falls, wenn die von dem Anfangspunkte der Coordinaten nach dem Auge gezogene Gerade auf der Tafel senkrecht steht.

Die von dem Anfangspunkte der Coordinaten nach dem Auge gezogene Gerade wollen wir als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem sie mit dem von dem Anfangspunkte der Coordinaten auf die Tafel gefällten Perpendikel gleichstimmig oder entgegengesetzt liegt, und mit Rücksicht hierauf durch E bezeichnen. Dann ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$64) \ldots \quad F = E\cos\lambda, \quad G = E\cos\mu, \quad H = E\cos\nu;$$

also nach §. 9.:

$$65) \ldots \left\{\begin{array}{l} \Delta = E(\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2) = E, \\ P = E - (a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu). \end{array}\right.$$

Ferner ist nach 47) oder §. 9. offenbar:

$$\Theta_x = \sqrt{\cos\mu^2\sin\nu^2 + 2\cos\mu^2\cos\nu^2 + \sin\mu^2\cos\nu^2},$$
$$\Theta_y = \sqrt{\cos\nu^2\sin\lambda^2 + 2\cos\nu^2\cos\lambda^2 + \sin\nu^2\cos\lambda^2},$$
$$\Theta_z = \sqrt{\cos\lambda^2\sin\mu^2 + 2\cos\lambda^2\cos\mu^2 + \sin\lambda^2\cos\mu^2};$$

woraus man leicht

$$\Theta_x = \sqrt{\cos\mu^2 + \cos\nu^2},$$
$$\Theta_y = \sqrt{\cos\nu^2 + \cos\lambda^2},$$
$$\Theta_z = \sqrt{\cos\lambda^2 + \cos\mu^2};$$

also:

$$66) \ldots \quad \Theta_x = \sin\lambda, \quad \Theta_y = \sin\mu, \quad \Theta_z = \sin\nu$$

erhält.

Weil offenbar

$$F\cos\mu - G\cos\lambda = 0, \quad G\cos\nu - H\cos\mu = 0, \quad H\cos\lambda - F\cos\nu = 0$$

ist, so ergiebt sich aus 52) auf der Stelle:

$$67) \ldots \left\{\begin{array}{l} \cos(x_0y_0) = -\cot\lambda\cot\mu, \\ \cos(y_0z_0) = -\cot\mu\cot\nu, \\ \cos(z_0x_0) = -\cot\nu\cot\lambda. \end{array}\right.$$

Ferner ist nach §. 9., wie man sogleich übersieht:

$$68) \cdot \begin{cases} A_0 = \mp\{E-(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu)\}\operatorname{tang}\lambda, \\ B_0 = \mp\{E-(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu)\}\operatorname{tang}\mu, \\ C_0 = \mp\{E-(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu)\}\operatorname{tang}\nu; \end{cases}$$

die oberen oder unteren Zeichen hier und im Folgenden genommen, jenachdem das Auge nicht zwischen dem Anfange der Coordinaten und dessen Bilde oder zwischen dem Anfange der Coordinaten und dessen Bilde liegt; und:

69)

$$f_x = -A_0\frac{f\cos\lambda}{E-f\cos\lambda}, \quad g_y = -B_0\frac{g\cos\mu}{E-g\cos\mu}, \quad h_z = -C_0\frac{h\cos\nu}{E-h\cos\nu};$$

oder:

$$f_x = \pm\frac{\{E-(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu)\}f\sin\lambda}{E-f\cos\lambda},$$

$$g_y = \pm\frac{\{E-(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu)\}g\sin\mu}{E-g\cos\mu},$$

$$h_z = \pm\frac{\{E-(a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu)\}h\sin\nu}{E-h\cos\nu};$$

oder:

$$f_x = \pm\frac{\{1-\frac{a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu}{E}\}f\sin\lambda}{1-\frac{f\cos\lambda}{E}},$$

$$g_y = \pm\frac{\{1-\frac{a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\mu}{E}\}g\sin\mu}{1-\frac{g\cos\mu}{E}},$$

$$h_z = \pm\frac{\{1-\frac{a\cos\lambda+b\cos\mu+c\cos\nu}{E}\}h\sin\nu}{1-\frac{h\cos\nu}{E}};$$

woraus man sieht, dass für eine unendlich grosse Entfernung des Auges vom Anfange der Coordinaten

$$70) \ldots f_x = \pm f\sin\lambda, \quad g_y = \pm g\sin\mu, \quad h_z = \pm h\sin\nu$$

ist. Die Grössen A_0, B_0, C_0 werden für ein unendlich grosses E selbst unendlich gross, wie aus den obigen Ausdrücken 68) dieser Grössen auf der Stelle erhellet.

§. 12.

Einführung blosser Winkel statt der Coordinaten der zu entwerfenden Punkte.

Alle im Vorhergehenden entwickelten Formeln, so weit dieselben die zu entwerfenden Punkte betreffen, sind durch die Coordinaten f, g, h dieser Punkte ausgedrückt worden, weil dies einmal der Natur der Sache gemäss ist, und dann auch gewiss in vielen Fällen die Lage der Punkte der perspectivisch aufzunehmenden Gegenstände durch unmittelbare Messung ihrer Coordinaten bestimmt worden ist, in der That also diese Coordinaten als die eigentlichen, der Zeichnung des perspectivischen Risses zu Grunde zu legenden Data zu betrachten sind. Nun aber fällt auf der Stelle in die Augen, dass allen Punkten der durch das Auge (FGH) und den Punkt (fgh) gehenden Geraden ganz dasselbe Bild entspricht, und dass man also, um das Bild des Punktes (fgh) zu construiren, überhaupt bloss das Bild eines ganz beliebigen, in der in Rede stehenden Geraden liegenden Punktes zu entwerfen braucht, so dass es also verstattet ist, in die im Obigen entwickelten Formeln für f, g, h die Coordinaten eines beliebigen, in der durch das Auge (FGH) und den Punkt (fgh) gehenden Geraden liegenden Punktes einzuführen. Hat man nun die, 180° nicht übersteigenden Winkel u, v, w gemessen, welche die von dem Auge (FGH) aus nach dem Punkte (fgh) hin gezogene Gerade mit den positiven Theilen dreier durch das Auge gelegter, den primitiven Coordinaten-Axen paralleler Axen einschliesst, und bezeichnet R eine beliebige positive Länge oder Entfernung, so sind

$$R\cos u, \quad R\cos v, \quad R\cos w$$

jedenfalls die Coordinaten eines Punktes in der in Rede stehenden Geraden in Bezug auf das, durch das Auge gelegte secundäre System, und die Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf das primitive System sind also

$$F+R\cos u, \quad G+R\cos v, \quad H+R\cos w.$$

Daher werden wir in unsern obigen Formeln

$$71) \ldots\ldots \begin{cases} f=F+R\cos u, \\ g=G+R\cos v, \\ h=H+R\cos w \end{cases}$$

zu setzen berechtigt sein, wo für R jede ganz beliebige positive Länge oder Entfernung gesetzt werden kann. Was aber die Winkel u, v, w betrifft, so ist der Theodolit ein sehr zweckmässiges Instrument, mit welchem man, wenn nur, was gewiss immer verstattet und in allen Fällen jedenfalls das Zweckmässigste sein wird, die Ebene der xy horizontal annimmt, ganz in der gewöhnlichen Weise messen kann: 1. mit dem Horizontal- oder Azimuthalkreise den von der Projection der von dem Auge (FGH) nach dem Punkte (fgh) gezogenen Geraden auf der durch das Auge gelegten secundären xy-Ebene mit dem positiven Theile der secundären x-Axe eingeschlossenen Winkel ω, indem man diesen Winkel stets positiv von dem positiven Theile der secundären x-Axe an nach dem positiven Theile der secundären y-Axe hin von 0 bis 360° zählt; und 2. mit dem Vertikal- oder Höhenkreise den 90° nicht übersteigenden Neigungswinkel der von dem Auge (FGH) nach dem Punkte (fgh) gezogenen Geraden gegen die durch das Auge gelegte secundäre xy-Ebene, indem man diesen Winkel als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem der Punkt (fgh) auf der positiven oder auf der negativen Seite der durch das Auge gelegten secundären xy-Ebene liegt, und mit Rücksicht hierauf durch $\overline{\omega}$ bezeichnet. Hat man diese beiden Winkel durch Messung mit dem Theodoliten bestimmt, so findet man die Winkel u, v, w mittelst der folgenden ganz allgemein gültigen Formeln:

$$72) \ldots\ldots \begin{cases} \cos u=\cos\omega\cos\overline{\omega}, \\ \cos v=\sin\omega\cos\overline{\omega}, \\ \cos w=\sin\overline{\omega}; \end{cases}$$

oder kann in allen früheren Formeln für ein beliebiges positives R immer

$$73) \ldots\ldots \begin{cases} f=F+R\cos\omega\cos\overline{\omega}, \\ g=G+R\sin\omega\cos\overline{\omega}, \\ h=H+R\sin\overline{\omega} \end{cases}$$

setzen.

Hieraus sieht man, dass ein möglichst kleiner, aber zweckmässig eingerichteter Theodolit das bequemste Instrument zu per-

spectivischen Aufnahmen ist, und mittelst desselben wird man durch blosse Winkelmessungen aus einem einzigen Standpunkte, dem Orte des Auges, von jedem Gegenstande einen perspectivischen Riss oder Plan nach der im Obigen entwickelten Methode entwerfen können.

§. 12.

Weitere Betrachtung der Länge des Bildes der Entfernung zweier Punkte von einander.

Es würde hier zu weit führen, wenn ich in alle im Obigen entwickelte Ausdrücke und Formeln die nach Anleitung des vorhergehenden Paragraphen mit dem Theodoliten gemessenen Winkel statt der Coordinaten der betreffenden Punkte einführen wollte. Daher begnüge ich mich, nur noch einige Betrachtungen über den in §. 5. entwickelten Ausdruck 42) für die Länge L_1 des Bildes der Entfernung zweier Punkte (fgh) und $(f'g'h')$ von einander folgen zu lassen.

Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem Auge (FGH) nach den Punkten (fgh) und $(f'g'h')$ gezogenen Geraden mit den positiven Theilen der Coordinaten-Axen einschliessen, seien respective u, v, w und u', v', w'; so können wir nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$f=F+R\cos u,\qquad f'=F+R'\cos u',$$
$$g=G+R\cos v,\qquad g'=G+R'\cos v',$$
$$h=H+R\cos w;\qquad h'=H+R'\cos w';$$

also:

$$F-f=-R\cos u,\qquad F-f'=-R'\cos u',$$
$$G-g=-R\cos v,\qquad G-g'=-R'\cos v',$$
$$H-h=-R\cos w;\qquad H-h'=-R'\cos w'$$

setzen. Dadurch erhalten wir

$$\mathrm{P}-\mathrm{p}=-R(\cos\lambda\cos u+\cos\mu\cos v+\cos\nu\cos w),$$
$$\mathrm{P}-\mathrm{p}'=-R'(\cos\lambda\cos u'+\cos\mu\cos v'+\cos\nu\cos w');$$

also, wenn wir der Kürze wegen

$$74)\quad\begin{cases}\cos \mathrm{W}=\cos\lambda\cos u+\cos\mu\cos v+\cos\nu\cos w,\\ \cos \mathrm{W}'=\cos\lambda\cos u'+\cos\mu\cos v'+\cos\nu\cos w'\end{cases}$$

setzen:

$$(P-p)(P-p')=RR'\cos W\cos W'.$$

Ferner ist der Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Formel 42):

$$\begin{aligned}
&(\cos v\cos w'-\cos v'\cos w)^2\sin\lambda^2\\
&+(\cos w\cos u'-\cos w'\cos u)^2\sin\mu^2\\
&+(\cos u\cos v'-\cos u'\cos v)^2\sin\nu^2\\
&-2(\cos v\cos w'-\cos v'\cos w)(\cos w\cos u'-\cos w'\cos u)\cos\lambda\cos\mu\\
&-2(\cos w\cos u'-\cos w'\cos u)(\cos u\cos v'-\cos u'\cos v)\cos\mu\cos\nu\\
&-2(\cos u\cos v'-\cos u'\cos v)(\cos v\cos w'-\cos v'\cos w)\cos\nu\cos\lambda,
\end{aligned}$$

wenn man diese Grösse noch mit $(RR')^2$ multiplicirt. Setzt man aber für

$$\sin\lambda^2,\quad \sin\mu^2,\quad \sin\nu^2$$

respective

$$1-\cos\lambda^2,\quad 1-\cos\mu^2,\quad 1-\cos\nu^2$$

und überlegt, dass, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned}
&(\cos v\cos w'-\cos v'\cos w)^2+(\cos w\cos u'-\cos w'\cos u)^2\\
&\qquad+(\cos u\cos v'-\cos u'\cos v)^2\\
&=(\cos u^2+\cos v^2+\cos w^2)(\cos u'^2+\cos v'^2+\cos w'^2)\\
&\quad-\cos u^2\cos u'^2-\cos v^2\cos v'^2-\cos w^2\cos w'^2\\
&-2\cos u\cos u'\cos v\cos v'-2\cos v\cos v'\cos w\cos w'-2\cos w\cos w'\cos u\cos u',
\end{aligned}$$

also, wenn man der Kürze wegen

75) ... $\cos V=\cos u\cos u'+\cos v\cos v'+\cos w\cos w'$

setzt,

$$\begin{aligned}
\sin V^2=&(\cos v\cos w'-\cos v'\cos w)^2+(\cos w\cos u'-\cos w'\cos u)^2\\
&+(\cos u\cos v'-\cos u'\cos v)^2
\end{aligned}$$

ist, so erhellet auf der Stelle, dass der Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Formel 42) das Product von $(RR')^2$ in die Grösse

$$\sin V^2-\left\{\begin{aligned}&(\cos v\cos w'-\cos v'\cos w)\cos\lambda+(\cos w\cos u'-\cos w'\cos u)\cos\mu\\&\qquad+(\cos u\cos v'-\cos u'\cos v)\cos\nu\end{aligned}\right\}^2$$

ist. Folglich ist nach 42):

$$76) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \frac{L_1^2}{P^2} =$$

$$\frac{\sin V^2 - \left\{\begin{array}{l}(\cos v \cos w' - \cos v' \cos w)\cos\lambda + (\cos w \cos u' - \cos w' \cos u)\cos\mu \\ \qquad + (\cos u \cos v' - \cos u' \cos v)\cos\nu\end{array}\right\}^2}{\cos W^2 \cos W'^2}.$$

Steht die von dem Anfangspunkte nach dem Auge gezogene Gerade auf der Tafel senkrecht, so ist nach 65):

$$P = E - (a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu),$$

also nach 76):

$$77) \quad \ldots \quad \frac{L_1^2}{\{E - (a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu)\}^2} =$$

$$\frac{\sin V^2 - \left\{\begin{array}{l}(\cos v \cos w' - \cos v' \cos w)\cos\lambda + (\cos w \cos u' - \cos w' \cos u)\cos\mu \\ \qquad + (\cos u \cos v' - \cos u' \cos v)\cos\nu\end{array}\right\}^2}{\cos W^2 \cos W'^2}.$$

In diesem letzteren Falle erhält man aus 42) mit Rücksicht auf §. 11. auch leicht:

$$78)$$

$$\frac{\left\{1 - \frac{f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu}{E}\right\}^2 \left\{1 - \frac{f'\cos\lambda + g'\cos\mu + h'\cos\nu}{E}\right\}^2}{\left(1 - \frac{a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu}{E}\right)^2} L_1^2$$

$$= \left\{(g-g')\cos\nu - (h-h')\cos\mu - \frac{gh' - hg'}{E}\right\}^2 \sin\lambda^2$$

$$+ \left\{(h-h')\cos\lambda - (f-f')\cos\nu - \frac{hf' - fh'}{E}\right\}^2 \sin\mu^2$$

$$+ \left\{(f-f')\cos\mu - (g-g')\cos\lambda - \frac{fg' - gf'}{E}\right\}^2 \sin\nu^2$$

$$- 2\left\{(g-g')\cos\nu - (h-h')\cos\mu - \frac{gh' - hg'}{E}\right\}$$

$$\times \left\{(h-h')\cos\lambda - (f-f')\cos\nu - \frac{hf' - fh'}{E}\right\} \cos\lambda\cos\mu$$

$$- 2\left\{(h-h')\cos\lambda - (f-f')\cos\nu - \frac{hf' - fh'}{E}\right\}$$

$$\times \left\{(f-f')\cos\mu - (g-g')\cos\lambda - \frac{fg' - gf'}{E}\right\} \cos\mu\cos\nu$$

$$- 2\left\{(f-f')\cos\mu - (g-g')\cos\lambda - \frac{fg' - gf'}{E}\right\}$$

$$\times \left\{(g-g')\cos\nu - (h-h')\cos\mu - \frac{gh' - hg'}{E}\right\} \cos\nu\cos\lambda,$$

und für ein unendlich grosses E wird also:

$$\begin{aligned}
L_1^2 = & \{(g-g')\cos\nu-(h-h')\cos\mu\}^2\sin\lambda^2 \\
& +\{(h-h')\cos\lambda-(f-f')\cos\nu\}^2\sin\mu^2 \\
& +\{(f-f')\cos\mu-(g-g')\cos\lambda\}^2\sin\nu^2 \\
& -2\{(g-g')\cos\nu-(h-h')\cos\mu\}\{(h-h')\cos\lambda-(f-f')\cos\nu\}\cos\lambda\cos\mu \\
& -2\{(h-h')\cos\lambda-(f-f')\cos\nu\}\{(f-f')\cos\mu-(g-g')\cos\lambda\}\cos\mu\cos\nu \\
& -2\{(f-f')\cos\mu-(g-g')\cos\lambda\}\{(g-g')\cos\nu-(h-h')\cos\mu\}\cos\nu\cos\lambda
\end{aligned}$$

oder, weil

$$\left.\begin{aligned}
& \{(g-g')\cos\nu-(h-h')\cos\mu\}\cos\lambda \\
& +\{(h-h')\cos\lambda-(f-f')\cos\nu\}\cos\mu \\
& +\{(f-f')\cos\mu-(g-g')\cos\lambda\}\cos\nu
\end{aligned}\right\}=0$$

ist, offenbar:

79)

$$L_1=\sqrt{\left\{\begin{aligned}\{(f-f')\cos\mu-(g-g')\cos\lambda\}^2+\{(g-g')\cos\nu-(h-h')\cos\mu\}^2 \\ +\{h-h')\cos\lambda-(f-f')\cos\nu\}^2\end{aligned}\right\}}$$

oder auch, wie leicht erhellet:

80) . . . . $L_1=$

$$\sqrt{(f-f')^2+(g-g')^2+(h-h')^2-\{(f-f')\cos\lambda+(g-g')\cos\mu+(h-h')\cos\nu\}^2}.$$

§. 13.

Das Auge als Anfang der Coordinaten.

Es erhellet leicht, dass die Formeln, auf denen die im Obigen entwickelte Methode zur Entwerfung perspectivischer Risse oder Pläne beruhet, unbestimmt werden, wenn die Coordinaten des Auges verschwinden, und dass es also bei dieser Methode nicht verstattet ist, das Auge selbst als Anfang der Coordinaten anzunehmen. Indess bietet bei sehr vielen praktischen Anwendungen, ja wohl bei den meisten, die Annahme des Auges als Anfang der Coordinaten besondere Vortheile dar, und wir wollen daher jetzt zeigen, auf welche Weise man sich zu verhalten hat, wenn man von den Vortheilen Nutzen ziehen will, welche die Verlegung des Anfangs der Coordinaten in das Auge in der Praxis gewährt.

$$76) \ldots\ldots \frac{L_1^2}{P^2} =$$

$$\frac{\sin V^2 - \left\{\begin{array}{l}(\cos v\cos w' - \cos v'\cos w)\cos\lambda + (\cos w\cos u' - \cos w'\cos u)\cos\mu \\ \qquad + (\cos u\cos v' - \cos u'\cos v)\cos\nu\end{array}\right\}^2}{\cos W^2 \cos W'^2}.$$

Steht die von dem Anfangspunkte nach dem Auge gezogene Gerade auf der Tafel senkrecht, so ist nach 65):

$$P = E - (a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu),$$

also nach 76):

$$77) \ldots \frac{L_1^2}{\{E - (a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu)\}^2} =$$

$$\frac{\sin V^2 - \left\{\begin{array}{l}(\cos v\cos w' - \cos v'\cos w)\cos\lambda + (\cos w\cos u' - \cos w'\cos u)\cos\mu \\ \qquad + (\cos u\cos v' - \cos u'\cos v)\cos\nu\end{array}\right\}^2}{\cos W^2 \cos W'^2}.$$

In diesem letzteren Falle erhält man aus 42) mit Rücksicht auf §. 11. auch leicht:

78)

$$\frac{\{1 - \frac{f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu}{E}\}^2 \{1 - \frac{f'\cos\lambda + g'\cos\mu + h'\cos\nu}{E}\}^2}{(1 - \frac{a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu}{E})^2} L_1^2$$

$$= \{(g-g')\cos\nu - (h-h')\cos\mu - \frac{gh' - hg'}{E}\}^2 \sin\lambda^2$$

$$+ \{(h-h')\cos\lambda - (f-f')\cos\nu - \frac{hf' - fh'}{E}\}^2 \sin\mu^2$$

$$+ \{(f-f')\cos\mu - (g-g')\cos\lambda - \frac{fg' - gf'}{E}\}^2 \sin\nu^2$$

$$- 2\{(g-g')\cos\nu - (h-h')\cos\mu - \frac{gh' - hg'}{E}\}$$

$$\times\{(h-h')\cos\lambda - (f-f')\cos\nu - \frac{hf' - fh'}{E}\}\cos\lambda\cos\mu$$

$$- 2\{(h-h')\cos\lambda - (f-f')\cos\nu - \frac{hf' - fh'}{E}\}$$

$$\times\{(f-f')\cos\mu - (g-g')\cos\lambda - \frac{fg' - gf'}{E}\}\cos\mu\cos\nu$$

$$- 2\{(f-f')\cos\mu - (g-g')\cos\lambda - \frac{fg' - gf'}{E}\}$$

$$\times\{(g-g')\cos\nu - (h-h')\cos\mu - \frac{gh' - hg'}{E}\}\cos\nu\cos\lambda,$$

und dem Auge liegt. Also muss man jetzt statt der in Bezug auf das Auge als Anfang gemessenen Coordinaten f, g, h eines jeden Punktes in die Rechnung die Grössen

$$f \pm E\cos\lambda,\quad g \pm E\cos\mu,\quad h \pm E\cos\nu;$$

natürlich auch für die gleichfalls auf das Auge als Anfang sich beziehenden Coordinaten a, b, c die Grössen

$$a \pm E\cos\lambda,\quad b \pm E\cos\mu,\quad c \pm E\cos\nu$$

einführen, wobei immer dieselbe Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher gilt.

Nach den in §. 9. gegebenen Formeln ist nun

$$\Delta = F\cos\lambda + G\cos\mu + H\cos\nu = \pm E(\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2),$$

also:

82) $$\Delta = \pm E.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\mathrm{P} = \ & \{\pm E\cos\lambda - (a \pm E\cos\lambda)\}\cos\lambda \\ & + \{\pm E\cos\mu - (b \pm E\cos\mu)\}\cos\mu \\ & + \{\pm E\cos\nu - (c \pm E\cos\nu)\}\cos\nu,\end{aligned}$$

also:

83) $$\mathrm{P} = -(a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu).$$

Weiter ergiebt sich leicht:

$$\Theta_x = \sqrt{\cos\mu^2\sin\nu^2 + 2\cos\mu^2\cos\nu^2 + \sin\mu^2\cos\nu^2},$$

$$\Theta_y = \sqrt{\cos\nu^2\sin\lambda^2 + 2\cos\nu^2\cos\lambda^2 + \sin\nu^2\cos\lambda^2},$$

$$\Theta_z = \sqrt{\cos\lambda^2\sin\mu^2 + 2\cos\lambda^2\cos\mu^2 + \sin\lambda^2\cos\mu^2};$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$\Theta_x = \sqrt{\cos\mu^2 + \cos\nu^2},\quad \Theta_y = \sqrt{\cos\nu^2 + \cos\lambda^2},\quad \Theta_z = \sqrt{\cos\lambda^2 + \cos\mu^2};$$

folglich:

84) $$\Theta_x = \sin\lambda,\quad \Theta_y = \sin\mu,\quad \Theta_z = \sin\nu.$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$F\cos\mu - G\cos\lambda = 0,$$
$$G\cos\nu - H\cos\mu = 0,$$
$$H\cos\lambda - F\cos\nu = 0;$$

also nach 54):

$$85) \quad \ldots \quad \begin{cases} \cos(x_0 y_0) = -\cot\lambda\cot\mu, \\ \cos(y_0 z_0) = -\cot\mu\cot\nu, \\ \cos(z_0 x_0) = -\cot\nu\cot\lambda. \end{cases}$$

Wir wollen nun zuerst den Fall betrachten, wenn der Punkt O nicht zwischen dem Auge und der Tafel liegt, wo nach dem Obigen

$$\varDelta = E;$$

$$F = E\cos\lambda, \quad G = E\cos\mu, \quad H = E\cos\nu$$

ist, und für f, g, h die Grössen

$$f + E\cos\lambda, \quad g + E\cos\mu, \quad h + E\cos\nu$$

gesetzt werden müssen.

Nach §. 9. und 84) ist:

$$A_0 = \mp P\tang\lambda, \quad B_0 = \mp P\tang\mu, \quad C_0 = \mp P\tang\nu;$$

die oberen oder unteren Zeichen genommen, jenachdem das Auge nicht zwischen dem Punkte O und seinem Bilde, oder zwischen dem Punkte O und seinem Bilde liegt, also offenbar im vorliegenden Falle, jenachdem die Winkel λ, μ, ν sich auf den von dem Auge aus nicht nach der Tafel hin, oder auf den von dem Auge aus nach der Tafel hin gerichteten Theil der durch das Auge senkrecht gegen die Tafel gelegten Geraden beziehen.

Ferner ist nach 63) und dem Obigen:

$$f_x = -A_0 \frac{(f + E\cos\lambda)\cos\lambda}{E - (f + E\cos\lambda)\cos\lambda},$$

$$g_y = -B_0 \frac{(g + E\cos\mu)\cos\mu}{E - (g + E\cos\mu)\cos\mu},$$

$$h_z = -C_0 \frac{(h + E\cos\nu)\cos\nu}{E - (h + E\cos\nu)\cos\nu};$$

also:

$$f_x = -A_0 \frac{E\cos\lambda^2 + f\cos\lambda}{E\sin\lambda^2 - f\cos\lambda},$$

$$g_y = -B_0 \frac{E\cos\mu^2 + g\cos\mu}{E\sin\mu^2 - g\cos\mu},$$

$$h_z = -C_0 \frac{E\cos\nu^2 + h\cos\nu}{E\sin\nu^2 - h\cos\nu};$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$f_x = \pm \mathrm{P}\frac{E\sin\lambda\cos\lambda + f\sin\lambda}{E\sin\lambda\sin\lambda - f\cos\lambda},$$

$$g_y = \pm \mathrm{P}\frac{E\sin\mu\cos\mu + g\sin\mu}{E\sin\mu\sin\mu - g\cos\mu},$$

$$h_z = \pm \mathrm{P}\frac{E\sin\nu\cos\nu + h\sin\nu}{E\sin\nu\sin\nu - h\cos\nu};$$

die oberen oder unteren Zeichen genommen, jenachdem die Winkel λ, μ, ν sich auf den von dem Auge aus nicht nach der Tafel hin, oder auf den von dem Auge aus nach der Tafel hin gerichteten Theil der durch das Auge senkrecht gegen die Tafel gelegten Geraden beziehen.

Die Gleichungen der durch das Auge senkrecht gegen die Tafel gelegten Geraden in dem Systeme, dessen Anfang das Auge ist, sind

$$\frac{\mathfrak{x}}{\cos\lambda} = \frac{\mathfrak{y}}{\cos\mu} = \frac{\mathfrak{z}}{\cos\nu},$$

und die Gleichung der Tafel in demselben Systeme ist

$$(\mathfrak{x}-a)\cos\lambda + (\mathfrak{y}-b)\cos\mu + (\mathfrak{z}-c)\cos\nu = 0.$$

Bezeichnen wir also in diesem Coordinatensysteme die Coordinaten des Durchschnittspunkts der durch das Auge senkrecht gegen die Tafel gelegten Geraden mit der Tafel durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; so hat man zu der Bestimmung dieser Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{X}}{\cos\lambda} = \frac{\mathfrak{Y}}{\cos\mu} = \frac{\mathfrak{Z}}{\cos\nu},$$

$$(\mathfrak{X}-a)\cos\lambda + (\mathfrak{Y}-b)\cos\mu + (\mathfrak{Z}-c)\cos\nu = 0;$$

woraus sich die folgenden Formeln ergeben:

$$\mathfrak{X} = (a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu)\cos\lambda,$$

$$\mathfrak{Y} = (a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu)\cos\mu,$$

$$\mathfrak{Z} = (a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu)\cos\nu;$$

und bezeichnet nun $\mathfrak{P}$ die Entfernung des Auges von der Tafel, so ist

$$\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2,$$

also nach vorstehenden Gleichungen:

$$\mathfrak{p}^2 = (a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu)^2,$$

woraus

$$\mathfrak{p} = \pm(a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu)$$

folgt, wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse $a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu$ positiv oder negativ ist. Diese Grösse ist aber offenbar nach §. 1. positiv oder negativ, jenachdem die Winkel λ, μ, ν sich auf den von dem Auge aus nach der Tafel hin, oder auf den von dem Auge aus nicht nach der Tafel hin gerichteten Theil der durch das Auge senkrecht gegen die Tafel gelegten Geraden beziehen; also ist

$$\mathfrak{p} = \mp(a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu)$$

und nach 83) folglich

$$\mathfrak{p} = \pm P \quad \text{oder} \quad P = \pm\mathfrak{p},$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem die Winkel λ, μ, ν sich auf den von dem Auge aus nicht nach der Tafel hin, oder auf den von dem Auge aus nach der Tafel hin gerichteten Theil der durch das Auge senkrecht gegen die Tafel gelegten Geraden beziehen. Folglich ist nach dem Obigen allgemein in diesem Falle:

$$86) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} f_x &= \mathfrak{p}\frac{E\sin\lambda\cos\lambda + f\sin\lambda}{E\sin\lambda\sin\lambda - f\cos\lambda}, \\ g_y &= \mathfrak{p}\frac{E\sin\mu\cos\mu + g\sin\mu}{E\sin\mu\sin\mu - g\cos\mu}, \\ h_z &= \mathfrak{p}\frac{E\sin\nu\cos\nu + h\sin\nu}{E\sin\nu\sin\nu - h\cos\nu}; \end{aligned} \right.$$

und zur Bestimmung von A_0, B_0, C_0 hat man nach dem Obigen die folgenden Formeln:

$$87) \quad A_0 = -\mathfrak{p}\tang\lambda, \quad B_0 = -\mathfrak{p}\tang\mu, \quad C_0 = -\mathfrak{p}\tang\nu.$$

Wir wollen nun auch den Fall betrachten, wenn der Punkt O zwischen dem Auge und der Tafel liegt, wo nach dem Obigen

$$\varDelta = -E;$$

$$F = -E\cos\lambda, \quad G = -E\cos\mu, \quad H = -E\cos\nu$$

ist, und für f, g, h die Grössen

$$f - E\cos\lambda, \quad g - E\cos\mu, \quad h - E\cos\nu$$

gesetzt werden müssen.

Da in diesem Falle das Auge nicht zwischen dem Punkte O und seinem Bilde liegt, so ist nach §. 9. und 84):

$$\mathrm{A}_0 = -\mathrm{P}\tang\lambda, \quad \mathrm{B}_0 = -\mathrm{P}\tang\mu, \quad \mathrm{C}_0 = -\mathrm{P}\tang\nu;$$

wobei man zu bemerken hat, dass in diesem Falle die Winkel λ, μ, ν sich auf den von dem Auge aus nach der Tafel hin gerichteten Theil der durch das Auge senkrecht gegen die Tafel gelegten Geraden beziehen.

Ferner ist nach 63) und dem Obigen:

$$f_x = -\mathrm{A}_0 \frac{(f-E\cos\lambda)\cos\lambda}{-E-(f-E\cos\lambda)\cos\lambda},$$

$$g_y = -\mathrm{B}_0 \frac{(g-E\cos\mu)\cos\mu}{-E-(g-E\cos\mu)\cos\mu},$$

$$h_z = -\mathrm{C}_0 \frac{(h-E\cos\nu)\cos\nu}{-E-(h-E\cos\nu)\cos\nu};$$

also:

$$f_x = -\mathrm{A}_0 \frac{E\cos\lambda^2 - f\cos\lambda}{E\sin\lambda^2 + f\cos\lambda},$$

$$g_y = -\mathrm{B}_0 \frac{E\cos\mu^2 - g\cos\mu}{E\sin\mu^2 + g\cos\mu},$$

$$h_z = -\mathrm{C}_0 \frac{E\cos\nu^2 - h\cos\nu}{E\sin\nu^2 + h\cos\nu};$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$f_x = \mathrm{P}\frac{E\sin\lambda\cos\lambda - f\sin\lambda}{E\sin\lambda\sin\lambda + f\cos\lambda},$$

$$g_y = \mathrm{P}\frac{E\sin\mu\cos\mu - g\sin\mu}{E\sin\mu\sin\mu + g\cos\mu},$$

$$h_z = \mathrm{P}\frac{E\sin\nu\cos\nu - h\sin\nu}{E\sin\nu\sin\nu + h\cos\nu}.$$

Ganz wie im ersten Falle erhält man auch hier:

$$\mathfrak{P}^2 = (a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu)^2,$$

und folglich, weil in diesem Falle, wo die Winkel λ, μ, ν sich auf den von dem Auge aus nach der Tafel hin gerichteten Theil der durch das Auge senkrecht gegen die Tafel gelegten Geraden beziehen, nach §. 1. die Grösse $a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu$ offenbar positiv ist,

$$\mathfrak{p} = a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu,$$

also nach 83):

$$\mathfrak{p} = -\mathrm{P} \quad \text{oder} \quad \mathrm{P} = -\mathfrak{p}.$$

Folglich ist in diesem Falle:

$$88) \ldots \begin{cases} f_x = -\mathfrak{p}\dfrac{E\sin\lambda\cos\lambda - f\sin\lambda}{E\sin\lambda\sin\lambda + f\cos\lambda}, \\ g_y = -\mathfrak{p}\dfrac{E\sin\mu\cos\mu - g\sin\mu}{E\sin\mu\sin\mu + g\cos\mu}, \\ h_z = -\mathfrak{p}\dfrac{E\sin\nu\cos\nu - h\sin\nu}{E\sin\nu\sin\nu + h\cos\nu}; \end{cases}$$

und zur Bestimmung von A_0, B_0, C_0 hat man nach dem Obigen die folgenden Formeln:

$$89) \ldots A_0 = \mathfrak{p}\tan\lambda, \quad B_0 = \mathfrak{p}\tan\mu, \quad C_0 = \mathfrak{p}\tan\nu.$$

Lässt man aber die Winkel λ, μ, ν sich auf den von dem Auge aus nicht nach der Tafel hin gerichteten Theil der durch das Auge senkrecht gegen die Tafel gelegten Geraden beziehen, so werden diese Formeln:

$$90) \ldots \begin{cases} f_x = \mathfrak{p}\dfrac{E\sin\lambda\cos\lambda + f\sin\lambda}{E\sin\lambda\sin\lambda - f\cos\lambda}, \\ g_y = \mathfrak{p}\dfrac{E\sin\mu\cos\mu + g\sin\mu}{E\sin\mu\sin\mu - g\cos\mu}, \\ h_z = \mathfrak{p}\dfrac{E\sin\nu\cos\nu + h\sin\nu}{E\sin\nu\sin\nu - h\cos\nu} \end{cases}$$

und

$$91) \quad A_0 = -\mathfrak{p}\tan\lambda, \quad B_0 = -\mathfrak{p}\tan\mu, \quad C_0 = -\mathfrak{p}\tan\nu;$$

die Ausdrücke 84) und 85) von

$$\Theta_x,\ \Theta_y,\ \Theta_z \quad \text{und} \quad \cos(x_0y_0),\ \cos(y_0z_0),\ \cos(z_0x_0)$$

werden aber durch diese anderweitige, rücksichtlich der Winkel λ, μ, ν getroffene Bestimmung gar nicht alterirt.

Aus 86), 87) und 90), 91) erhellet nun, dass man allgemein

$$92) \quad A_0 = -\mathfrak{p}\tan\lambda, \quad B_0 = -\mathfrak{p}\tan\mu, \quad C_0 = -\mathfrak{p}\tan\nu$$

und

$$93)\quad\ldots\ldots\left\{\begin{aligned} f_x&=\mathfrak{p}\frac{E\sin\lambda\cos\lambda+f\sin\lambda}{E\sin\lambda\sin\lambda-f\cos\lambda},\\ g_y&=\mathfrak{p}\frac{E\sin\mu\cos\mu+g\sin\mu}{E\sin\mu\sin\mu-g\cos\mu},\\ h_z&=\mathfrak{p}\frac{E\sin\nu\cos\nu+h\sin\nu}{E\sin\nu\sin\nu-h\cos\nu}\end{aligned}\right.$$

setzen, und die Winkel λ, μ, ν beliebig auf den von dem Auge aus abwärts von der Tafel, oder auf den von dem Auge aus nach der Tafel hin gerichteten Theil der durch das Auge senkrecht gegen die Tafel gelegten Geraden beziehen kann. Hat man die Winkel λ, μ, ν auf den von dem Auge aus abwärts von der Tafel gerichteten Theil der durch das Auge senkrecht gegen die Tafel gelegten Geraden bezogen, so heisst dies im Allgemeinen so viel, dass man sich den Punkt O auf derselben Seite des Auges wie die Tafel liegend gedacht hat; und jenachdem man die willkührliche positive Grösse E kleiner oder grösser als $\mathfrak{p}$ angenommen hat, ist der Punkt O zwischen das Auge und die Tafel oder auf die entgegengesetzte Seite der Tafel gelegt, also mit dem Auge auf einer und derselben oder auf entgegengesetzter Seite der Tafel angenommen worden. Hat man dagegen die Winkel λ, μ, ν auf den von dem Auge aus nach der Tafel hin gerichteten Theil der durch das Auge senkrecht gegen die Tafel gelegten Geraden bezogen, so heisst dies so viel, dass man sich den Punkt O nicht mit der Tafel auf einerlei Seite, sondern auf der entgegengesetzten Seite des Auges liegend gedacht hat, wobei es ganz gleichgültig ist, wie gross E im Verhältniss zu $\mathfrak{p}$ angenommen wird. Alles dieses ist natürlich vollständig verstattet.

Die zur vollständigen Anfertigung des perspectivischen Risses erforderlichen Formeln sind nach dem Vorhergehenden nun die folgenden, wobei die Winkel λ, μ, ν beliebig auf den einen oder den andern der beiden Theile bezogen werden können, in welche die durch das Auge senkrecht gegen die Tafel gelegte Gerade von dem Auge getheilt wird:

$$94)\quad\left\{\begin{aligned} &\cos(x_0y_0)=-\cot\lambda\cot\mu,\\ &\cos(y_0z_0)=-\cot\mu\cot\nu,\\ &\cos(z_0x_0)=-\cot\nu\cot\lambda;\\ &A_0=-\mathfrak{p}\tan\lambda,\quad B_0=-\mathfrak{p}\tan\mu,\quad C_0=-\mathfrak{p}\tan\nu;\\ &f_x=\mathfrak{p}\frac{E\sin\lambda\cos\lambda+f\sin\lambda}{E\sin\lambda\sin\lambda-f\cos\lambda},\\ &g_y=\mathfrak{p}\frac{E\sin\mu\cos\mu+g\sin\mu}{E\sin\mu\sin\mu-g\cos\mu},\\ &h_z=\mathfrak{p}\frac{E\sin\nu\cos\nu+h\sin\nu}{E\sin\nu\sin\nu-h\cos\nu}.\end{aligned}\right.$$

Sind u, v, w die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem Auge nach dem Punkte (fgh) gezogene Gerade mit den positiven Theilen der Coordinaten-Axen einschliesst, so kann man

$$f = E\cos u,\quad g = E\cos v,\quad h = E\cos w$$

setzen, und erhält dann zur Bestimmung von f_x, g_y, h_z nach 94) die folgenden Formeln:

$$95)\ \ldots \left\{\begin{aligned} f_x &= \mathfrak{p}\frac{(\cos\lambda+\cos u)\sin\lambda}{\sin\lambda^2-\cos\lambda\cos u},\\ g_y &= \mathfrak{p}\frac{(\cos\mu+\cos v)\sin\mu}{\sin\mu^2-\cos\mu\cos v},\\ h_z &= \mathfrak{p}\frac{(\cos\nu+\cos w)\sin\nu}{\sin\nu^2-\cos\nu\cos w}\end{aligned}\right.$$

oder:

$$96)\ \ldots \left\{\begin{aligned} f_x &= \mathfrak{p}\frac{(\cos\lambda+\cos u)\sin\lambda}{1-(\cos\lambda+\cos u)\cos\lambda},\\ g_y &= \mathfrak{p}\frac{(\cos\mu+\cos v)\sin\mu}{1-(\cos\mu+\cos v)\cos\mu},\\ h_z &= \mathfrak{p}\frac{(\cos\nu+\cos w)\sin\nu}{1-(\cos\nu+\cos w)\cos\nu};\end{aligned}\right.$$

also, wenn wir

$$97)\ \ldots \left\{\begin{aligned} k_x &= 2\cos\tfrac{1}{2}(\lambda+u)\cos\tfrac{1}{2}(\lambda-u),\\ k_y &= 2\cos\tfrac{1}{2}(\mu+v)\cos\tfrac{1}{2}(\mu-v),\\ k_z &= 2\cos\tfrac{1}{2}(\nu+w)\cos\tfrac{1}{2}(\nu-w)\end{aligned}\right.$$

setzen:

$$98)\ f_x = \frac{k_x\mathfrak{p}\sin\lambda}{1-k_x\cos\lambda},\quad g_y = \frac{k_y\mathfrak{p}\sin\mu}{1-k_y\cos\mu},\quad h_z = \frac{k_z\mathfrak{p}\sin\nu}{1-k_z\cos\nu}.$$

Also sind die der Anfertigung des perspectivischen Risses zu Grunde zu legenden Formeln:

$$
99)\left\{\begin{array}{l}
\cos(x_0y_0) = -\cot\lambda\cot\mu, \\
\cos(y_0z_0) = -\cot\mu\cot\nu, \\
\cos(z_0x_0) = -\cot\nu\cot\lambda; \\
A_0 = -\mathfrak{P}\tan\lambda,\quad B_0 = -\mathfrak{P}\tan\mu,\quad C_0 = -\mathfrak{P}\tan\nu; \\
k_x = 2\cos\tfrac{1}{2}(\lambda+u)\cos\tfrac{1}{2}(\lambda-u), \\
k_y = 2\cos\tfrac{1}{2}(\mu+v)\cos\tfrac{1}{2}(\mu-v), \\
k_z = 2\cos\tfrac{1}{2}(\nu+w)\cos\tfrac{1}{2}(\nu-w); \\
f_x = \dfrac{k_x\mathfrak{P}\sin\lambda}{1-k_x\cos\lambda},\quad g_y = \dfrac{k_y\mathfrak{P}\sin\mu}{1-k_y\cos\mu},\quad h_z = \dfrac{k_z\mathfrak{P}\sin\nu}{1-k_z\cos\nu};
\end{array}\right.
$$

wo (x_0y_0), (y_0z_0), (z_0x_0) und A_0, B_0, C_0 Constanten sind.

§. 14.

Construction der im vorhergehenden Paragraphen durch (x_0y_0), (y_0z_0), (z_0x_0) bezeichneten Winkel.

Wenn man, wie Fig. 3. zeigt, nach einem gewissen Maassstabe mit $\sin\lambda^2$, $\sin\mu^2$, $\sin\nu^2$ als Seiten ein Dreieck ABC construirt *), und dessen Winkel A, B, C halbirt, so schneiden sich die Halbirungslinien in einem gemeinschaftlichen Punkte O, und schliessen an demselben drei Winkel φ, ψ, χ ein, von denen wir jetzt etwa den Winkel φ bestimmen wollen. Nach bekannten trigonometrischen Formeln ist:

---

*) Dass dies immer möglich ist, folgt leicht aus der bekannten Gleichung

$$\sin\lambda^2 + \sin\mu^2 + \sin\nu^2 = 2.$$

Denn wäre etwa

$$\sin\lambda^2 + \sin\mu^2 < \sin\nu^2,$$

so wäre

$$\sin\lambda^2 + \sin\mu^2 + \sin\nu^2 < 2\sin\nu^2,$$

also

$$2 < 2\sin\nu^2, \text{ und folglich } \sin\nu^2 > 1,$$

was ungereimt ist. Also ist überhaupt

$$\sin\lambda^2 + \sin\mu^2 > \sin\nu^2,\quad \sin\lambda^2 + \sin\nu^2 > \sin\mu^2,\quad \sin\mu^2 + \sin\nu^2 > \sin\lambda^2;$$

wie erforderlich ist, wenn das Dreieck möglich sein soll.

$$2\sin\tfrac{1}{2}A^2=\frac{(\sin\mu^2+\sin\nu^2-\sin\lambda^2)(\sin\mu^2-\sin\nu^2+\sin\lambda^2)}{2\sin\lambda^2\sin\nu^2},$$

$$2\cos\tfrac{1}{2}A^2=\frac{(\sin\lambda^2+\sin\mu^2+\sin\nu^2)(\sin\lambda^2+\sin\nu^2-\sin\mu^2)}{2\sin\lambda^2\sin\nu^2};$$

folglich, wie leicht erhellet:

$$\sin\tfrac{1}{2}A^2=\frac{\cos\lambda^2\cos\nu^2}{\sin\lambda^2\sin\nu^2},\quad \cos\tfrac{1}{2}A^2=\frac{\cos\mu^2}{\sin\lambda^2\sin\nu^2};$$

und ganz eben so:

$$\sin\tfrac{1}{2}B^2=\frac{\cos\lambda^2\cos\mu^2}{\sin\lambda^2\sin\mu^2},\quad \cos\tfrac{1}{2}B^2=\frac{\cos\nu^2}{\sin\lambda^2\sin\mu^2};$$

also:

$$\sin\tfrac{1}{2}A^2\sin\tfrac{1}{2}B^2=\cot\lambda^4\cot\mu^2\cot\nu^2,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2\cos\tfrac{1}{2}B^2=\operatorname{cosec}\lambda^4\cot\mu^2\cot\nu^2;$$

und folglich:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\pm\cot\lambda^2\cot\mu\cot\nu,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B=\pm\operatorname{cosec}\lambda^2\cot\mu\cot\nu;$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem $\cot\mu\cot\nu$ positiv oder negativ ist. Weil nun

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)=\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B-\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B$$

ist, so erhellet, wenn man

$$\operatorname{cosec}\lambda^2=1+\cot\lambda^2$$

setzt, auf der Stelle aus dem Obigen, dass

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)=\pm\cot\mu\cot\nu$$

ist. Nun ist aber, wobei Fig. 3. zu vergleichen:

$$\varphi=180^0-\tfrac{1}{2}(A+B),$$

also $\cos\varphi=-\cos\tfrac{1}{2}(A+B)$, und folglich $\cos\varphi=\mp\cot\mu\cot\nu$, also nach 85) $\cos\varphi=\pm\cos(y_0z_0)$, woraus $(y_0z_0)=\varphi$ oder $(y_0z_0)=180^0-\varphi$ folgt, jenachdem $\cot\mu\cot\nu$ positiv oder negativ ist. Eben so ist $(z_0x_0)=\psi$ oder $(z_0x_0)=180^0-\psi$, jenachdem $\cot\nu\cot\lambda$ positiv oder negativ ist; und $(x_0y_0)=\chi$ oder $(x_0y_0)=180^0-\chi$, jenachdem $\cot\lambda\cot\mu$ positiv oder negativ ist. Man sieht also, wie man die Winkel (x_0y_0), (y_0z_0), (z_0x_0), und folglich auch die positiven Theile der Bild-Axen und diese Axen überhaupt construiren kann.

Druckfehler. Ich bitte, in der Einleitung zu diesem Aufsatze „Farish“ statt „Farisch“ zu setzen, also das c in diesem Namen zu streichen.

XXXIV.

Ueber einen allgemeinen Satz aus der Kurvenlehre.

Von

Herrn Doctor *A. Weiler*,

Lehrer der Mathematik an der höheren Bürgerschule zu Mannheim.

In dem 31sten Theile dieses Journals (S. 449.) hat Herr Doctor Völler den folgenden Lehrsatz aufgestellt:

„Zieht man in einer beliebigen Kurve eine Sehne, so ist, wenn die letztere unendlich klein wird, das Verhältniss des Flächensegments zu dem Dreiecke, welches von der Sehne und den dazu gehörigen Tangenten gebildet wird, gleich $\frac{2}{3}$.“

Um diesen Satz zu beweisen, werden dort die Coordinaten zweier beliebigen Punkte der Kurve, deren Gleichung $y=f(x)$ ist, durch x_1y_1 und x_2y_2 bezeichnet. Es ergiebt sich alsdann der Inhalt des Tangentendreiecks aus der Gleichung:

$$\delta=\tfrac{1}{2}.\frac{(y_2-y_1-f'(x_2)(x_2-x_1))(y_2-y_1-f'(x_1)(x_2-x_1))}{f'(x_2)-f'(x_1)}.$$

Ferner wird abkürzend $\int f(x)dx=\varphi(x)$ gesetzt, und dies liefert für das Flächensegment den Werth:

$$\sigma=\varphi(x_2)-\varphi(x_1)-\frac{(y_2+y_1)(x_2-x_1)}{2}.$$

Da nun aber die oben ausgesprochene Bedingung eingeführt wird, wornach die beiden Punkte x_1y_1 und x_2y_2 unendlich nahe beisammen liegen, so findet sich erst nach viermaliger Differentiation von Zähler und Nenner der Werth $\frac{\sigma}{\delta}=\frac{2}{3}$.

In dem Gegenwärtigen will ich den Versuch machen, denselben Gegenstand von einem anderen Gesichtspunkte aus zu betrachten, um den Beweis des oben aufgestellten Satzes durch etwas weniger Rechnung zu erzielen.

Zunächst ist aus der Kurvenlehre bekannt, dass sich für jeden Punkt der Kurve, deren Gleichung $y=f(x)$ ist, ein Kreis findet, welcher auf eine unendlich kleine Strecke hin so innig mit der Kurve zusammenfällt, dass die Abweichungen der Kurve von dem Kreise selbst wieder verschwindend sind, verglichen mit den Abweichungen der Kurve von der Tangente oder auch von der Sehne, welche für die Kurve und den Kreis gemeinschaftlich sind. Da nämlich an dieser Stelle nicht allein der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, sondern auch der zweite Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ für Kurve und Kreis übereinstimmen, so hängen die wirklich vorhandenen Abweichungen in der That nur von dem dritten Differentialquotienten $\frac{d^3y}{dx^3}$ ab, woraus denn das, was hier nur in Erinnerung gebracht worden ist, auf der Stelle erhellet. Es folgt, dass das in Rede stehende Verhältniss zwischen dem Flächensegment und dem Tangentendreieck für Kurve und Krümmungskreis übereinstimmend ist.

Nun wird aber Niemand daran zweifeln, dass das erwähnte Verhältniss für den Kreis stets ein und denselben Zahlenwerth hat, wie gross auch immer der Halbmesser des Kreises sein mag. Daraus folgt aber weiter, dass dies Verhältniss auch für jede andere Kurve in allen Punkten durch einen bestimmten Zahlenwerth ausgedrückt ist.

Es ist eine bekannte Eigenschaft der Parabel, dass das Verhältniss zwischen dem Flächensegment und dem Tangentendreieck für zwei beliebige Punkte der Parabel jedesmal den Werth $\frac{2}{3}$ hat. Dieser Werth bleibt auch dann richtig, wenn die beiden Punkte der Parabel unendlich nahe beisammen liegen. Es versteht sich, dass für diesen Fall der Werth $\frac{2}{3}$ auch für jede andere Kurve gilt.

Schneller noch gelangt man zu diesem Schlusse, wenn man sich anstatt des Krümmungskreises eine Krümmungsparabel an die Kurve gelegt denkt, deren Gleichung $y=f(x)$ ist.

XXXV.

Neue Methode, die Quadratur der Parabel zu bestimmen.

Von

Herrn Doctor *Völler*

Lehrer an der Realschule zu Saalfeld.

Auf meine Untersuchungen „über Gränzverhältnisse" bei ebenen Curven mich stützend, gelang es mir, eine Methode zu finden, mittelst welcher sich die Quadratur der Parabel auf andere, als die herkömmliche Weise bestimmen lässt.

Wenn sich nehmlich bei verschwindender Sehne — wie in Heft 4. des 31. Theils S. 449. dieses Archivs allgemein bewiesen — das Segment zu dem dazu gehörigen Tangentendreieck wie 2:3 verhält, so ist, wenn — unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen — das betreffende Dreieck (Taf. V. Fig. 1.), wie an jenem Orte abgeleitet worden, gleich

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}(x_1-x_2)\{(y_1-y_2)f'(x_2)-(x_1-x_2)f'(x_1)f'(x_2)\}\\ +(y_2-y_1)\{y_1-y_2+(x_2-x_1)f'(x_1)\}\end{array}\right\}}{2\{f'(x_1)-f'(x_2)\}},$$

nunmehr:

$$\text{Segment}=\frac{\left\{\begin{array}{c}(x_1-x_2)\{(y_1-y_2)f'(x_2)-(x_1-x_2)f'(x_1)f'(x_2)\}\\ +(y_2-y_1)\{y_1-y_2+(x_2-x_1)f'(x_1)\}\end{array}\right\}}{3\{f'(x_1)-f'(x_2)\}}.$$

Wendet man jetzt diesen Satz auf die Parabel an und lässt den Coordinatenanfang mit dem Scheitel dieser Curve, die X-Achse

mit der Achse derselben zusammenfallen, so ergiebt sich — wenn man überdiess noch das eine Ende des Segments in den Coordinatenanfang hineinschiebt, wodurch $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ und $f'(x_1) = \infty$ wird — aus analytischen Gründen:

$$\text{Segment} = \tfrac{1}{3}.\{-x_2^2 f'(x_2) + x_2 y_2\}.$$

Bekanntlich ist aber bei der Parabel allgemein:

$$f'(x_2) = \frac{y_2}{2x_2},$$

mithin ist nach Substitution dieses Werthes:

$$\text{Segment} = \tfrac{1}{3}.\{-\frac{x_2 y_2}{2} + x_2 y_2\},$$

d. i.

$$\text{Segment} = \tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{2} x_2 y_2 = \tfrac{1}{6} x_2 y_2.$$

Der durch diese Gleichung ausgedrückte Satz, der wohl auch gleich dem weiter unten stehenden in allgemeiner Form hingestellt zu werden verdient, heisst in Worten:

> „Ein Parabelsegment, welches mit seinem einen Ende in dem Coordinatenanfang, dem Scheitel der Parabel, liegt, ist der dritte Theil von demjenigen Dreieck, welches durch die rechtwinkligen Coordinaten des anderen Endpunktes des Segments und der dazu gehörigen Sehne gebildet wird."

Will man nun — unter Zugrundelegung rechtwinkliger Coordinaten — einen bestimmten Parabelabschnitt *MNO* berechnen, so ist, wie leicht erhellet,

$$\text{Parabelabschn. } MNO = 2.\text{Segm.} + \Delta\, MNO,$$

d. i.

$$\text{Parabelabschn. } MNO = \tfrac{1}{3} x_2 y_2 + x_2 y_2.$$

Mithin:

$$\text{Parabelabschn. } MNO = \tfrac{4}{3} x_2 y_2,$$

was die bekannte und auch genugsam in Worten ausgedrückte Relation ist.

XXXVI.

Resolutio congruentiarum I^{mi} gradus per formulas novas.

Auctore

Dr. *J. G. Zehfuss*,

Darmstadino.

Satis notum est viros celeberrimos Cauchy et Binet methodum docuisse, quae non pendeat a theoria fractionum continuarum, solutionem congruentiarum I^{mi} gradus inveniendi. Jam in sequentibus formulas quatuor ab cognitis diversas explicare liceat, quae eandem ad finem pertinent; quarum ad demonstrationem Fermati theoremate utimur.

1) Secundum theorema Fermatianum

$$a^{\alpha-1}-1 \text{ per } \alpha, \text{ ergo } (a^{\alpha-1}-1)^m \text{ per } \alpha^m$$

dividi potest, designante α numerum primum, a numerum quemlibet non divisibilem per α. Generaliter ergo habemus

(I)

$$(1-a^{\alpha-1})^m(1-a^{\beta-1})^n(1-a^{\gamma-1})^p\ldots\equiv 0, \quad (\text{mod } \alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots).$$

Hinc nanciscimur

$$1-(1-a^{\alpha-1})^m(1-a^{\beta-1})^n(1-a^{\gamma-1})^p\ldots\equiv 1, \quad (\text{mod } \alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots).$$

Jam elucet, expressionem ad sinistram signi $\equiv$ factorem a implicare, quo sequitur, numerum integrum

$$x\equiv\frac{b}{a}[1-(1-a^{\alpha-1})^m(1-a^{\beta-1})^n(1-a^{\gamma-1})^p\ldots], \quad (\text{mod } \alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots)$$

solutionem esse congruentiae

$$ax \equiv b, \quad (\text{mod } \alpha^m \beta^n \gamma^p \ldots.).$$

2) Resolutio altera problematis resolvendi congruentiam $ax \equiv b$, (mod $\alpha^m \beta^n \gamma^p \ldots.$), hunc in modum invenitur.

E theoremate Fermati a celeberrimo Gauss extenso eruimus

$$a^{(\alpha-1)\alpha^{m-1}} - 1 \equiv 0, \; (\text{mod } \alpha^m); \quad a^{(\beta-1)\beta^{n-1}} - 1 \equiv 0, \; (\text{mod } \beta^n); \ldots.$$

Hinc prodit pro modulo $\alpha^m \beta^n \gamma^p \ldots.$:

$$\text{(II)} \quad (1 - a^{(\alpha-1)\alpha^{m-1}})(1 - a^{(\beta-1)\beta^{n-1}})(1 - a^{(\gamma-1)\gamma^{p-1}}) \ldots. \equiv 0,$$

et elucet, pro eodem modulo fieri expressionem

$$1 - (1 - a^{(\alpha-1)\alpha^{m-1}})(1 - a^{(\beta-1)\beta^{n-1}})(1 - a^{(\gamma-1)\gamma^{p-1}}) \ldots. \equiv 1.$$

Quae quum factorem habeat a, videmus, pro modulo $\alpha^m \beta^n \gamma^p \ldots.$

$$x \equiv \frac{b}{a}[1 - (1 - a^{(\alpha-1)\alpha^{m-1}})(1 - a^{(\beta-1)\beta^{n-1}})(1 - a^{(\gamma-1)\gamma^{p-1}}) \ldots.]$$

solutionem alteram esse congruentiae $ax \equiv b$, (mod $\alpha^m \beta^n \gamma^p \ldots.$).

3) Methodus tertia pariter fluit e Fermati theoremate, si ponamus $A\beta^n$ loco z in congruentia

$$z^{(\alpha-1)\alpha^{m-1}} - 1 \equiv 0, \quad (\text{mod } \alpha^m),$$

designantibus α et A numeros inter se primos. Prodit

$$(A\beta^n)^{(\alpha-1)\alpha^{m-1}} - 1 \equiv 0, \quad (\text{mod } \alpha^m),$$

et cum sit $(B\alpha^m)^{(\beta-1)\beta^{n-1}} \equiv 0$, (mod α^m), invenimus

$$(A\beta^n)^{(\alpha-1)\alpha^{m-1}} + (B\alpha^m)^{(\beta-1)\beta^{n-1}} - 1 \equiv 0, \quad (\text{mod } \alpha^m).$$

Jam si A, B et α, β non habent divisorem communem, primum hujus congruentiae membrum, symmetriae ipsarum α, β causa, pariter factorem habet β^n. Qua de causa haec congruentia in sequentem abit:

$$(A\beta^n)^{(\alpha-1)\alpha^{m-1}} + (B\alpha^m)^{(\beta-1)\beta^{n-1}} - 1 \equiv 0, \quad (\text{mod } \alpha^m \beta^n).$$

Simili modo facile demonstratur esse

$$(A\beta^n\gamma^p)^{(\alpha-1)\alpha^{m-1}} + (B\alpha^m\gamma^p)^{(\beta-1)\beta^{n-1}} + (C\alpha^m\beta^n)^{(\gamma-1)\gamma^{p-1}} \equiv 1,$$
$$(\text{mod } \alpha^m \beta^n \gamma^p)$$

et generaliter, modulo $\alpha^m \beta^n \gamma^p \ldots.$ posito $= \mu$, obtinemus

(III)

$$\left(\frac{A\mu}{\alpha^m}\right)^{(\alpha-1)\alpha^{m-1}}+\left(\frac{B\mu}{\beta^n}\right)^{(\beta-1)\beta^{n-1}}+\left(\frac{C\mu}{\gamma^p}\right)^{(\gamma-1)\gamma^{p-1}}+\ldots\equiv 1,$$
$$(\text{mod } \alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots)$$

designantibus A, B, $C\ldots$ numeros quoslibet per numeros primos α, β, $\gamma\ldots$ non divisibiles.

Unde, si statuamus $A=B=C=\ldots=a$, constat esse

$$x\equiv\frac{b}{a}\left[\left(\frac{a\mu}{\alpha^m}\right)^{(\alpha-1)\alpha^{m-1}}+\left(\frac{a\mu}{\beta^n}\right)^{(\beta-1)\beta^{n-1}}+\left(\frac{a\mu}{\gamma^p}\right)^{(\gamma-1)\gamma^{p-1}}+\ldots\right]$$

solutionem tertiam congruentiae $ax\equiv b$, (mod $\alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots$).

4) **Usus functionum Gamma.** E theoremate **Wilsoniano** fit

$$1.2.3\ldots(\alpha-1)=\Gamma(\alpha)\equiv-1,\quad(\text{mod } \alpha),$$

designante α numerum primum quemvis. Denotabimus per a_α residuum minimum positivum numeri a secundum modulum α, unde quum sit

$$a-a_\alpha\equiv 0,\quad\text{seu potius}\quad a_\alpha+(-1).a\equiv 0,\quad(\text{mod } \alpha),$$

patet esse

$$a_\alpha+a\Gamma(\alpha)\equiv 0,\quad(\text{mod } \alpha).$$

Quae congruentia, quum $\Gamma(\alpha)$ factorem habeat $a_\alpha<\alpha$, per a_α divisa, in membro primo numerum $1+\frac{a\Gamma(\alpha)}{a_\alpha}$ integrum praebet. Hinc fit

$$1+a\frac{\Gamma(\alpha)}{a_\alpha}\equiv 0,\quad(\text{mod } \alpha),$$

quo statim sequitur

$$(1+a\frac{\Gamma(\alpha)}{a_\alpha})^m\equiv 0,\quad(\text{mod } \alpha_m),$$

et porro, per multiplicationem congruentiarum

$$(1+a\frac{\Gamma(\alpha)}{a_\alpha})^m\equiv 0,\ (\text{mod } \alpha^m);\quad(1+a\frac{\Gamma(\beta)}{a_\beta})^n\equiv 0,\ (\text{mod } \beta^n);\ldots:$$

$$(1+a\frac{\Gamma(\alpha)}{a_\alpha})^m(1+a\frac{\Gamma(\beta)}{a_\beta})^n(1+a\frac{\Gamma(\gamma)}{a_\gamma})^p\ldots\equiv 0,\ (\text{mod } \alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots).$$

Itaque si statuamus

$$x=\frac{b}{a}[1-(1+a\frac{\Gamma(\alpha)}{a_\alpha})^m(1+a\frac{\Gamma(\beta)}{a_\beta})^n(1+a\frac{\Gamma(\gamma)}{a_\gamma})^p\ldots],$$

x pariter erit radix congruentiae $ax\equiv b$, (mod $\alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots$).

5) Vix monitu dignum est formulas I, II, III quasi amplificationes **Fermati** theorematis $z^{\alpha-1}-1\equiv 0$, (mod α), habendas esse.

XXXVII.

Neue Methode, durch beliebig gegebene Punkte Berührende an Kegelschnitte zu ziehen.

Von
dem Herausgeber.

Nach N. T. d. K. *) II. 2). ist die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte für ein rechtwinkliges Coordinatensystem:

$$1) \ldots n^2(Ax+By+C)^2=(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\},$$

wo alle Symbole ihre aus der angeführten Abhandlung bekannte Bedeutung haben.

Wenn nun (x_1y_1) ein beliebiger gegebener Punkt ist, durch welchen eine Berührende an den Kegelschnitt gelegt werden soll, und deren Berührungspunkt mit dem Kegelschnitte durch (xy) bezeichnet wird; so haben wir nach N. T. d. K. VIII. 3) ferner die Gleichung:

$$n^2(Ax+By+C)(Ax_1+By_1+C)$$
$$=(A^2+B^2)\{(x-f)(x_1-f)+(y-g)(y_1-g)\}$$

oder:

$$2) \ldots . \quad n^2(Ax_1+By_1+C)(Ax+By+C)$$
$$=(A^2+B^2)\{(x_1-f)(x-f)+(y_1-g)(y-g)\}.$$

Aus den beiden Gleichungen 1) und 2) müssen die Coordinaten x, y des Berührungspunkts bestimmt werden, welche Bestim-

*) N. T. d. K. bezeichnet immer: Neue Theorie der Kegelschnitte, worunter ich meine Abhandlung Thl. XXXI. Nr. XIII. verstehe.

mung aber für jetzt nicht in unserer Absicht liegt, indem wir vielmehr eine Construction der Berührenden suchen wollen.

Bemerken wir nun, dass die Gleichung 1) in Bezug auf die gesuchten Coordinaten x, y vom zweiten, dagegen die Gleichung 2) vom ersten Grade ist, so ist klar, dass es im Allgemeinen zwei Paare von Werthen dieser Coordinaten, also auch zwei Berührungspunkte, und folglich auch zwei durch den gegebenen Punkt $(x_1 y_1)$ gehende Berührende des Kegelschnitts geben wird. Bezeichnen wir daher jetzt diese beiden Berührungspunkte durch (xy) und $(x'y')$, so haben wir nach 2) zwischen ihren Coordinaten die beiden folgenden Gleichungen:

$$n^2(Ax_1+By_1+C)(Ax+By+C)$$
$$=(A^2+B^2)\{(x_1-f)(x-f)+(y_1-g)(y-g)\},$$
$$n^2(Ax_1+By_1+C)(Ax'+By'+C)$$
$$=(A^2+B^2)\{(x_1-f)(x'-f)+(y_1-g)(y'-g)\};$$

aus denen durch Subtraction sich die Gleichung:

$$3) \quad \ldots\ldots n^2(Ax_1+By_1+C)\{A(x-x')+B(y-y')\}$$
$$=(A^2+B^2)\{(x_1-f)(x-x')+(y_1-g)(y-y')\}$$

ergiebt.

Legen wir nun durch die beiden Berührungspunkte (xy) und $(x'y')$ eine Gerade, so ist deren Gleichung, wenn wir die veränderlichen oder laufenden Coordinaten durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bezeichnen:

$$\mathfrak{y}-y=\frac{y-y'}{x-x'}(\mathfrak{x}-x),$$

woraus sich

$$\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\mathfrak{x}-x},$$

und folglich, wenn man diesen Ausdruck von $\frac{y-y'}{x-x'}$ in die Gleichung 3) einführt, die folgende Gleichung der in Rede stehenden Geraden ergiebt:

$$4) \quad \ldots\ldots n^2(Ax_1+By_1+C)\{(A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)\}$$
$$=(A^2+B^2)\{(x_1-f)(\mathfrak{x}-x)+(y_1-g)(\mathfrak{y}-y)\}.$$

welche Gleichung man aber auch auf den folgenden Ausdruck bringen kann:

$$n^2(Ax_1+By_1+C)\{(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)-(Ax+By+C)\}$$
$$=(A^2+B^2)\{(x_1-f)(\mathfrak{x}-f)+(y_1-g)(\mathfrak{y}-g)-(x_1-f)(x-f)-(y_1-g)(y-g)\},$$

also, weil nach dem Obigen

$$n^2(Ax_1+By_1+C)(Ax+By+C)$$
$$=(A^2+B^2)\{(x_1-f)(x-f)+(y_1-g)(y-g)\}$$

ist, auf den Ausdruck:

$$5)\ \ldots\ldots\ n^2(Ax_1+By_1+C)(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C)$$
$$=(A^2+B^2)\{(x_1-f)(\mathfrak{x}-f)+(y_1-g)(\mathfrak{y}-g)\}.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts der durch diese Gleichung charakterisirten Geraden, welche bekanntlich durch die beiden Berührungspunkte geht, mit der Directrix durch X, Y; so haben wir zu deren Bestimmung die beiden folgenden Gleichungen:

$$AX+BY+C=0,$$

$$n^2(Ax_1+By_1+C)(AX+BY+C)$$
$$=(A^2+B^2)\{(x_1-f)(X-f)+(y_1-g)(Y-g)\};$$

woraus sich die Gleichung

$$6)\ \ldots\ldots\ (x_1-f)(X-f)+(y_1-g)(Y-g)=0$$

oder

$$7)\ \ldots\ldots\ Y-g=-\frac{x_1-f}{y_1-g}(X-f)$$

ergiebt, welche unmittelbar zu dem bemerkenswerthen Satze führt, dass der Punkt (XY) immer in der, in dem Brennpunkte (fg) auf die von demselben nach dem Punkte (x_1y_1) gezogene Gerade errichteten Senkrechten liegt; und da dies nun bei den Kegelschnitten, welche zwei Brennpunkte und zwei denselben entsprechende Directrixen haben, natürlich von jedem Brennpunkte und der demselben entsprechenden Directrix gilt, so gelangen wir überhaupt zu dem folgenden Satze:

Wenn durch einen Punkt zwei Berührende an einen Kegelschnitt gehen, so schneidet die durch deren Berührungspunkte mit dem Kegelschnitte gehende Ge-

rade die Directrixen in Punkten, welche in den durch die entsprechenden Brennpunkte auf die von denselben nach dem Punkte, durch welchen die beiden Berührenden gehen, errichteten Senkrechten liegen.

Für Kegelschnitte, die zwei Brennpunkte und zwei denselben entsprechende Directrixen haben, also für die Ellipse und für die Hyperbel, ergiebt sich aber hieraus unmittelbar die folgende merkwürdige Construction der durch einen gegebenen Punkt gehenden Berührenden:

Den gegebenen Punkt, durch welchen Berührende an eine Ellipse oder Hyperbel gezogen werden sollen, verbinde man mit den beiden Brennpunkten durch gerade Linien, errichte auf dieselben in den beiden Brennpunkten Perpendikel, bestimme deren Durchschnittspunkte mit den beiden entsprechenden Directrixen, ziehe durch diese beiden Durchschnittspunkte eine Gerade, und bestimme deren Durchschnittspunkte mit dem Kegelschnitte, welche die Berührungspunkte der gesuchten Berührenden sein werden.

Ob es zwei Berührende, oder nur eine, oder gar keine Berührende giebt, ergiebt sich jederzeit aus der Construction ganz von selbst, was einer weiteren Erläuterung hier nicht bedarf.

Für die Parabel müssen wir eine andere Construction zu finden suchen.

Zu dem Ende wollen wir den Durchschnittspunkt $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ der durch die Gleichung 5) charakterisirten Geraden mit der Axe des Kegelschnitts, deren Gleichung nach N. T. d. K. IV. 1), wenn immer die laufenden Coordinaten durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bezeichnet werden,

$$8) \quad \ldots\ldots \quad B(\mathfrak{x}-f)-A(\mathfrak{y}-g)=0$$

ist, bestimmen.

Nach 8) und 5) haben wir zur Bestimmung von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ die beiden folgenden Gleichungen:

$$A(\mathfrak{Y}-g)=B(\mathfrak{X}-f),$$

$$n^2(Ax_1+By_1+C)(A\mathfrak{X}+B\mathfrak{Y}+C)$$
$$=(A^2+B^2)\{(x_1-f)(\mathfrak{X}-f)+(y_1-g)(\mathfrak{Y}-g)\}$$

oder

$$A(\mathfrak{Y}-g)=B(\mathfrak{X}-f),$$

$$n^2(Ax_1+By_1+C)\{A(\mathfrak{X}-f)+B(\mathfrak{Y}-g)+Af+Bg+C\}$$
$$=(A^2+B^2)\{(x_1-f)(\mathfrak{X}-f)+(y_1-g)(\mathfrak{Y}-g)\};$$

und erhalten aus denselben nach leichter Rechnung:

$$9) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X}-f &= -\frac{n^2A(Af+Bg+C)(Ax_1+By_1+C)}{(A^2+B^2)\{Af+Bg+C+(n^2-1)(Ax_1+By_1+C)\}}, \\ \mathfrak{Y}-g &= -\frac{n^2B(Af+Bg+C)(Ax_1+By_1+C)}{(A^2+B^2)\{Af+Bg+C+(n^2-1)(Ax_1+By_1+C)\}}. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnen wir die Entfernung des Punktes $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ von dem Brennpunkte (fg) durch $\mathfrak{E}$; so ist

$$\mathfrak{E}^2 = (\mathfrak{X}-f)^2 + (\mathfrak{Y}-g)^2,$$

also nach 9):

$$10) \quad \mathfrak{E}^2 = \frac{n^4(Af+Bg+C)^2(Ax_1+By_1+C)^2}{(A^2+B^2)\{Af+Bg+C+(n^2-1)(Ax_1+By_1+C)\}^2}.$$

Für die Parabel ist $n=1$, also:

$$11) \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{E}^2 = \frac{(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2},$$

und folglich offenbar $\mathfrak{E}$ der Entfernung des Punktes (x_1y_1) von der Directrix gleich, was zu dem folgenden Satze führt:

Wenn durch einen Punkt zwei Berührende an eine Parabel gezogen sind, so ist der Durchschnittspunkt der durch die beiden Berührungspunkte gehenden Geraden mit der Axe von dem Brennpunkte eben so weit entfernt, wie der Punkt, durch welchen die beiden Berührenden gezogen sind, von der Directrix.

Die Gleichung der Directrix ist bekanntlich:

$$12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C = 0.$$

Die Gleichung der durch den Brennpunkt parallel mit der Directrix gezogenen Geraden, welche wir die Brennpunktslinie nennen wollen, ist

$$A(\mathfrak{x}-f) + B(\mathfrak{y}-g) = 0$$

oder

$$13) \quad \ldots \quad A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C - (Af+Bg+C) = 0.$$

Die Gleichung der durch den Scheitel parallel mit der Directrix gezogenen Geraden, welche wir die Scheitellinie nennen wollen, ist, wenn wir den Scheitel durch $(f'g')$ bezeichnen,

$$A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C - (Af'+Bg'+C) = 0.$$

ist, so hat

$$\mathfrak{A}\mathfrak{X}+\mathfrak{B}\mathfrak{Y}+C-(Af+Bg+C)$$

einerlei Vorzeichen mit

$$Ax_1+By_1+C-(Af+Bg+C),$$

woraus sich wegen der Gleichung 13) der folgende Satz ergiebt:

Wenn der Brennpunkt (fg) und der Punkt (x_1y_1) auf **einer** Seite der Directrix und auf entgegengesetzten Seiten der Scheitellinie liegen, so liegen der Punkt (x_1y_1) und $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ auf **einer** Seite der Brennpunktslinie.

Mit Hülfe der drei vorhergehenden Sätze lässt sich immer sicher beurtheilen, nach welcher Seite von dem Brennpunkte aus hin der Punkt $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ in der Axe der Parabel liegt, und wir haben nun die folgende Construction der Berührenden der Parabel:

In dem Brennpunkte errichte man auf die von demselben nach dem Punkte, durch welchen die Berührenden gezogen werden sollen, gezogene Gerade ein Perpendikel, und bestimme dessen Durchschnittspunkt mit der Directrix; dann trage man von dem Brennpunkte aus auf die Axe nach der Seite hin, welche durch die drei vorhergehenden Sätze sich jederzeit leicht bestimmen lässt, eine der Entfernung des Punktes, durch welchen die Berührenden gezogen werden sollen, von der Directrix gleiche gerade Linie auf, und ziehe nun durch deren Endpunkt und den vorher bestimmten Durchschnittspunkt des in Rede stehenden Perpendikels mit der Directrix eine Gerade, so sind die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Parabel die Berührungspunkte der gesuchten Berührenden mit der Parabel, welche also nun leicht construirt werden können. Uebrigens sieht man auf der Stelle ein, dass man der erwähnten Beurtheilung nicht weiter bedarf, wenn man nur von dem Punkte (x_1y_1) auf die Directrix ein Perpendikel fällt, und durch dessen Durchschnittspunkt mit der Directrix eine der von dem Brennpunkte nach dem Punkte (x_1y_1) gezogenen Geraden parallele Gerade zieht, deren Durchschnittspunkt mit der Axe der Parabel den Punkt $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ jederzeit bestimmt.

XXXVIII.

Ueber eine Aufgabe vom Schwerpunkte, über die Gaussische Auflösung des Kepler'schen Problems und über dessen Methode der Quadraturen.

Von

Herrn Director Professor Dr. *Strehlke*

zu Danzig.

---

1. *Aufgabe.* Man sucht den Schwerpunkt eines dreieckigen gleichmässig beschwerten Rahmens, in welchem die drei parallelen Seiten den Abstand m haben. (Taf. V. Fig. 2.)

Auflösung. Wenn h die Höhe des äusseren Dreiecks, r der Radius des einbeschriebenen Kreises, y der Abstand des Schwerpunkts von der zu h gehörigen Grundlinie, so ist

$$y(2r-m)=(r-m)(h-r+m)+\frac{hm^2}{3r}.$$

Setzt man $m=r$, so erhält man den Schwerpunkt der gleichmässig beschwerten Dreiecksfläche; wird $m=0$ genommen, so erhält man $2y=h-r$, oder den Schwerpunkt des Dreiecks, wenn die drei Seiten gleichmässig beschwert sind. Die beiden bekannten Aufgaben vom Schwerpunkte des Dreiecks erscheinen also hier als besondere Fälle einer allgemeinen Aufgabe.

2. Die Betrachtung der Gaussischen indirecten Auflösung des Kepler'schen Problems brachte mich auf den Gedanken, die Correction x (S. 11. der Theoria motus c. c.) nach den aufsteigenden Potenzen von $(M+e\sin\varepsilon-\varepsilon)$ zu entwickeln. Man erhält:

$$x=\frac{(M+e\sin\varepsilon-\varepsilon)}{(1-e\cos\varepsilon)}-\tfrac{1}{2}e.\frac{\sin\varepsilon(M+e\sin\varepsilon-\varepsilon)^2}{(1-e\cos\varepsilon)^3}$$

$$+\left(\frac{e^2\sin\varepsilon^2}{2}-\frac{(1-e\cos\varepsilon)e\cos\varepsilon}{6}\right)\frac{(M+e\sin\varepsilon-\varepsilon)^3}{(1-e\cos\varepsilon)^5}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nimmt man in dem S. 12. und S. 13. behandelten Beispiele mit Gauss den Näherungswerth $\varepsilon=326^{0}$, so erhält man, ohne neue Logarithmen aufzuschlagen, das erste Glied von $x=-1^{0}\,43'\,30'',49$; für das in die zweite Potenz von $(M+e\sin\varepsilon-\varepsilon)$ multiplicirte $+16'',185$, für das dritte Glied $0'',157$, folglich $x=-1^{0}\,43'\,30'',49$ und $E=324^{0}\,16'\,29'',51$.

3. Giebt es ein bequemes Mittel, die Constanten bei der Gaussischen Methode der Quadraturen zu bestimmen? Für $n=9$ lassen sich noch die Wurzeln der dabei in Betracht kommenden Gleichung

$$x^n-\frac{n^2}{2n}.x^{n-1}+\frac{n^2.(n-1)^2}{1.2.2n(2n-1)}.x^{n-2}-\frac{n^2.(n-1)^2.(n-2)^2}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)}.x^{n-3}$$

$$\ldots.+\frac{(-1)^n.n.(n-1)(n-2)\ldots.1}{2n.(2n-1)(2n-2)\ldots.(n+1)}$$

durch die Auflösung einer Gleichung des vierten Grades finden. (Crelle's Journ. Thl. I. S. 305. und Bretschneider in dem Programm des Realgymnasiums zu Gotha, Ostern 1849.)

XXXIX.

Zur Auflösung der cubischen Gleichungen.

Von

Herrn Dr. *Carl Spitz*,

Lehrer am Polytechnikum zu Carlsruhe.

---

§. 1.

Sind

$$U=0,\quad U'=0$$

die zwei Gleichungen zweier Kegelschnitte, so reducirt sich die Auffindung der vier Durchschnittspunkte derselben auf die Auflösung einer cubischen Gleichung. Da es uns aber frei steht, zwei beliebige Kegelschnitte der Schaar

$$U+\mu U'=0,$$

zu wählen, welche jene vier Durchschnittspunkte gemeinschaftlich haben, so liegt die Frage nahe, ob sich dieselben nicht so bestimmen lassen, dass jene cubische Gleichung in μ eine rein cubische werde.

Nachstehend wollen wir diese Frage einer näheren Erörterung unterwerfen und hieran eine sich aus der Untersuchung ergehende Auflösungsmethode der cubischen Gleichungen anreihen.

§. 2.

Die den zwei Kegelschnitten

$$U=Ay^2+2Byx+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0,$$
$$U'=A'y^2+2B'yx+C'x^2+2D'y+2E'x+F'=0$$

entsprechende Gleichung in μ ist von der Form

$$\mu^3 + L\mu^2 + M\mu + N = [\mu] = 0$$

die vorgelegte cubische Gleichung, so bestimme man mit Hilfe der quadratischen Gleichung (9) die Werthe von α und β, alsdann löse man die rein cubische Gleichung

$$[\beta]\lambda^3 + [\alpha] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

nach λ auf und suche endlich mittelst der Relation (2) die Werthe von μ.

§. 3.

Bei näherer Betrachtung ergibt sich, dass, wenn α und β reell sind, man für λ aus der Gleichung

$$[\beta]\lambda^3 + [\alpha] = 0,$$

und hiernach auch für μ aus der Relation

$$\mu = \frac{\alpha + \beta\lambda}{1+\lambda},$$

einen reellen und zwei imaginäre Werthe erhält; dagegen, wenn α und β imaginär sind, drei reelle Werthe von μ resultiren. Je nachdem also die Gleichung (9) für z zwei reelle oder zwei imaginäre Wurzeln liefert, hat die Gleichung in μ bezüglich eine reelle und zwei imaginäre, oder drei reelle Wurzeln. In letzterem Falle wird man also auch durch die oben angegebene Methode auf die Aufgabe geführt, aus einem complexen Ausdrucke die Kubikwurzel zu ziehen, was bekanntlich die Schwierigkeit beim irreducibeln Falle ausmacht.

§. 4.

Nebst der eben angeführten Auflösungsmethode cubischer Gleichungen ist in obiger Entwickelung noch das interessante Resultat enthalten, dass in einer Schaar von Kegelschnitten es immer zwei, und nur zwei solcher gibt, welche die Eigenschaft haben, dass die zugehörige Gleichung in μ eine rein cubische ist. Beide Kegelschnitte stehen in eigenthümlichem Zusammenhange, auf dessen Untersuchung wir jedoch hier nicht näher eingehen wollen. Zum Schlusse mag noch eine Anwendung der obigen Auflösungsmethode auf ein Zahlenbeispiel hier Platz finden.

Es sei

$$x^3 - 3x^2 - 6x - 8 = 0$$

die vorgelegte Gleichung, so geht dafür die Gleichung (9) über in

Aus vorstehenden Gleichungen folgt:

$$(\beta-\alpha)\{3\alpha\beta+L(\alpha+\beta)+M\}=0.$$

Nach der Relation (2) dürfen wir α nicht gleich β annehmen, weil sonst folgen würde:

$$\mu=\alpha=\beta,$$

somit die Bestimmung von α und β von der Auflösung der Gleichung in μ abhinge. Wir haben daher:

$$3\alpha\beta+L(\alpha+\beta)+M=0. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Aus den Gleichungen (3) und (5) ergibt sich

$$L\alpha\beta+M(\alpha+\beta)+3N=0, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

und wir erhalten demnach zur Bestimmung von α und β die zwei vorstehenden Gleichungen (5) und (6).

Löst man dieselben nach den Unbekannten $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$ auf, so folgt

$$\alpha+\beta=\frac{9N-LM}{L^2-3M}, \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$\alpha\beta=\frac{M^2-3LN}{L^2-3M}. \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Diese Auflösung ist immer möglich, sobald nicht die Beziehung stattfindet:

$$L^2-3M=0.$$

Ist dieses aber der Fall, so hat die Gleichung in μ die Form

$$(\mu+\frac{L}{3})^3+N-\frac{L^3}{27}=0,$$

und ist also selbst schon eine rein cubische.

Der Theorie der algebraischen Gleichungen zufolge sind nun nach (7) und (8) α und β die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$z^2-\frac{9N-LM}{L^2-3M}z+\frac{M^2-3LN}{L^2-3M}=0. \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Vorstehende Entwickelung hat uns somit auf eine Auflösungsmethode der cubischen Gleichungen geführt, welche den Vortheil gewährt, dass das zweite Glied nicht erst weggeschafft zu werden braucht.

Ist nämlich

(1) $$x=\frac{r}{a}\xi,\qquad y=\frac{r}{b}\eta,\qquad z=\frac{r}{c}\zeta$$

verbunden sind, unter r, a, b, c positive constante Zahlen verstanden, so hat dieses neue geometrische Gebilde, das ich dem ersten „entsprechend" nenne, höchst merkwürdige Eigenschaften, die zu untersuchen der Gegenstand dieser Mittheilung ist.

1. Es sei

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

die Gleichung einer Kugel, so ist die Gleichung der ihr entsprechenden Fläche

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1,$$

d. h. der Kugel vom Radius r im ersten Gebilde entspricht ein Ellipsoid, das die Halbaxen a, b, c hat, im zweiten Gebilde.

2. Es sei

$$xx_1+yy_1+zz_1=r^2$$

die Gleichung einer Ebene, z. B. jener, welche im Punkte $x_1y_1z_1$ die Kugel, deren Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

ist, berührt, so ist die Gleichung der ihr entsprechenden Fläche

$$\frac{\xi\xi_1}{a^2}+\frac{\eta\eta_1}{b^2}+\frac{\zeta\zeta_1}{c^2}=1,$$

und diess ist die Gleichung jener Ebene, welche im Punkte $\xi_1\eta_1\zeta_1$ das Ellipsoid

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$$

berührt. Es entspricht sonach jeder die Kugel berührenden Ebene im ersten Gebilde eine das Ellipsoid berührende Ebene im zweiten Gebilde.

3. Seien

$$Ax+By+Cz=D,$$
$$Ax+By+Cz=D_1$$

die Gleichungen von zwei parallelen Ebenen im ersten Gebilde, so hat man für das zweite Gebilde:

$$\frac{A\xi}{a}+\frac{B\eta}{b}+\frac{C\zeta}{c}=\frac{D}{r},$$
$$\frac{A\xi}{a}+\frac{B\eta}{b}+\frac{C\zeta}{c}=\frac{D_1}{r},$$

d. h. einem Systeme paralleler Ebenen im ersten Gebilde entspricht ein System paralleler Ebenen im zweiten Gebilde.

4. Das durch die vier Punkte

$$x_1y_1z_1, \quad x_2y_2z_2, \quad x_3y_3z_3, \quad x_4y_4z_4$$

gehende Tetraeder hat einen Körperinhalt, der bekanntlich aus folgender Formel gefunden wird:

$$K = \pm \tfrac{1}{6} \begin{Bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{Bmatrix},$$

und ebenso hat das Tetraeder, welches durch die Punkte

$$\xi_1\eta_1\zeta_1, \quad \xi_2\eta_2\zeta_2, \quad \xi_3\eta_3\zeta_3, \quad \xi_4\eta_4\zeta_4$$

geht, zum Körperinhalte:

$$\varkappa = \pm \tfrac{1}{6} \begin{Bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{Bmatrix}.$$

Nun lässt sich aber $\varkappa$ vermöge eines bekannten Satzes über Determinanten auf folgende Weise schreiben:

$$\varkappa = \pm \frac{abc}{6r^3} \begin{Bmatrix} 1 & \frac{r\xi_1}{a} & \frac{r\eta_1}{b} & \frac{r\zeta_1}{c} \\ 1 & \frac{r\xi_2}{a} & \frac{r\eta_2}{b} & \frac{r\zeta_2}{c} \\ 1 & \frac{r\xi_3}{a} & \frac{r\eta_3}{b} & \frac{r\zeta_3}{c} \\ 1 & \frac{r\xi_4}{a} & \frac{r\eta_4}{b} & \frac{r\zeta_4}{c} \end{Bmatrix},$$

oder mit Berücksichtigung des Zusammenhanges zwischen den Coordinaten des ersten und zweiten Gebildes:

$$\varkappa = \pm \frac{abc}{6r^3} \begin{Bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{Bmatrix},$$

folglich hat man:

$$\frac{K}{x} = \frac{r^3}{abc}.$$

Sind nun

$$K_1,\ K_2,\ K_3,\ \ldots$$

mehrere einen Körper bildende Tetraeder des ersten Gebildes,

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

mehrere entsprechende Tetraeder des zweiten Gebildes, so hat man auch:

$$\frac{K+K_1+K_2+\ldots}{x+x_1+x_2+\ldots} = \frac{r^3}{abc},$$

d. h. die Körperinhalte zweier entsprechenden Körper verhalten sich zu einander wie r^3 zu abc.

5. Sei K ein der Kugel

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

eingeschriebene Körper, der unter allen seiner Art ein Maximum ist, z. B. K sei ein reguläres Dodekaeder, welches also einen grösseren Körperinhalt hat, als alle anderen Dodekaeder, die sich der Kugel einschreiben lassen. Ich behaupte nun, der dem Körper K entsprechende, dem Ellipsoide

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$$

eingeschriebener Körper x im zweiten Gebilde ist ein grösster unter allen seiner Art; wenn beispielsweise x der einem regulären Dodekaeder entsprechende Körper ist, so hat er einen grösseren Körperinhalt, als wenn es der entsprechende Körper eines der Kugel eingeschriebenen unregelmässigen Dodekaeders wäre. Denn, es seien K und K_1 die Körperinhalte zweier der Kugel eingeschriebenen Körper und $K > K_1$; ferner seien x und x_1 die Körper, welche den Körpern K und K_1 entsprechen, so hat man

$$\frac{K}{x}=\frac{r^3}{abc}, \quad \frac{K_1}{x_1}=\frac{r^3}{abc};$$

folglich

$$K:K_1 = x:x_1.$$

Ist also $K > K_1$, so ist auch $x > x_1$, und somit unsere Behauptung gerechtfertigt.

6. Der Kugel lassen sich unendlich viele reguläre Körper (z. B. Würfel) einschreiben, die alle sich von einander bloss durch ihre Lage im Raume unterscheiden. Jedem bestimmt gelegenen, regulären Körper des Kugelgebildes entspricht ein bestimmt gelegener grösster Körper im Ellipsoidgebilde, und alle diese verschiedenen grössten Körper des Ellipsoidgebildes haben einerlei Körperinhalt.

7. Man kann daher folgenden merkwürdigen Satz aussprechen: Den fünf regulären Körpern, die sich in den verschiedensten Lagen der Kugel einschreiben lassen, nämlich

Tetraeder, Hexaeder, Octaeder, Dodekaeder, Ikosaeder

entsprechen fünf Gattungen von Körpern, die sich jedem Ellipsoid einschreiben lassen; diese sind:

Tetraeder, Parallelpipede, Octaeder, Dodekaeder, Ikosaeder,

und sind die grössten ihrer Art, d. h. alle die Tetraeder in einem Ellipsoide, welche den verschieden gelegenen regulären Tetraedern, die einer Kugel eingeschrieben sind, entsprechen, haben gleichen Körperinhalt, und sind zugleich die grössten Tetraeder, welche sich einem Ellipsoide einschreiben lassen; so auch alle die Parallelepipede in einem Ellipsoide, welche den verschieden gelegenen Würfeln, die einer Kugel eingeschrieben sind, entsprechen, haben gleichen Körperinhalt und sind die grössten Parallelepipede, welche sich einem Ellipsoide einschreben lassen, u. s. w.

8. Es sei auf der Kugel vom Radius r ein sphärisches Dreieck MAB (Taf. V. Fig. 3.) gezeichnet, ferner durch den Punkt M und die Punkte C, D, welche Gegenpunkte zu A und B sind, ein Kreis gelegt, so sind bekanntlich alle die sphärischen Dreiecke MAB, deren Grundlinie AB fest ist, deren Scheitel beliebig wo in dem Kreise MCD liegt, gleich gross.

Construirt man das diesem entsprechende Gebilde, und bedeuten A', B', C', D', O', M' die den Punkten A, B, C, D, O, M entsprechenden Punkte, so sind alle die Pyramiden, welche die krumme Oberfläche $A'B'M'$ zur Basis, die Ebenen $O'A'B'$, $O'A'M'$, $O'B'M'$ zu Seitenflächen und somit O' zur Spitze haben, von gleichem Körperinhalte, mag der Punkt M' sich beliebig wo in der Ellipse $M'C'D'$ befinden.

Man kann nun auch übergehen zur Betrachtung der kleinsten, einem Ellipsoide umschriebenen Körper. Da aber hier auf ganz demselben Wege ganz analoge Resultate gefunden werden, so halte ich ein näheres Eingehen für überflüssig.

XLI.

Ueber eine auf die Bestimmung der Lage der Punkte in einer Ebene durch ihre Entfernungen von zwei gegebenen festen Punkten gegründete analytische Geometrie, mit Rücksicht auf niedere Geodäsie.

Von
dem Herausgeber.

---

§. 1.

Die grossen Vorzüge, welche die in der analytischen Geometrie allgemein gebräuchliche Bestimmung der Lage der Punkte durch rechtwinklige oder polare Coordinaten vor anderen Methoden der Lagenbestimmung hat, können nicht in Abrede gestellt werden, wenn es sich namentlich um Betrachtungen und Untersuchungen von rein theoretischer Natur handelt. Wenn man aber in der niederen Geodäsie bloss mit den einfachsten Instrumenten zum Ziehen und Messen gerader Linien versehen ist und die Aufnahme auf blosse Alignements gründet, ist man lediglich darauf hingewiesen, die Lage der aufzunehmenden Punkte durch ihre Entfernungen von zwei gegebenen oder aus anderen Messungen als bekannt zu betrachtenden Punkten zu bestimmen, wobei zu bemerken ist, dass solche kleinere Aufnahmen durch blosse Alignements auf ebenem Terrain bei gehöriger Sorgfalt eine sehr genügende Genauigkeit gewähren. Daher scheint mir in praktischer Beziehung eine etwas weitere Ausbildung einer auf die Bestimmung der Lage der Punkte in einer Ebene durch ihre Entfernungen von zwei gegebenen Punkten gegründeten analytischen Geometrie nicht ohne Interesse zu sein. Ich glaube aber gefunden zu haben, dass auf diesem Wege sich auch manche für die

reine Theorie bemerkenswerthe Resultate ergeben, die zu weiteren Folgerungen führen können, und will mir daher erlauben, in dem vorliegenden Aufsatze einige die in Rede stehende Methode der Lagenbestimmung der Punkte in der Ebene betreffende Betrachtungen anzustellen.

§. 2.

Wir nehmen an, dass zwei feste Punkte O und O_1 gegeben seien, deren also gleichfalls gegebene Entfernung OO_1 von einander wir durch a bezeichnen wollen. Ist nun A ein beliebiger Punkt in der Constructionsebene, in welcher natürlich auch die Punkte O und O_1 liegen, da wir hier alle unsere Betrachtungen überhaupt nur auf eine Ebene beschränken; so wollen wir die Entfernungen des Punktes A von den beiden festen Punkten O und O_1 respective durch r und r_1, und den Punkt A selbst, wenn es die Bequemlichkeit der Darstellung fordert, durch (rr_1) bezeichnen.

Um nun zunächst auf die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes A oder (rr_1) zurückzugehen, wollen wir O als den Anfang und die von O aus nach O_1 hin gehende Gerade als den positiven Theil der Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems annehmen, und der Abscissenaxe wie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie eine positive und eine negative Seite beilegen, welchen beiden Seiten dann bekanntlich auch die positiven und negativen Ordinaten entsprechen. In Bezug auf dieses rechtwinklige Coordinatensystem sollen die Coordinaten des Punktes A oder (rr_1) durch x und y, dieser Punkt selbst aber mag wie gewöhnlich durch (xy) bezeichnet werden; und die rechtwinkligen Coordinaten x, y durch die Entfernungen r, r_1 auszudrücken, soll jetzt unser erstes Geschäft sein.

Zu dem Zwecke liefert uns die analytische Geometrie für rechtwinklige Coordinatensysteme unmittelbar die beiden Gleichungen:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r_1{}^2 = (a-x)^2 + y^2 = a^2 - 2ax + x^2 + y^2;$$

durch deren Subtraction man auf der Stelle die Gleichung

$$r^2 - r_1{}^2 = 2ax - a^2,$$

also zur Bestimmung von x die in völliger Allgemeinheit gültige Formel

$$x = \frac{r^2 - r_1{}^2 + a^2}{2a}$$

erhält.

Um nun y zu finden, müsste man den vorstehenden Werth von x in eine der beiden Gleichungen

$$r^2=x^2+y^2,\quad r_1^2=(a-x)^2+y^2$$

einführen, und dann y bestimmen, wodurch man für y einen Ausdruck mit doppeltem Vorzeichen erhalten würde, was auch ganz in der Natur der Sache liegt, da bloss durch die beiden Entfernungen r, r_1 offenbar die Seite der durch die beiden festen Punkte O und O_1 bestimmten Geraden, auf welcher der Punkt A oder (rr_1) liegt, nicht bestimmt wird. Diese Unbestimmtheit wird, wie es mir scheint, bei diesen Untersuchungen am besten und zweckmässigsten auf folgende Weise gehoben.

Als eine Hülfsgrösse führe man in die hier vorkommenden Rechnungen und Formeln den aus den Grössen a, r, r_1 leicht bestimmbaren Flächeninhalt des Dreiecks OAO_1 ein, betrachte diesen Flächeninhalt aber als positiv oder als negativ, jenachdem der Punkt A auf der positiven oder negativen Seite der durch die Punkte O und O_1 gehenden Geraden liegt, und bezeichne denselben mit Rücksicht hierauf durch D; dann hat man zur Bestimmung von y offenbar die ganz allgemein gültige Formel

$$y=\frac{2D}{a},$$

und daher überhaupt für die beiden rechtwinkligen Coordinaten x, y des Punktes A die beiden folgenden mit völliger Allgemeinheit geltenden Ausdrücke:

$$1)\quad \ldots\ldots\quad x=\frac{r^2-r_1^2+a^2}{2a},\quad y=\frac{2D}{a}.$$

Was die Hülfsgrösse D betrifft, so kann dieselbe aus den Entfernungen a, r, r_1 in allen Fällen mittelst der bekannten Formel

$$2)\quad D=\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+r+r_1)(r+r_1-a)(a+r_1-r)(a+r-r_1)},$$

in welcher man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem der Punkt A auf der positiven oder negativen Seite der durch die Punkte O und O_1 bestimmten Geraden liegt, leicht berechnet werden.

§. 3.

Die Gleichung der geraden Linie für rechtwinklige Coordinaten ist bekanntlich, wenn jetzt x, y die veränderlichen oder laufenden Coordinaten bezeichnen:

3) . . . . $y = Ax + B$,

wo A und B zwei willkührliche Constanten sind.

Werden nun auch r, r_1, D als veränderlich betrachtet, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen, unter der Voraussetzung, dass das Zeichen von D immer richtig bestimmt wird, allgemein:

$$x = \frac{r^2 - r_1^2 + a^2}{2a}, \quad y = \frac{2D}{a};$$

also:

$$\frac{2D}{a} = \frac{A}{2a}(r^2 - r_1^2 + a^2) + B,$$

woraus sich sogleich

$$D = \tfrac{1}{4}A(r^2 - r_1^2) + \tfrac{1}{2}a(\tfrac{1}{2}Aa + B),$$

und folglich, wenn der Kürze wegen

4) . . . . . $\mathrm{A} = \tfrac{1}{4}A$, $\mathrm{B} = \tfrac{1}{2}a(\tfrac{1}{2}Aa + B)$

gesetzt wird, wo nun auch A und B zwei willkührliche Constanten bezeichnen, als allgemeine Gleichung der geraden Linie zwischen r und r_1 die Gleichung

5) . . . $D = \mathrm{A}(r^2 - r_1^2) + \mathrm{B}$ oder $D - \mathrm{A}(r^2 - r_1^2) = \mathrm{B}$

ergiebt.

§. 4.

Wenn die Gleichungen

$$D = \mathrm{A}(r^2 - r_1^2) + \mathrm{B}, \quad D = \mathrm{A}'(r^2 - r_1^2) + \mathrm{B}'$$

zweier geraden Linien gegeben sind, und r, r_1 dem Durchschnittspunkte dieser beiden geraden Linien entsprechen sollen, so hat man r, r_1, indem man dieselben nicht mehr als veränderliche, sondern als algebraisch-unbekannte Grössen betrachtet, aus den beiden gegebenen Gleichungen durch gewöhnliche algebraische Elimination zu bestimmen. Zuerst erhält man aber aus diesen Gleichungen leicht:

6) . . . $r^2 - r_1^2 = -\dfrac{\mathrm{B} - \mathrm{B}'}{\mathrm{A} - \mathrm{A}'}$, $D = \dfrac{\mathrm{AB}' - \mathrm{BA}'}{\mathrm{A} - \mathrm{A}'}$;

wodurch zuvörderst die Grössen $r^2 - r_1^2$ und D ohne alle Zweideutigkeit gefunden sind. Nun ist aber offenbar:

$$\frac{4D^2}{a^2}=r^2-\left\{\frac{(r^2-r_1^2)+a^2}{2a}\right\}^2,$$

$$\frac{4D^2}{a^2}=r_1^2-\left\{\frac{(r^2-r_1^2)-a^2}{2a}\right\}^2;$$

also:

$$7)\ldots\ldots\begin{cases} r=\sqrt{\dfrac{4D^2}{a^2}+\left\{\dfrac{(r^2-r_1^2)+a^2}{2a}\right\}^2}, \\ r_1=\sqrt{\dfrac{4D^2}{a^2}+\left\{\dfrac{(r^2-r_1^2)-a^2}{2a}\right\}^2}; \end{cases}$$

mittelst welcher Formeln nun auch r und r_1 berechnet werden können. Auf welcher Seite der durch die beiden Punkte O und O_1 bestimmten Geraden der Durchschnittspunkt der beiden gegebenen Geraden liegt, wird durch das Vorzeichen von D in der zweiten der Formeln 6) unmittelbar bestimmt.

§. 5.

Wir wollen nun die durch die beiden Punkte (rr_1) und $(\varrho\varrho_1)$, für welche die aus dem Vorhergehenden bekannten Hülfsgrössen respective durch D und $\varDelta$ bezeichnet werden mögen, gehende Gerade betrachten.

Die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte (rr_1) und $(\varrho\varrho_1)$ seien respective x, y und ξ, η; so ist die Gleichung der in Rede stehenden Geraden, wenn jetzt X, Y die veränderlichen oder laufenden rechtwinkligen Coordinaten bezeichnen, bekanntlich:

$$Y-y=\frac{y-\eta}{x-\xi}(X-x)$$

oder

$$Y=AX+B,$$

wenn wir

$$A=\frac{y-\eta}{x-\xi},\quad B=\frac{x\eta-y\xi}{x-\xi}$$

setzen. Nach 1) ist aber:

$$x=\frac{r^2-r_1^2+a^2}{2a},\quad y=\frac{2D}{a};$$

$$\xi=\frac{\varrho^2-\varrho_1^2+a^2}{2a},\quad \eta=\frac{2\varDelta}{a};$$

also:

$$x-\xi=\frac{(r^2-r_1{}^2)-(\varrho^2-\varrho_1{}^2)}{2a},\quad y-\eta=\frac{2(D-\varDelta)}{a};$$

und folglich:

$$8)\quad\ldots\quad A=\frac{4(D-\varDelta)}{(r^2-r_1{}^2)-(\varrho^2-\varrho_1{}^2)}$$

$$=\frac{4(D-\varDelta)}{(r+r_1)(r-r_1)-(\varrho+\varrho_1)(\varrho-\varrho_1)}.$$

Bezeichnen wir den 180° nicht übersteigenden Winkel, unter welchem die durch die Punkte (rr_1) und $(\varrho\varrho_1)$ gehende Gerade von O aus nach O_1 und von OO_1 aus nach der positiven Seite dieser Linie hin gegen die durch die Punkte O und O_1 gehende Gerade geneigt ist, durch φ; so ist bekanntlich

$$\tang\varphi=A,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$9)\quad\ldots\quad \tang\varphi=\frac{4(D-\varDelta)}{(r^2-r_1{}^2)-(\varrho^2-\varrho_1{}^2)}$$

$$=\frac{4(D-\varDelta)}{(r+r_1)(r-r_1)-(\varrho+\varrho_1)(\varrho-\varrho_1)},$$

welche Formel wohl hin und wieder praktischen Nutzen haben kann.

Zur Bestimmung von B bedient man sich am besten der Formel

$$B=y-Ax,$$

aus welcher sich mittelst des Vorhergehenden

$$B=\frac{2D}{a}-\frac{2(r^2-r_1{}^2+a^2)(D-\varDelta)}{a\{(r^2-r_1{}^2)-(\varrho^2-\varrho_1{}^2)\}},$$

also, wie man nach einigen leichten Reductionen findet:

$$10)\quad\ldots\quad B=2\frac{(r^2-r_1{}^2+a^2)\varDelta-(\varrho^2-\varrho_1{}^2+a^2)D}{a\{(r^2-r_1{}^2)-(\varrho^2-\varrho_1{}^2)\}}$$

$$=2\frac{(r^2-r_1{}^2+a^2)\varDelta-(\varrho^2-\varrho_1{}^2+a^2)D}{a\{(r+r_1)(r-r_1)-(\varrho+\varrho_1)(\varrho-\varrho_1)\}}$$

ergiebt.

Bezeichnen wir die Gleichung der durch die Punkte (rr_1) und $(\varrho\varrho_1)$ gehenden Geraden, indem R, R_1, D veränderliche Grössen bezeichnen, durch

$$D = A(R^2 - R_1^2) + B,$$

so haben wir zur Bestimmung der Constanten A und B die beiden Gleichungen:

$$D = A(r^2 - r_1^2) + B,$$

$$\varDelta = A(\varrho^2 - \varrho_1^2) + B;$$

aus denen sich leicht:

$$11) \ldots\ldots A = \frac{D - \varDelta}{(r^2 - r_1^2) - (\varrho^2 - \varrho_1^2)}$$

$$= \frac{D - \varDelta}{(r + r_1)(r - r_1) - (\varrho + \varrho_1)(\varrho - \varrho_1)}$$

und

$$12) \ldots\ldots B = \frac{(r^2 - r_1^2)\varDelta - (\varrho^2 - \varrho_1^2)D}{(r^2 - r_1^2) - (\varrho^2 - \varrho_1^2)}$$

$$= \frac{(r + r_1)(r - r_1)\varDelta - (\varrho + \varrho_1)(\varrho - \varrho_1)D}{(r + r_1)(r - r_1) - (\varrho + \varrho_1)(\varrho - \varrho_1)}$$

ergiebt.

§. 6.

Bezeichnen wir die Entfernung der beiden Punkte (rr_1) und $(\varrho\varrho_1)$ von einander durch E, so ist bekanntlich:

$$E = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Nun ist aber nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$x - \xi = \frac{(r^2 - r_1^2) - (\varrho^2 - \varrho_1^2)}{2a}, \quad y - \eta = \frac{2(D - \varDelta)}{a};$$

also:

$$13) \quad E = \sqrt{\left\{\frac{(r^2 - r_1^2) - (\varrho^2 - \varrho_1^2)}{2a}\right\}^2 + \left\{\frac{2(D - \varDelta)}{a}\right\}^2},$$

oder:

$$14) \quad E = \sqrt{\left\{\frac{(r + r_1)(r - r_1) - (\varrho + \varrho_1)(\varrho - \varrho_1)}{2a}\right\}^2 + \left\{\frac{2(D - \varDelta)}{a}\right\}^2},$$

oder auch:

$$15) \quad E = \frac{\sqrt{\{(r + r_1)(r - r_1) - (\varrho + \varrho_1)(\varrho - \varrho_1)\}^2 + 16(D - \varDelta)^2}}{2a}.$$

Dass diese Formeln in der Praxis vielfachen Nutzen haben können, braucht kaum noch besonders bemerkt zu werden.

Setzt man

$$16) \ldots \tan g\,\omega = \frac{(r+r_1)(r-r_1)-(\varrho+\varrho_1)(\varrho-\varrho_1)}{4(D-\Delta)},$$

und nimmt in der folgenden Gleichung bloss auf den absoluten Werth der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens Rücksicht, so ist:

$$17) \ldots\ldots\ldots E = \frac{2(D-\Delta)}{a\cos\omega},$$

mittelst welcher Formeln E ohne grosse Weitläufigkeit berechnet werden kann.

§. 7.

Wenn

$$(r'r_1'),\ (r''r_1''),\ (r'''r_1'''),\ (r^{IV}r_1^{IV}),\ldots (r^{(n)}r_1^{(n)})$$

oder

$$(x'y'),\ (x''y''),\ (x'''y'''),\ (x^{IV}y^{IV}),\ldots (x^{(n)}y^{(n)})$$

die Ecken eines beliebigen Vielecks von n Seiten sind, dessen Inhalt wir durch F bezeichnen wollen; so ist nach einer bekannten Formel, wenn wir nur den absoluten Werth der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der folgenden Gleichung berücksichtigen:

$$2F = x'(y''-y^{(n)}) + x''(y'''-y') + x'''(y^{IV}-y'') + x^{IV}(y^{V}-y''') + \ldots$$
$$\ldots + x^{(n-1)}(y^{(n)}-y^{(n-2)}) + x^{(n)}(y'-y^{(n-1)}).$$

Nun ist aber, wenn

$$D',\ D'',\ D''',\ D^{IV},\ldots D^{(n)}$$

ihre bekannte Bedeutung haben, nach 1):

$$x' = \frac{r'^2-r_1'^2+a^2}{2a}, \quad y' = \frac{2D'}{a};$$
$$x'' = \frac{r''^2-r_1''^2+a^2}{2a}, \quad y'' = \frac{2D''}{a};$$
$$x''' = \frac{r'''^2-r_1'''^2+a^2}{2a}, \quad y''' = \frac{2D'''}{a};$$

u. s. w.

$$x^{(n)} = \frac{r^{(n)2}-r_1^{(n)2}+a^2}{2a}, \quad y^{(n)} = \frac{2D^{(n)}}{a};$$

also, wenn auch in der folgenden Gleichung bloss der absolute Werth der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens berücksichtigt wird, wie überhaupt in allen folgenden Ausdrücken des Flächeninhalts F, was wir hier ein für alle Mal bemerken:

$$\begin{aligned}2a^2F = &\ (r'^2 - r_1'^2 + a^2)(D'' - D^{(n)})\\ &+ (r''^2 - r_1''^2 + a^2)(D''' - D')\\ &+ (r'''^2 - r_1'''^2 + a^2)(D^{IV} - D'')\\ &\text{u. s. w.}\\ &+ (r^{(n-1)2} - r_1^{(n-1)2} + a^2)(D^{(n)} - D^{(n-2)})\\ &+ (r^{(n)2} - r_1^{(n)2} + a^2)(D' - D^{(n-1)}).\end{aligned}$$

Weil aber die Summe der Grössen

$$D'' - D^{(n)},\quad D''' - D',\quad D^{IV} - D'', \ldots\ldots, D^{(n)} - D^{(n-2)},\quad D' - D^{(n-1)}$$

offenbar verschwindet; so ist:

$$18) \ldots \quad \begin{aligned}2a^2F = &\ (r'^2 - r_1'^2)(D'' - D^{(n)})\\ &+ (r''^2 - r_1''^2)(D''' - D')\\ &+ (r'''^2 - r_1'''^2)(D^{IV} - D'')\\ &\text{u. s. w.}\\ &+ (r^{(n-1)2} - r_1^{(n-1)2})(D^{(n)} - D^{(n-2)})\\ &+ (r^{(n)2} - r_1^{(n)2})(D' - D^{(n-1)})\end{aligned}$$

oder:

19)

$$\begin{aligned}2a^2F = &\ (r' + r_1')(r' - r_1')(D'' - D^{(n)})\\ &+ (r'' + r_1'')(r'' - r_1'')(D''' - D')\\ &+ (r''' + r_1''')(r''' - r_1''')(D^{IV} - D'')\\ &\text{u. s. w.}\\ &+ (r^{(n-1)} + r_1^{(n-1)})(r^{(n-1)} - r_1^{(n-1)})(D^{(n)} - D^{(n-2)})\\ &+ (r^{(n)} + r_1^{(n)})(r^{(n)} - r_1^{(n)})(D' - D^{(n-1)}),\end{aligned}$$

welche Formel bei der Bestimmung des Flächeninhalts in ihrem Inneren schwer zugänglicher Figuren, z. B. bei der Bestimmung des Flächeninhalts von Wäldern, praktisch nützlich sein kann.

Wäre etwa

$$A' A'' A''' \ldots . A^{(m)} A^{(m+1)} \ldots . A^{(n-1)} A^{(n)}$$

eine mit Wald bestandene Fläche, und alle Ecken des Theils

$$A' A'' A''' \ldots . A^{(m)}$$

aus zwei Punkten O und O_1 zugänglich, alle Ecken des Theils

$$A^{(m)} A^{(m+1)} \ldots . A^{(n)} A'$$

aber aus zwei anderen Punkten O' und O_1' zugänglich; so könnte man die Flächeninhalte dieser beiden Theile mittelst der obigen Formeln bestimmen, und durch deren Addition dann den Flächeninhalt der ganzen gegebenen Figur erhalten.

Für $n=3$, d. h. für ein Dreieck, ist

$$20) \ldots . 2a^2F = (r'+r_1')(r'-r_1')(D''-D''') \\ +(r''+r_1'')(r''-r_1'')(D'''-D') \\ +(r'''+r_1''')(r'''-r_1''')(D'-D'').$$

§. 8.

Sollen drei Punkte

$$(r'r_1'),\quad (r''r_1''),\quad (r'''r_1''')$$

in einer und derselben geraden Linie liegen, so müssen, wenn D', D'', D''' ihre bekannte Bedeutung haben, nach 5) die drei folgenden Gleichungen Statt finden:

$$D' = \mathrm{A}(r'^2-r_1'^2)+\mathrm{B},$$
$$D'' = \mathrm{A}(r''^2-r_1''^2)+\mathrm{B},$$
$$D''' = \mathrm{A}(r'''^2-r_1'''^2)+\mathrm{B}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$(r''^2-r_1''^2)-(r'''^2-r_1'''^2),\quad (r'''^2-r_1'''^2)-(r'^2-r_1'^2),\\ (r'^2-r_1'^2)-(r''^2-r_1''^2)$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die folgende Gleichung, durch welche bedingt wird, dass die drei in Rede stehenden Punkte in derselben geraden Linie liegen:

$$21) \ldots \left.\begin{array}{l} \{(r''^2-r_1''^2)-(r'''^2-r_1'''^2)\}D' \\ +\{(r'''^2-r_1'''^2)-(r'^2-r_1'^2)\}D'' \\ +\{(r'^2-r_1'^2)-(r''^2-r_1''^2)\}D''' \end{array}\right\} = 0,$$

oder:

$$(r'^2-r_1'^2)(D''-D''')+(r''^2-r_1''^2)(D'''-D')+(r'''^2-r_1'''^2)(D'-D'')=0, \quad 22)$$

oder auch:

$$23) \ldots \left.\begin{array}{l}(r'+r_1')(r'-r_1')(D''-D''')\\ +(r''+r_1'')(r''-r_1'')(D'''-D')\\ +(r'''+r_1''')(r'''-r_1''')(D'-D'')\end{array}\right\}=0.$$

§. 9.

Um eine zweckmässige Anwendung der im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Bedingungsgleichung zu zeigen, wollen wir mittelst derselben den Satz beweisen, dass die drei Punkte, in denen die an je zwei von drei Kreisen gezogenen äusseren Berührenden sich schneiden, jederzeit in ein und derselben geraden Linie liegen.

Die Mittelpunkte der drei Kreise seien, wie Taf. V. Fig. 4. zeigt, C_a, C_b, C_c, und ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c seien ihre aufsteigend nach ihrer Grösse geordneten Halbmesser; die Seiten C_bC_c, C_cC_a, C_aC_b des durch die drei Mittelpunkte als Ecken bestimmten Dreiecks $C_aC_bC_c$ mögen respective durch a, b, c bezeichnet werden. Die Mittelpunkte C_b und C_c sollen die Stelle der bisher immer durch O und O_1 bezeichneten Punkte vertreten. Die Durchschnittspunkte der vorher näher bezeichneten Berührenden seien A', A'', A''', und deren Entfernungen von den Punkten C_b, C_c sollen durch r', r_1'; r'', r_1''; r''', r_1''' bezeichnet werden, indem übrigens D', D'', D''' auch jetzt ihre bekannte Bedeutung behalten.

Zuvörderst fällt auf der Stelle in die Augen, dass im vorliegenden Falle $D'=0$ ist, wodurch sich die Bedingungsgleichung 21) auf die Form

$$\{(r'''^2-r_1'''^2)-(r'^2-r_1'^2)\}D''+\{(r'^2-r_1'^2)-(r''^2-r_1''^2)\}D'''=0$$

oder, was Dasselbe ist, auf die Form

$$\frac{D''}{D'''}=\frac{(r'^2-r_1'^2)-(r''^2-r_1''^2)}{(r'^2-r_1'^2)-(r'''^2-r_1'''^2)}$$

reducirt, welche Gleichung wir also zu rechtfertigen suchen müssen.

Nun erkennt man aber auf der Stelle die Richtigkeit der folgenden Formeln aus ganz einfachen Sätzen von den Proportionen:

$$r' = \frac{a\varrho_b}{\varrho_c - \varrho_b}, \quad r_1' = \frac{a\varrho_c}{\varrho_c - \varrho_b}$$

und

$$r_1'' = \frac{b\varrho_a}{\varrho_c - \varrho_a}, \quad r''' = \frac{c\varrho_a}{\varrho_b - \varrho_a}.$$

Ferner überzeugt man sich mittelst eines bekannten trigonometrischen Elementarsatzes auf der Stelle von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$r''^2 = a^2 + r_1''^2 - \frac{2ab\varrho_c}{\varrho_c - \varrho_a} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$r_1'''^2 = a^2 + r'''^2 - \frac{2ac\varrho_b}{\varrho_b - \varrho_a} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

oder:

$$r''^2 = a^2 + r_1''^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)\varrho_c}{\varrho_c - \varrho_a},$$

$$r_1'''^2 = a^2 + r'''^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)\varrho_b}{\varrho_b - \varrho_a};$$

woraus sogleich

$$r''^2 - r_1''^2 = -\frac{a^2\varrho_a + (b^2 - c^2)\varrho_c}{\varrho_c - \varrho_a},$$

$$r'''^2 - r_1'''^2 = \frac{a^2\varrho_a - (b^2 - c^2)\varrho_b}{\varrho_b - \varrho_a}$$

folgt. Nach dem Obigen ist aber:

$$r'^2 - r_1'^2 = \frac{a^2(\varrho_b^2 - \varrho_c^2)}{(\varrho_b - \varrho_c)^2} = \frac{a^2(\varrho_b + \varrho_c)}{\varrho_b - \varrho_c}.$$

Folglich ist:

$$(r'^2 - r_1'^2) - (r''^2 - r_1''^2) = \frac{a^2(\varrho_b + \varrho_c)}{\varrho_b - \varrho_c} + \frac{a^2\varrho_a + (b^2 - c^2)\varrho_c}{\varrho_c - \varrho_a},$$

$$(r'^2 - r_1'^2) - (r'''^2 - r_1'''^2) = \frac{a^2(\varrho_b + \varrho_c)}{\varrho_b - \varrho_c} - \frac{a^2\varrho_a - (b^2 - c^2)\varrho_b}{\varrho_b - \varrho_a},$$

woraus man mittelst einer nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegenden Rechnung sogleich findet:

$$(r'^2 - r_1'^2) - (r''^2 - r_1''^2) = \varrho_c \frac{a^2(\varrho_b + \varrho_c - 2\varrho_a) + (b^2 - c^2)(\varrho_b - \varrho_c)}{(\varrho_b - \varrho_c)(\varrho_c - \varrho_a)},$$

$$(r'^2 - r_1'^2) - (r'''^2 - r_1'''^2) = \varrho_b \frac{a^2(\varrho_b + \varrho_c - 2\varrho_a) + (b^2 - c^2)(\varrho_b - \varrho_c)}{(\varrho_b - \varrho_c)(\varrho_b - \varrho_a)}.$$

$$D=A(R^2-R_1^2)+B,$$

so haben wir zur Bestimmung der Constanten A und B die beiden Gleichungen:

$$D=A(r^2-r_1^2)+B,$$
$$\Delta=A(\varrho^2-\varrho_1^2)+B;$$

aus denen sich leicht:

$$11)\ \ldots\ldots\ A=\frac{D-\Delta}{(r^2-r_1^2)-(\varrho^2-\varrho_1^2)}$$
$$=\frac{D-\Delta}{(r+r_1)(r-r_1)-(\varrho+\varrho_1)(\varrho-\varrho_1)}$$

und

$$12)\ \ldots\ldots\ B=\frac{(r^2-r_1^2)\Delta-(\varrho^2-\varrho_1^2)D}{(r^2-r_1^2)-(\varrho^2-\varrho_1^2)}$$
$$=\frac{(r+r_1)(r-r_1)\Delta-(\varrho+\varrho_1)(\varrho-\varrho_1)D}{(r+r_1)(r-r_1)-(\varrho+\varrho_1)(\varrho-\varrho_1)}$$

ergiebt.

§. 6.

Bezeichnen wir die Entfernung der beiden Punkte (rr_1) und $(\varrho\varrho_1)$ von einander durch E, so ist bekanntlich:

$$E=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2.$$

Nun ist aber nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$x-\xi=\frac{(r^2-r_1^2)-(\varrho^2-\varrho_1^2)}{2a},\quad y-\eta=\frac{2(D-\Delta)}{a};$$

also:

$$13)\quad E=\sqrt{\left\{\frac{(r^2-r_1^2)-(\varrho^2-\varrho_1^2)}{2a}\right\}^2+\left\{\frac{2(D-\Delta)}{a}\right\}^2},$$

oder:

$$14)\quad E=\sqrt{\left\{\frac{(r+r_1)(r-r_1)-(\varrho+\varrho_1)(\varrho-\varrho_1)}{2a}\right\}^2+\left\{\frac{2(D-\Delta)}{a}\right\}^2},$$

oder auch:

$$15)\quad E=\frac{\sqrt{\{(r+r_1)(r-r_1)-(\varrho+\varrho_1)(\varrho-\varrho_1)\}^2+16(D-\Delta)^2}}{2a}.$$

Dass diese Formeln in der Praxis vielfachen Nutzen haben können, braucht kaum noch besonders bemerkt zu werden.

Setzt man

$$16) \ldots \tan\omega = \frac{(r+r_1)(r-r_1)-(\varrho+\varrho_1)(\varrho-\varrho_1)}{4(D-\varDelta)},$$

und nimmt in der folgenden Gleichung bloss auf den absoluten Werth der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens Rücksicht, so ist:

$$17) \ldots\ldots\ldots E = \frac{2(D-\varDelta)}{a\cos\omega},$$

mittelst welcher Formeln E ohne grosse Weitläufigkeit berechnet werden kann.

§. 7.

Wenn

$$(r'r_1'),\quad (r''r_1''),\quad (r'''r_1'''),\quad (r^{IV}r_1^{IV}),\ldots (r^{(n)}r_1^{(n)})$$

oder

$$(x'y'),\quad (x''y''),\quad (x'''y'''),\quad (x^{IV}y^{IV}),\ldots (x^{(n)}y^{(n)})$$

die Ecken eines beliebigen Vielecks von n Seiten sind, dessen Inhalt wir durch F bezeichnen wollen; so ist nach einer bekannten Formel, wenn wir nur den absoluten Werth der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der folgenden Gleichung berücksichtigen:

$$2F = x'(y''-y^{(n)}) + x''(y'''-y') + x'''(y^{IV}-y'') + x^{IV}(y^{V}-y''') + \ldots$$
$$\ldots + x^{(n-1)}(y^{(n)}-y^{(n-2)}) + x^{(n)}(y'-y^{(n-1)}).$$

Nun ist aber, wenn

$$D',\quad D'',\quad D''',\quad D^{IV},\ldots D^{(n)}$$

ihre bekannte Bedeutung haben, nach 1):

$$x' = \frac{r'^2-r_1'^2+a^2}{2a},\qquad y' = \frac{2D'}{a};$$

$$x'' = \frac{r''^2-r_1''^2+a^2}{2a},\qquad y'' = \frac{2D''}{a};$$

$$x''' = \frac{r'''^2-r_1'''^2+a^2}{2a},\qquad y''' = \frac{2D'''}{a};$$

u. s. w.

$$x^{(n)} = \frac{r^{(n)2}-r_1^{(n)2}+a^2}{2a},\quad y^{(n)} = \frac{2D^{(n)}}{a};$$

Folglich ist:

$$\frac{(r'^2-r_1'^2)-(r''^2-r_1''^2)}{(r'^2-r_1'^2)-(r'''^2-r_1'''^2)}=\frac{\varrho_c(\varrho_b-\varrho_a)}{\varrho_b(\varrho_c-\varrho_a)},$$

und die obige zu verificirende Gleichung erhält daher die folgende sehr einfache Form:

$$\frac{D''}{D'''}=\frac{\varrho_c(\varrho_b-\varrho_a)}{\varrho_b(\varrho_c-\varrho_a)}.$$

Nun aber verhalten die Dreiecke

$$D''=C_bA''C_c,\quad D'''=C_bA'''C_c$$

sich wie ihre Höhen, weil sie die gemeinschaftliche Grundlinie C_bC_c haben, und diese Höhen sind, wenn wir die an C_b und C_c liegenden Winkel des Dreiecks $C_aC_bC_c$ respective durch β und γ bezeichnen, offenbar:

$$r_1''\sin\gamma=\frac{b\varrho_c\sin\gamma}{\varrho_c-\varrho_a},\quad r'''\sin\beta=\frac{c\varrho_b\sin\beta}{\varrho_b-\varrho_a};$$

so dass man also die Gleichung

$$\frac{D''}{D'''}=\frac{r_1''\sin\gamma}{r'''\sin\beta}=\frac{b\sin\gamma}{c\sin\beta}\cdot\frac{\varrho_c(\varrho_b-\varrho_a)}{\varrho_b(\varrho_c-\varrho_a)},$$

folglich, weil in dem Dreiecke $C_aC_bC_c$ nach einem bekannten trigonometrischen Elementarsatze $b:c=\sin\beta:\sin\gamma$, $b\sin\gamma=c\sin\beta$ ist, die Gleichung

$$\frac{D''}{D'''}=\frac{\varrho_c(\varrho_b-\varrho_a)}{\varrho_b(\varrho_c-\varrho_a)}$$

erhält, welches eben die zu rechtfertigende Gleichung war.

Unser Satz ist daher auf diese Weise vollständig und ohne alle Schwierigkeit bewiesen.

Ist

$$\mathrm{D}=\mathrm{A}(\mathrm{R}^2-\mathrm{R}_1^2)+\mathrm{B}$$

die Gleichung der durch die drei Punkte A', A'', A''' gehenden Geraden, so ist nach 11) und 12), weil im vorliegenden Falle $D'=0$ ist:

$$\mathrm{A}=-\frac{D''}{(r'^2-r_1'^2)-(r''^2-r_1''^2)},\quad \mathrm{B}=\frac{(r'^2-r_1'^2)D''}{(r'^2-r_1'^2)-(r''^2-r_1''^2)}$$

oder:

$$\mathrm{A}=-\frac{D'''}{(r'^2-r_1'^2)-(r'''^2-r_1'''^2)},\quad \mathrm{B}=\frac{(r'^2-r_1'^2)D'''}{(r'^2-r_1'^2)-(r'''^2-r_1'''^2)}.$$

Folglich ist:

$$\frac{\mathrm{D}}{D''}=\frac{(r'^2-r_1'^2)-(\mathrm{R}^2-\mathrm{R}_1^2)}{(r'^2-r_1'^2)-(r''^2-r_1''^2)},$$

$$\frac{\mathrm{D}}{D'''}=\frac{(r'^2-r_1'^2)-(\mathrm{R}^2-\mathrm{R}_1^2)}{(r'^2-r_1'^2)-(r'''^2-r_1'''^2)};$$

also nach dem Obigen, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\frac{\mathrm{D}}{D''}=\frac{\varrho_c-\varrho_a}{\varrho_c}\cdot\frac{(\varrho_b+\varrho_c)a^2-(\varrho_b-\varrho_c)(\mathrm{R}^2-\mathrm{R}_1^2)}{a^2(\varrho_b+\varrho_c-2\varrho_a)+(b^2-c^2)(\varrho_b-\varrho_c)},$$

$$\frac{\mathrm{D}}{D'''}=\frac{\varrho_b-\varrho_a}{\varrho_b}\cdot\frac{(\varrho_b+\varrho_c)a^2-(\varrho_b-\varrho_c)(\mathrm{R}^2-\mathrm{R}_1^2)}{a^2(\varrho_b+\varrho_c-2\varrho_a)+(b^2-c^2)(\varrho_b-\varrho_c)}.$$

Weil

$$D''=\tfrac{1}{2}ar_1''\sin\gamma=\frac{ab\varrho_c\sin\gamma}{2(\varrho_c-\varrho_a)},$$

$$D'''=\tfrac{1}{2}ar'''\sin\beta=\frac{ac\varrho_b\sin\beta}{2(\varrho_b-\varrho_a)}$$

oder

$$D''=\frac{\varrho_c}{\varrho_c-\varrho_a}\cdot\frac{ab\sin\gamma}{2},\quad D'''=\frac{\varrho_b}{\varrho_b-\varrho_a}\cdot\frac{ac\sin\beta}{2}$$

und, wenn wir den Flächeninhalt des Dreiecks $C_aC_bC_c$ durch $\varDelta$ bezeichnen,

$$\varDelta=\tfrac{1}{2}ab\sin\gamma=\tfrac{1}{2}ac\sin\beta,$$

also

$$D''=\frac{\varrho_c\varDelta}{\varrho_c-\varrho_a},\quad D'''=\frac{\varrho_b\varDelta}{\varrho_b-\varrho_a}$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\mathrm{D}}{\varDelta}=\frac{(\varrho_b+\varrho_c)a^2-(\varrho_b-\varrho_c)(\mathrm{R}^2-\mathrm{R}_1^2)}{a^2(\varrho_b+\varrho_c-2\varrho_a)+(b^2-c^2)(\varrho_b-\varrho_c)}$$

oder

$$\frac{\mathrm{D}}{\varDelta}=\frac{\varrho_b(a^2-\mathrm{R}^2+\mathrm{R}_1^2)+\varrho_c(a^2+\mathrm{R}^2-\mathrm{R}_1^2)}{\varrho_b(a^2+b^2-c^2)+\varrho_c(a^2-b^2+c^2)-2\varrho_a a^2},$$

welches man als die vollständig entwickelte Gleichung der durch die Punkte A', A'', A''' bestimmten Geraden betrachten kann.

Entsprechen die Grössen R, R_1, D und R', R_1', D' den beiden beliebigen, in der durch die Punkte A', A'', A''' gehenden Geraden liegenden Punkten P und P', so ergiebt sich aus

$$\mathrm{A}''-\mathrm{A}=-\frac{3a^2\mathfrak{D}}{(c^2-b^2)(3a^2+b^2-c^2)},\quad \mathrm{A}-\mathrm{A}'=\frac{3a^2\mathfrak{D}}{(c^2-b^2)(3a^2-b^2+c^2)};$$

also:

$$\mathrm{B}'(\mathrm{A}''-\mathrm{A})=-\frac{3a^4\mathfrak{D}^2}{(c^2-b^2)(3a^2-b^2+c^2)(3a^2+b^2-c^2)},$$

$$\mathrm{B}''(\mathrm{A}-\mathrm{A}')=\frac{3a^4\mathfrak{D}^2}{(c^2-b^2)(3a^2-b^2+c^2)(3a^2+b^2-c^2)}$$

ist; so ist klar, dass die obige Bedingungsgleichung wirklich erfüllt ist, die drei in Rede stehenden Transversalen sich folglich in der That in einem Punkte schneiden, wie bewiesen werden sollte.

Bezeichnet man die Entfernungen des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts der drei Transversalen von den Spitzen A, B, C des gegebenen Dreiecks respective durch R_a, R_b, R_c, und die Flächenräume der drei Dreiecke, welche den Durchschnittspunkt der drei Transversalen zur gemeinschaftlichen Spitze und die Seiten a, b, c des gegebenen Dreiecks zu Grundlinien haben, respective durch D_a, D_b, D_c; so ist nach 6):

$$R_b^2-R_c^2=-\frac{\mathrm{B}-\mathrm{B}'}{\mathrm{A}-\mathrm{A}'},\quad D_a=\frac{\mathrm{AB}'-\mathrm{BA}'}{\mathrm{A}-\mathrm{A}'};$$

also, weil $\mathrm{B}=0$ ist:

$$R_b^2-R_c^2=\frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{A}-\mathrm{A}'},\quad D_a=\frac{\mathrm{AB}'}{\mathrm{A}-\mathrm{A}'}=\mathrm{A}(R_b^2-R_c^2).$$

Nun ist aber nach dem Vorhergehenden:

$$\mathrm{A}=\frac{\mathfrak{D}}{c^2-b^2},\quad \mathrm{A}-\mathrm{A}'=\frac{3a^2\mathfrak{D}}{(c^2-b^2)(3a^2-b^2+c^2)},\quad \mathrm{B}'=\frac{a^2\mathfrak{D}}{3a^2-b^2+c^2};$$

also:

$$R_b^2-R_c^2=\tfrac{1}{3}(c^2-b^2),\quad D_a=\tfrac{1}{3}\mathfrak{D}.$$

Folglich ist überhaupt:

$$R_a^2-R_b^2=\tfrac{1}{3}(b^2-a^2),\quad R_b^2-R_c^2=\tfrac{1}{3}(c^2-b^2),\quad R_c^2-R_a^2=\tfrac{1}{3}(a^2-c^2)$$

und

$$D_a=\tfrac{1}{3}\mathfrak{D},\quad D_b=\tfrac{1}{3}\mathfrak{D},\quad D_c=\tfrac{1}{3}\mathfrak{D};$$

also:

$$D_a=D_b=D_c.$$

Ferner ist nach 7):

$$R_b^2=\frac{4D_a^2}{a^2}+\left\{\frac{(R_b^2-R_c^2)+a^2}{2a}\right\}^2;$$

und weil nun nach dem bekannten Ausdruck des Flächeninhalts des Dreiecks durch seine drei Seiten

$$\mathfrak{D}^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{16},$$

also

$$\frac{4D_a^2}{a^2} = \frac{4\mathfrak{D}^2}{9a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{36a^2},$$

und nach dem Obigen

$$\frac{(R_b^2 - R_c^2) + a^2}{2a} = \frac{3a^2 - b^2 + c^2}{6a}$$

ist; so ist

$$R_b^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (3a^2 - b^2 + c^2)^2}{36a^2},$$

woraus man nach einigen leichten Reductionen sogleich

$$R_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{9}$$

erhält, so dass also überhaupt

$$R_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{9}, \quad R_b^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{9}, \quad R_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{9}$$

ist, woraus durch Addition sogleich die bekannte Relation

$$R_a^2 + R_b^2 + R_c^2 = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

folgt.

§. 12.

Indem wir jetzt auch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der drei Höhen des Dreiecks ABC betrachten wollen, mögen alle im vorhergehenden Paragraphen gebrauchten Bezeichnungen die ihnen dort beigelegte Bedeutung behalten, mit dem einzigen Unterschiede, dass alle betreffende Zeichen, die sich auf den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der die Spitzen des Dreiecks mit den Mittelpunkten der Gegenseiten verbindenden Linien beziehen, jetzt dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der drei Höhen entsprechen sollen. Die drei auf den Seiten a, b, c senkrecht stehenden Höhen werden wir respective durch h_a, h_b, h_c bezeichnen, indem wir h_a, so wie den Flächeninhalt $\mathfrak{D}$ des Dreiecks ABC, immer als positiv, dagegen h_b und h_c als positiv oder als negativ

betrachten, jenachdem diese Höhen, wenn wir das Dreieck ABC selbst oberhalb von BC liegend annehmen, oberhalb oder unterhalb von der Linie BC liegen.

Dies vorausgesetzt, erhält man nun zuvörderst:

$$A = \frac{\mathfrak{D}}{(c^2-b^2)-\{(c^2-h_a^2)-(b^2-h_a^2)\}} = \frac{\mathfrak{D}}{0},$$

$$B = -\frac{\{(c^2-h_a^2)-(b^2-h_a^2)\}\mathfrak{D}}{(c^2-b^2)-\{(c^2-h_a^2)-(b^2-h_a^2)\}} = \frac{0}{0};$$

woraus man sieht, dass die in §. 10. gegebene Bedingungsgleichung in dem vorliegenden Falle ihre Anwendbarkeit verliert.

Daher wollen wir uns jetzt direct mit der Bestimmung des Durchschnittspunkts der zwei Höhen h_b und h_c mittelst der im Obigen zu diesem Behufe entwickelten allgemeinen Formeln beschäftigen.

Nach 11) und 12) ist:

$$A' = \frac{-\frac{1}{2}h_b\sqrt{a^2-h_b^2}}{-a^2-\{h_b^2-(a^2-h_b^2)\}} = \frac{\sqrt{a^2-h_b^2}}{4h_b},$$

$$B' = \frac{-\frac{1}{2}a^2h_b\sqrt{a^2-h_b^2}}{-a^2-\{h_b^2-(a^2-h_b^2)\}} = \frac{a^2\sqrt{a^2-h_b^2}}{4h_b}$$

und

$$A'' = \frac{-\frac{1}{2}h_c\sqrt{a^2-h_c^2}}{a^2-\{(a^2-h_c^2)-h_c^2\}} = -\frac{\sqrt{a^2-h_c^2}}{4h_c},$$

$$B'' = \frac{\frac{1}{2}a^2h_c\sqrt{a^2-h_c^2}}{a^2-\{(a^2-h_c^2)-h_c^2\}} = \frac{a^2\sqrt{a^2-h_c^2}}{4h_c};$$

so dass also

$$B' = a^2A', \quad B'' = -a^2A''$$

ist. Man erhält leicht:

$$A'-A'' = \frac{h_c\sqrt{a^2-h_b^2}+h_b\sqrt{a^2-h_c^2}}{4h_bh_c},$$

$$B'-B'' = a^2\frac{h_c\sqrt{a^2-h_b^2}-h_b\sqrt{a^2-h_c^2}}{4h_bh_c}$$

und

$$A'B''-B'A'' = \frac{a^2\sqrt{a^2-h_b^2}.\sqrt{a^2-h_c^2}}{8h_bh_c}.$$

Also ist nach 6):

$$R_b^2 - R_c^2 = -a^2 . \frac{h_c\sqrt{a^2-h_b^2} - h_b\sqrt{a^2-h_c^2}}{h_c\sqrt{a^2-h_b^2} + h_b\sqrt{a^2-h_c^2}},$$

$$D_a = \tfrac{1}{2} . \frac{a^2\sqrt{a^2-h_b^2}.\sqrt{a^2-h_c^2}}{h_c\sqrt{a^2-h_b^2} + h_b\sqrt{a^2-h_c^2}};$$

folglich:

$$\frac{2D_a}{a} = \frac{a\sqrt{a^2-h_b^2}.\sqrt{a^2-h_c^2}}{h_c\sqrt{a^2-h_b^2} + h_b\sqrt{a^2-h_c^2}}$$

und

$$\frac{(R_b^2 - R_c^2) + a^2}{2a} = \frac{ah_b\sqrt{a^2-h_c^2}}{h_c\sqrt{a^2-h_b^2} + h_b\sqrt{a^2-h_c^2}},$$

$$\frac{(R_b^2 - R_c^2) - a^2}{2a} = -\frac{ah_c\sqrt{a^2-h_b^2}}{h_c\sqrt{a^2-h_b^2} + h_b\sqrt{a^2-h_c^2}}.$$

Daher ist nach 7):

$$R_b^2 = \frac{a^4(a^2-h_c^2)}{\{h_c\sqrt{a^2-h_b^2} + h_b\sqrt{a^2-h_c^2}\}^2},$$

$$R_c^2 = \frac{a^4(a^2-h_b^2)}{\{h_c\sqrt{a^2-h_b^2} + h_b\sqrt{a^2-h_c^2}\}^2}.$$

Bekanntlich ist

$$a^2 - h_b^2 = \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)^2, \quad a^2 - h_c^2 = \left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}\right)^2,$$

und nach den Lehren der gewöhnlichen analytischen Geometrie erhellet sehr leicht, dass unter den oben gemachten Voraussetzungen immer

$$h_b \text{ und } \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}, \quad h_c \text{ und } \frac{a^2-b^2+c^2}{2c}$$

gleiche Vorzeichen haben. Sind also h_b und h_c beide positiv *), so ist

$$h_c\sqrt{a^2-h_b^2} + h_b\sqrt{a^2-h_c^2} = \frac{2\mathfrak{D}}{c} . \frac{a^2+b^2-c^2}{2b} + \frac{2\mathfrak{D}}{b} . \frac{a^2-b^2+c^2}{2c}$$

$$= \frac{2a^2\mathfrak{D}}{bc};$$

*) Beide negativ können diese Höhen nicht sein.

haben aber h_b und h_c entgegengesetzte Vorzeichen, so ist

$$h_c\sqrt{a^2-h_b^2}+h_b\sqrt{a^2-h_c^2}$$

$$=(\pm\frac{2\mathfrak{D}}{c}).(\mp\frac{a^2+b^2-c^2}{2b})+(\mp\frac{2\mathfrak{D}}{b}).(\pm\frac{a^2-b^2+c^2}{2c})$$

$$=-\frac{2\mathfrak{D}}{c}.\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}-\frac{2\mathfrak{D}}{b}.\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}=-\frac{2a^2\mathfrak{D}}{bc}.$$

Also ist

$$h_c\sqrt{a^2-h_b^2}+h_b\sqrt{a^2-h_c^2}=\pm\frac{2a^2\mathfrak{D}}{bc},$$

indem man das obere oder untere Vorzeichen nimmt, jenachdem h_b und h_c gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Immer ist aber

$$\{h_c\sqrt{a^2-h_b^2}+h_b\sqrt{a^2-h_c^2}\}^2=\frac{4a^4\mathfrak{D}^2}{b^2c^2}.$$

Sehr leicht findet man jetzt:

$$R_b^2=\frac{b^2(a^2c^2-4\mathfrak{D}^2)}{4\mathfrak{D}^2},\quad R_c^2=\frac{c^2(a^2b^2-4\mathfrak{D}^2)}{4\mathfrak{D}^2};$$

oder, wenn man $abc=P$ setzt:

$$R_b^2=\frac{P^2-4b^2\mathfrak{D}^2}{4\mathfrak{D}^2},\quad R_c^2=\frac{P^2-4c^2\mathfrak{D}^2}{4\mathfrak{D}^2}.$$

Die Quadrate der Entfernungen des Durchschnittspunkts der Höhen h_a und h_b von den Punkten A und B sind also offenbar

$$\frac{P^2-4a^2\mathfrak{D}^2}{4\mathfrak{D}^2} \text{ und } \frac{P^2-4b^2\mathfrak{D}^2}{4\mathfrak{D}^2},$$

also das zweite $=R_b^2$; und eben so sind die Quadrate der Entfernungen des Durchschnittspunkts der Höhen h_a und h_c von den Punkten A und C offenbar

$$\frac{P^2-4a^2\mathfrak{D}^2}{4\mathfrak{D}^2} \text{ und } \frac{P^2-4c^2\mathfrak{D}^2}{4\mathfrak{D}^2},$$

also das zweite $=R_c^2$, woraus man mittelst einer einfachen Betrachtung schliesst, dass die drei Höhen sich nothwendig in einem Punkte schneiden müssen.

Sind überhaupt R_a, R_b, R_c die Entfernungen des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts der drei Höhen von den Spitzen A, B, C des Dreiecks; so ist nach dem Vorhergehenden:

$$R_a^2 = \frac{P^2 - 4a^2\mathfrak{D}^2}{4\mathfrak{D}^2},\quad R_b^2 = \frac{P^2 - 4b^2\mathfrak{D}^2}{4\mathfrak{D}^2},\quad R_c^2 = \frac{P^2 - 4c^2\mathfrak{D}^2}{4\mathfrak{D}^2};$$

also:

$$R_a = \frac{\sqrt{P^2 - 4a^2\mathfrak{D}^2}}{2\mathfrak{D}},\quad R_b = \frac{\sqrt{P^2 - 4b^2\mathfrak{D}^2}}{2\mathfrak{D}},\quad R_c = \frac{\sqrt{P^2 - 4c^2\mathfrak{D}^2}}{2\mathfrak{D}}.$$

Nach den vorstehenden Formeln ist:

$$(a^2 + b^2 + c^2) + (R_a^2 + R_b^2 + R_c^2) = \tfrac{3}{4}\cdot\frac{P^2}{\mathfrak{D}^2} = \tfrac{3}{4}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{\mathfrak{D}^2}.$$

Auch erhält man aus dem Obigen leicht:

$$D_a = \pm\frac{\sqrt{a^2b^2 - 4\mathfrak{D}^2}\,.\,\sqrt{a^2c^2 - 4\mathfrak{D}^2}}{4\mathfrak{D}},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Höhen h_b und h_c gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Fasst man aber die Dreiecke D_a, D_b, D_c bloss absolut auf, so kann man setzen:

$$D_a = \frac{\sqrt{a^2b^2 - 4\mathfrak{D}^2}\,.\,\sqrt{c^2a^2 - 4\mathfrak{D}^2}}{4\mathfrak{D}},$$

$$D_b = \frac{\sqrt{b^2c^2 - 4\mathfrak{D}^2}\,.\,\sqrt{a^2b^2 - 4\mathfrak{D}^2}}{4\mathfrak{D}},$$

$$D_c = \frac{\sqrt{c^2a^2 - 4\mathfrak{D}^2}\,.\,\sqrt{b^2c^2 - 4\mathfrak{D}^2}}{4\mathfrak{D}};$$

woraus sich die Relation

$$D_aD_bD_c = \frac{(a^2b^2 - 4\mathfrak{D}^2)(b^2c^2 - 4\mathfrak{D}^2)(c^2a^2 - 4\mathfrak{D}^2)}{64\mathfrak{D}^3}$$

oder

$$64\mathfrak{D}^3D_aD_bD_c = (a^2b^2 - 4\mathfrak{D}^2)(b^2c^2 - 4\mathfrak{D}^2)(c^2a^2 - 4\mathfrak{D}^2)$$

ergiebt.

Multiplicirt man die Ausdrücke von D_a, D_b, D_c im Zähler und Nenner respective mit bc, ca, ab, so erhält man:

$$D_a = \frac{\sqrt{P^2 - 4c^2\mathfrak{D}^2}\,.\,\sqrt{P^2 - 4b^2\mathfrak{D}^2}}{4bc\mathfrak{D}},$$

$$D_b = \frac{\sqrt{P^2 - 4a^2\mathfrak{D}^2}\,.\,\sqrt{P^2 - 4c^2\mathfrak{D}^2}}{4ca\mathfrak{D}},$$

$$D_c = \frac{\sqrt{P^2 - 4b^2\mathfrak{D}^2}\,.\,\sqrt{P^2 - 4a^2\mathfrak{D}^2}}{4ab\mathfrak{D}};$$

also nach dem Obigen:

$$D_a = \frac{R_b R_c}{bc}\mathfrak{D},\quad D_b = \frac{R_c R_a}{ca}\mathfrak{D},\quad D_c = \frac{R_a R_b}{ab}\mathfrak{D}$$

oder

$$\frac{D_a}{\mathfrak{D}} = \frac{R_b R_c}{bc},\quad \frac{D_b}{\mathfrak{D}} = \frac{R_c R_a}{ca},\quad \frac{D_c}{\mathfrak{D}} = \frac{R_a R_b}{ab},$$

folglich:

$$\frac{D_a D_b D_c}{\mathfrak{D}^3} = \frac{R_a^2 R_b^2 R_c^2}{a^2 b^2 c^2} = \left(\frac{R_a R_b R_c}{P}\right)^2.$$

Für das gleichseitige Dreieck ist z. B. bekanntlich

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3},$$

und folglich nach dem Obigen in diesem Falle:

$$D_a = \frac{a^6 - \frac{3}{4}a^6}{a^4\sqrt{3}} = \frac{a^2}{4\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3},$$

also $D_a = \frac{1}{3}\mathfrak{D}$, wie es nach §. 11. in diesem Falle, wo die Höhen zugleich die Transversalen zwischen den Spitzen des Dreiecks und deren Gegenseiten sind, sein muss.

Für das rechtwinklige Dreieck, in welchem $a^2 = b^2 + c^2$ sein mag, ist $\mathfrak{D} = \frac{1}{2}bc$; also nach den obigen Formeln:

$$D_a = \frac{\sqrt{b^2c^2(b^2+c^2)-b^2c^4}\,.\,\sqrt{b^2c^2(b^2+c^2)-b^4c^2}}{2b^2c^2} = \frac{b^3c^3}{2b^2c^2} = \tfrac{1}{2}bc,$$

folglich $D_a = \mathfrak{D}$, wie es sein muss. Weil ferner

$$P^2 - 4a^2\mathfrak{D}^2 = a^2b^2c^2 - a^2b^2c^2 = 0$$

ist, so ist $D_b = 0$ und $D_c = 0$, was ebenfalls ganz der Natur der Sache gemäss ist.

Aus dem Obigen erhält man auch die Relation:

$$\frac{R_a}{a}D_a + \frac{R_b}{b}D_b + \frac{R_c}{c}D_c = \frac{R_a}{a}\cdot\frac{R_b}{b}\cdot\frac{R_c}{c}\cdot 3\mathfrak{D};$$

aber ich will der Kürze wegen diese Rechnungen nicht weiter fortsetzen, so sehr dieselben auch geeignet sind, zu noch manchen anderen interessanten Resultaten zu führen. Es scheint mir aber wünschenswerth zu sein, auch noch andere geometrische Sätze nach den hier in Anwendung gebrachten Methoden weiter zu untersuchen.

§. 13.

Ein gewisses praktisches Interesse bietet noch die folgende Aufgabe dar:

Wenn die Entfernungen r, r_1 und ϱ, ϱ_1 zweier Punkte A und A_1 von den beiden Punkten O und O_1, deren Entfernung von einander a ist, und die Entfernungen r', r_1' eines dritten Punktes A' von den beiden Punkten A, A_1 gegeben sind: soll man die Entfernungen R, R_1 des Punktes A' von den beiden Punkten O, O_1 bestimmen.

Für jetzt mögen die folgenden Andeutungen über die Auflösung dieser Aufgabe, welche als eine Art von Coordinaten-Verwandlung zu betrachten ist, genügen.

Bezeichnen wir das gehörig als positiv oder als negativ betrachtete Dreieck $OA'O_1$ durch $\mathfrak{D}$, und lassen D und $\varDelta$ Dasselbe für die Punkte A und A_1 in Bezug auf die Punkte O und O_1 bedeuten, wie früher; so haben wir, da r' und r_1' die Entfernungen des Punktes A' von den Punkten A und A_1 sind, nach 13) die beiden folgenden Gleichungen:

$$r'^2=\left\{\frac{(r^2-r_1^2)-(R^2-R_1^2)}{2a}\right\}^2+\frac{4(D-\mathfrak{D})^2}{a^2},$$

$$r_1'^2=\left\{\frac{(\varrho^2-\varrho_1^2)-(R^2-R_1^2)}{2a}\right\}^2+\frac{4(\varDelta-\mathfrak{D})^2}{a^2};$$

oder:

$$\left\{\frac{(r^2-r_1^2)-(R^2-R_1^2)}{2ar'}\right\}^2+\left\{\frac{2(D-\mathfrak{D})}{ar'}\right\}^2=1,$$

$$\left\{\frac{(\varrho^2-\varrho_1^2)-(R^2-R_1^2)}{2ar'}\right\}^2+\left\{\frac{2(\varDelta-\mathfrak{D})}{ar_1'}\right\}=1.$$

Hiernach ist es also verstattet:

$$\sin\varphi=\frac{(r^2-r_1^2)-(R^2-R_1^2)}{2ar'},\quad \cos\varphi=\frac{2(D-\mathfrak{D})}{ar'};$$

$$\sin\psi=\frac{(\varrho^2-\varrho_1^2)-(R^2-R_1^2)}{2ar_1'},\quad \cos\psi=\frac{2(\varDelta-\mathfrak{D})}{ar_1'}$$

zu setzen, woraus die beiden Gleichungen

$$r'\sin\varphi-r_1'\sin\psi=\frac{(r^2-r_1^2)-(\varrho^2-\varrho_1^2)}{2a},\quad r'\cos\varphi-r_1'\cos\psi=\frac{2(D-\varDelta)}{a};$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$f = \frac{(r^2 - r_1^2) - (\varrho^2 - \varrho_1^2)}{2a}, \quad g = \frac{2(D - \varDelta)}{a}$$

setzen, wo f und g bekannte Grössen sind, die beiden Gleichungen

$$r' \sin\varphi - r_1' \sin\psi = f,$$
$$r' \cos\varphi - r_1' \cos\psi = g$$

folgen, auf deren Auflösung es nun ankommt.

Unter den verschiedenen Verfahrungsarten, welche sich dabei in Anwendung bringen lassen, wollen wir jetzt nur die folgende hervorheben.

Wenn man die beiden Gleichungen quadrirt und dann zu einander addirt, so erhält man:

$$r'^2 + r_1'^2 - 2r'r_1' \cos(\varphi - \psi) = f^2 + g^2,$$

also:

$$\cos(\varphi - \psi) = \frac{(r'^2 + r_1'^2) - (f^2 + g^2)}{2r'r_1'},$$

wodurch $\varphi - \psi$ gefunden ist.

Stellt man nun die beiden aufzulösenden Gleichungen ferner auf folgende Art dar:

$$r' \sin\varphi - r_1' \sin\{\varphi - (\varphi - \psi)\} = f,$$
$$r' \cos\varphi - r_1' \cos\{\varphi - (\varphi - \psi)\} = g;$$

so werden dieselben nach gehöriger Entwickelung:

$$\{r' - r_1' \cos(\varphi - \psi)\} \sin\varphi + r_1' \sin(\varphi - \psi) \cos\varphi = f,$$

$$\{r' - r_1' \cos(\varphi - \psi)\} \cos\varphi - r_1' \sin(\varphi - \psi) \sin\varphi = g;$$

also, wenn man dividirt:

$$\frac{\{r' - r_1' \cos(\varphi - \psi)\} \operatorname{tang}\varphi + r_1' \sin(\varphi - \psi)}{r' - r_1' \cos(\varphi - \psi) - r_1' \sin(\varphi - \psi) \operatorname{tang}\varphi} = \frac{f}{g},$$

woraus sich

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{f\{r' - r_1' \cos(\varphi - \psi)\} - g r_1' \sin(\varphi - \psi)}{g\{r' - r_1' \cos(\varphi - \psi)\} + f r_1' \sin(\varphi - \psi)}$$

oder

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{fr' - \{f \cos(\varphi - \psi) + g \sin(\varphi - \psi)\} r_1'}{gr' + \{f \sin(\varphi - \psi) - g \cos(\varphi - \psi)\} r_1'}$$

ergiebt, mittelst welcher Formeln φ gefunden wird; und aus $\varphi-\psi$ und φ ergiebt sich leicht ψ.

Hat man aber φ und ψ, so ergeben sich $R^2-R_1^2$ und $\mathfrak{D}$ mittelst der unmittelbar aus dem Obigen fliessenden Formeln:

$$R^2-R_1^2=(r^2-r_1^2)-2ar'\sin\varphi=(\varrho^2-\varrho_1^2)-2ar_1'\sin\psi;$$

$$\mathfrak{D}=D-\tfrac{1}{2}ar'\cos\varphi=\varDelta-\tfrac{1}{2}ar_1'\cos\psi.$$

Endlich ergeben sich R und R_1 nach 7) mittelst der folgenden Formeln:

$$R=\sqrt{\left(\frac{2\mathfrak{D}}{a}\right)^2+\left\{\frac{(R^2-R_1^2)+a^2}{2a}\right\}^2},$$

$$R_1=\sqrt{\left(\frac{2\mathfrak{D}}{a}\right)^2+\left\{\frac{(R^2-R_1^2)-a^2}{2a}\right\}^2}.$$

Wollte man die rechtwinkligen Coordinaten X, Y des Punktes A' in Bezug auf O als Anfang und OO_1 als positive Abscissenaxe haben, so wäre:

$$X=\frac{R^2-R_1^2+a^2}{2a},\quad Y=\frac{2\mathfrak{D}}{a}.$$

Dass diese Aufgabe einer gewissen Unbestimmtheit unterworfen ist, liegt in der Natur der Sache; weitere Erläuterungen darüber sind hier unnöthig.

XLII.

Die Rechnung mit Richtungszahlen.

Von

Herrn Professor Dr. *Riecke*

in Hohenheim.

Ich habe über diesen Gegenstand vor zwei Jahren eine kleine Schrift *) herausgegeben und dabei bezweckt, der Lehre von der geometrischen Deutung der imaginären Zahlen allgemeineren Eingang bei den Freunden der Mathematik zu verschaffen und sie zugleich gegen einige Einwürfe zu vertheidigen. Mit Beziehung auf diese Schrift erlaube ich mir im Folgenden einen weiteren Beitrag für die Anwendung dieser Rechnung in der Geometrie mitzutheilen. Doch muss ich Einiges für diejenigen Leser des Archivs, welchen meine Schrift nicht zu Hand gekommen ist, vorausschicken.

Unter Richtungszahlen verstehe ich Zahlen, welche durch gerade Linien ausgedrückt sind und bei welchen man nicht nur ihre Grösse, d. h. ihr Verhältniss zur Einheit, sondern zugleich ihre Richtung in's Auge fasst. Dazu ist natürlich nöthig, dass man eine bestimmte Richtung als Grundrichtung festsetzt, und die Richtung jeder andern Linie ergibt sich dann, wenn man ihre Abweichung von der Grundrichtung nach einer bestimmten Seite hin kennt. Die Grösse der Abweichung wird durch einen Kreisbogen, den Halbmesser $=1$ gesetzt, angegeben.

Die Bezeichnung, die ich dabei in Anwendung bringe, ist eine doppelte. Schreibe ich eine gerade Linie mit kleinen latei-

---

*) Die Rechnung mit Richtungszahlen oder die geometrische Behandlung imaginärer Grössen. Von Professor Dr. Riecke in Hohenheim. Stuttgart, Mezler'sche Buchhandlung. 1856. 8. 11 Bogen.

nischen Buchstaben, so zeigt das an, dass die Linie nicht blos ihrer absoluten Länge, sondern zugleich ihrer Richtung nach zu betrachten ist, d. h. dass es eine Richtungszahl ist. Soll aber zugleich die Grösse ihrer Abweichung von der Grundrichtung angegeben werden, so wird die Linie selbst mit grossen lateinischen Buchstaben geschrieben, ihr aber der Abweichungswinkel als Vorzeichen vorgesetzt, und zwar, um Missdeutungen vorzubeugen, in einer oben mit einem Strich versehenen Klammer. Z. B.

$$ab = \overline{|\varphi|}AB$$

bedeutet eine gerade Linie von der Länge AB, die um den Winkel oder Kreisbogen φ von der Grundrichtung nach der $+$ Seite hin abweicht.

Was die Grundregeln für die Rechnung mit Richtungszahlen betrifft, so lassen sich dieselben, so weit ich ihrer im Folgenden bedarf, kurz zusammenfassen.

Sollen Richtungszahlen addirt werden, so denkt man sich dieselben (natürlich mit Beibehaltung ihrer Richtung) so an einander gelegt, dass sie eine zusammenhängende gebrochene Linie darstellen. Die gerade Linie, welche ihre Endpunkte verbindet, heisst nun ihre Summe. Z. B. (Taf. V. Fig. 6.):

$$ab + bc + cd = ad.$$

Sollen zwei Richtungszahlen multiplicirt werden, so multiplicirt man ihre absoluten Werthe und gibt dem Producte einen Abweichungswinkel, welcher der Summe von den beiden Abweichungswinkeln der Factoren gleich ist:

$$\overline{|\varphi|}AB \times \overline{|\psi|}CD = \overline{|\varphi+\psi|}AB \times CD.$$

Daraus ergeben sich dann unmittelbar die Rechnungsregeln für die umgekehrten Aufgaben des Subtrahirens und Dividirens, sowie für das Potenziren und Extrahiren. Namentlich erhält man:

$$(\overline{|\varphi|}a)^n = \overline{|n\varphi|}a^n,$$

$$\sqrt[n]{\overline{|\varphi|}a} = \overline{\left|\frac{1}{n}\varphi\right|}\sqrt[n]{a},$$

und da

$$-1 = \overline{|\pi|}1,$$

so ist

$$\sqrt{-1} = \overline{|\tfrac{1}{2}\pi|}1.$$

In dieser letzteren Gleichung liegt der Satz, dass imaginäre Grössen durch Linien dargestellt werden, welche senkrecht auf der Grundrichtung stehen, — ein Satz, welcher bekanntlich zunächst auf die ganze Lehre von den Richtungszahlen geführt hat.

Wendet man das Bisherige auf ein rechtwinkliges Dreieck *ABC* (Taf. V. Fig. 7.) an, in welchem man eine Kathete *AB* als Grundrichtung betrachtet, so ist

$$ac = ab + bc$$

oder

$$\overline{|\varphi|}m = m\cos\varphi + m\sin\varphi\sqrt{-1}$$

$$= m(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$$

$$= me^{\varphi\sqrt{-1}}.$$

Indem ich bezüglich aller dieser Sätze auf die oben angeführte Schrift verweise, wo sich dieselben unmittelbar aus dem Begriff einer Richtungszahl entwickelt finden, beabsichtige ich hier nur an einem einzelnen Beispiele zu zeigen, wie ungegründet der Vorwurf der Unfruchtbarkeit ist, den man der Lehre von den Richtungszahlen schon gemacht hat.

Verallgemeinerung des Ptolemäischen Lehrsatzes.

Es sei *ABCD* (Taf. V. Fig. 8.) ein beliebiges Viereck, so ist

$$ac = ab + bc,$$

$$bd = bc + cd;$$

also

$$ac \times bd = (ab + bc)(bc + cd)$$

$$= ab \times cd + bc(ab + bc + cd)$$

$$= ab \times cd + bc \times ad.$$

Statt dessen kann man, wenn man *AD* als Grundrichtung betrachtet, schreiben:

$$\overline{|\alpha|}AC.\overline{|-E|}BD = \overline{|A|}AB.\overline{|-D|}CD + \overline{|A+B-\pi|}BC.\overline{|0|}AD.$$

Daraus erhält man dann:

$$\overline{|\alpha-\varepsilon|}\,AC.BD = \overline{|A-D|}\,AB.CD + \overline{|A+B-\pi|}\,BC.AD,$$

$$AC.BD = \overline{|A-D-(\alpha-\varepsilon)|}\,AB.CD + \overline{|A+B-\pi-(\alpha-\varepsilon)|}\,BC.AD$$
$$= \overline{|\gamma-\delta|}\,AB.CD + \overline{|\beta-\alpha|}\,BC.AD.$$

Da hiernach die Summe der beiden Richtungszahlen

$$\overline{|\gamma-\delta|}\,AB.CD \text{ und } \overline{|\beta-\alpha|}\,BC.AD$$

der reellen Zahl $AC \times BD$ gleich ist, so muss sich ein Dreieck MNO (Taf. V. Fig. 9.) zeichnen lassen, in welchem, wenn man

$$MN = AC.BD, \quad MO = AB.CD, \quad ON = BC.AD$$

macht,

$$\text{Winkel } M = \gamma - \delta,$$
$$\text{„} \quad N = \alpha - \beta$$

ist, und also „ $O = B + D.$

Im Dreiecke MNO ist aber

$$MN = MO.\cos M + ON.\cos N,$$

also ist auch

I. $$AC.BD = AB.CD.\cos(\gamma-\delta) + BC.AD.\cos(\alpha-\beta).$$

Da ferner im Dreieck MNO

$$MO : ON : MN = \sin N : \sin M : \sin O,$$

so ist auch im Viereck $ABCD$

II. $$AB.CD : BC.AD : AC.BD$$
$$= \sin(\alpha-\beta) : \sin(\gamma-\delta) : \sin(B+D).$$

Auch ohne Hülfe des Dreiecks lassen sich beide Sätze aus der ersten Gleichung unmittelbar ableiten. Da nämlich, wie eben gezeigt wurde,

$$AC.BD = \overline{|\gamma-\delta|}\,AB.CD + \overline{|\beta-\alpha|}\,BC.AD,$$

so ist auch, wenn man jede der beiden Richtungszahlen durch die Summe von Cosinus und Sinus ausdrückt:

$$AC.BD = AB.CD[\cos(\gamma-\delta) + \sin(\gamma-\delta)\sqrt{-1}]$$
$$+ BC.AD[\cos(\beta-\alpha) + \sin(\beta-\alpha)\sqrt{-1}]$$
$$= AB.CD\cos(\gamma-\delta) + AB.CD\sin(\gamma-\delta)\sqrt{-1}$$
$$+ BC.AD\cos(\alpha-\beta) - BC.AD\sin(\alpha-\beta)\sqrt{-1}.$$

Hieraus erhält man dann, wenn man die reellen und imaginären Grössen trennt, die beiden Gleichungen:

$$1)\quad AC.BD = AB.CD.\cos(\gamma-\delta) + BC.AD.\cos(\alpha-\beta),$$

$$2)\quad AB.CD.\sin(\gamma-\delta) = BC.AD.\sin(\alpha-\beta)$$

oder

$$AB.CD : BC.AD = \sin(\alpha-\beta) : \sin(\gamma-\delta).$$

Man sieht leicht, wie der erstere Satz nur eine Verallgemeinerung des Ptolemäischen Satzes ist; denn ist das Viereck ein Kreisviereck, so ist $\alpha=\beta$ und $\gamma=\delta$, also $\cos(\alpha-\beta)=1$ und $\cos(\gamma-\delta)=1$, und man erhält somit

$$AC.BD = AB.CD + BC.AD.$$

Nachdem ich auf diese Verallgemeinerung durch Hülfe der Richtungszahlen gekommen war, versuchte ich den Beweis auch auf geometrischem Wege zu führen. Ein solcher ergibt sich auch sehr einfach auf folgende Weise.

Man beschreibe um das Dreieck BCD (Taf. V. Fig. 10.) einen Kreis, der die Diagonale AC in E treffe, ziehe EB, ED, durch A die Parallelen AF, AG mit BC, CD und fälle von A die Perpendikel AH, AJ auf BE, DE. Nun ist

$$BD.CE = BC.DE + CD.BE \quad \text{(Ptolem. Satz.)}$$

und

$$\frac{AC}{CE} = \frac{DG}{DE} = \frac{BF}{BE}. \quad \text{(Elem. 6, 2.)}$$

Man erhält also durch Multiplikation:

$$BD.AC = BC.DG + CD.BF.$$

Weiter ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke AHF und AJG:

$$BC:CD = AF:AG = FH:GJ = BH-BF:DG-DJ,$$

$$BC.(DG-DJ) = CD.(BH-BF),$$

$$BC.DG + CD.BF = BC.DJ + CD.BH,$$

und also auch:

$$BD.AC = BC.DJ + CD.BH$$

$$= BC.AD.\cos ADJ + CD.AB.\cos ABH.$$

Da nun

$$\text{Winkel } ADJ = CAD - CED \qquad \text{(Elem. 1, 32)}$$
$$= CAD - CBD = \alpha - \beta,$$
$$\text{Winkel } ABH = BAC - BEC$$
$$= BAC - BDC = \gamma - \delta;$$

so erhält man die Gleichung

$$BD.AC = BC.AD.\cos(\alpha - \beta) + CD.AB.\cos(\gamma - \delta).$$

Um den zweiten Satz zu erweisen, verlängere man (Taf. V. Fig. 11.) die Vierecksseiten AB, AD, bis sie den Kreis in K, L treffen, und ziehe EK, KL, LE. Nun erhält man:

$$CD : AD = EL : AE$$
$$AB : BC = AE : EK$$
$$\overline{AB.CD : AD.BC = EL : EK}$$

$$AD : BD = AK : KL$$
$$BC : AC = EK : AK$$
$$\overline{AD.BC : BD.AC = EK : KL}$$

oder

$$AB.CD : AD.BC : AC.BD = EL : EK : KL$$
$$= \sin EKL : \sin ELK : \sin KEL.$$

Es ist aber

$$\text{Winkel } EKL = EDG = CAD - CED$$
$$= CAD - CBD = \alpha - \beta,$$
$$\text{Winkel } ELK = EBK = BAC - BEC$$
$$= BAC - BDC = \gamma - \delta,$$
$$\text{Winkel } KEL = KEC + CEL$$
$$= KBC + CDL = B + D,$$

und man erhält also:

$$AB.CD : AD.BC : AC.BD = \sin(\alpha - \beta) : \sin(\gamma - \delta) : \sin(B + D).$$

Uebrigens lassen sich beide Sätze auch durch einfache Anwendung bekannter trigonometrischer Formeln beweisen, doch ohne die Eleganz, welche die Construction gewährt.

XLIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Franz Unferdinger, Lehrer der Mathematik in der k. k. österreichischen Kriegs-Marine, eingeschifft auf Sr. Maj. Propeller-Fregatte „Donau."

1. Aus folgenden zwei Gleichungen sollen die Unbekannten x und y bestimmt werden:

$$(\alpha+x)^2-a^2=y^2,$$
$$(\beta-y)^2+b^2=x^2.$$

Resultat: Setzt man

$$c^2=\alpha^2-\beta^2,\quad R^2=-(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c);$$

so ist

$$x=\frac{1}{2c^2}\{\alpha(a^2-b^2-c^2)\pm\beta R\},$$
$$y=\frac{1}{2c^2}\{\beta(a^2-b^2+c^2)\pm\alpha R\}.$$

2. Aus den folgenden drei Gleichungen sollen die Unbekannten x, y, z bestimmt werden:

$$xy+xz+yz=\alpha,$$
$$xz(x+y)(y+z)=\beta,$$
$$x(y-z)=\gamma.$$

Resultat: Setzt man

$$u=\tfrac{1}{4}(-2\gamma\mp\sqrt{(2\alpha+\gamma)^2-8\beta}),$$
$$v=\tfrac{1}{4}(2\alpha+3\gamma\pm\sqrt{(2\alpha+\gamma)^2-8\beta}),$$
$$w=\tfrac{1}{4}(2\alpha-\gamma\pm\sqrt{(2\alpha+\gamma)^2-8\beta});$$

so ist

$$x=\frac{\sqrt{uvw}}{u},\quad y=\frac{\sqrt{uvw}}{v},\quad z=\frac{\sqrt{uvw}}{w}.$$

3. Aus den folgenden vier Gleichungen sollen die Unbekannten x_1, x_2, y_1, y_2 bestimmt werden:

$$x_1+x_2=\alpha,\quad y_1=pe^{-\frac{x_1}{p}},$$

$$y_1+y_2=\beta,\quad y_2=pe^{-\frac{x_2}{p}}.$$

Resultat:

$$x_1=-p\lg\left(\frac{\beta}{p}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{p}\right)^2-e^{-\frac{2\alpha}{p}}}\right),\quad x_2=-p\lg\left(\frac{\beta}{p}-\sqrt{\left(\frac{\beta}{p}\right)^2-e^{-\frac{2\alpha}{p}}}\right),$$

$$y_1=\beta+\sqrt{\beta^2-p^2e^{-\frac{2\alpha}{p}}},\quad y_2=\beta-\sqrt{\beta^2-p^2e^{-\frac{2\alpha}{p}}}.$$

4. Es soll die Richtigkeit folgender Gleichung nachgewiesen werden:

$$32\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)^2+(\alpha^2-\beta^2)^4$$

$$+8\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{16\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)^2+(\alpha^2-\beta^2)^4}=(\alpha+\beta)^8.$$

5. Welchen Werth hat die Function $\frac{\operatorname{Sin}(x-\alpha)}{\operatorname{Sin}(y-\beta)}$ für $x=\alpha$, $y=\beta$, wenn jederzeit $\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} y}=\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}\beta}$ gleich einer constanten Grösse ist? Dieser Werth soll ausgemittelt werden, ohne Hilfe der Differenzialrechnung.

Resultat: $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$.

6. Auf dieselbe Art soll der Werth der Function $\frac{\operatorname{Sin}(x-\alpha)}{\operatorname{Sin}(y-\beta)}$ für $x=\alpha$, $y=\beta$ ermittelt werden, wenn beständig $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$ ist.

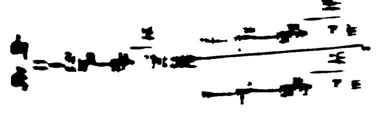
Resultat: $\frac{\operatorname{Sin}2\alpha}{\operatorname{Sin}2\beta}$.

7. In dem Ausdruck

$$F=2p\left(\eta^2-p^2e^{-\frac{2\xi}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}-p\eta\lg\frac{\eta+\left(\eta^2-p^2e^{-\frac{2\xi}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\eta-\left(\eta^2-p^2e^{-\frac{2\xi}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

zeichnen F und g constante Grössen und η eine Funktion von ξ. Es soll der Differentialquotient $\frac{d\eta}{d\xi}$ bestimmt werden.

Resultat:



U[illegible]

Von Herrn Franz [illegible]
österreichischen Kr[illegible]

1. Aus folg[illegible]
bekannten x un[illegible]

Resultat: Se[illegible]

$c^2=\alpha^2-\beta^2$, R^2:[illegible]

so ist

$x=$

$y=$

2. Aus den fo[illegible]
Unbekannten x, y[illegible]

Resultat: Setz[illegible]

$u=\frac{1}{4}($[illegible]

$v=\frac{1}{4}(2$[illegible]

$w=\frac{1}{4}(2$[illegible]

[illegible] Höhe [illegible] Quadrate [illegible] gegeben sind: [illegible]

[illegible] Seiten des Dreiecks x, y [illegible] Winkel A: so ist [illegible] aus den folgenden Gleichungen:

$$x^2+y^2=r^2,\quad xy\sin A=ah,\quad \cos A=\frac{x^2+y^2-a^2}{2xy};$$

[illegible] ergiebt die Gleichung [illegible]

[illegible] zur Bestimmung von x^2 und y^2 die beiden [illegible]

$$x^2+y^2=s^2,\quad 4x^2y^2=4a^2h^2+(s^2-a^2)^2,$$

odurch die Aufgabe auf ein ganz bekanntes arithmetisches Pro-
m zurückgeführt ist.

Leicht erhält man nun ferner die beiden Gleichungen:

$$x^2+y^2=s^2,$$
$$x^2-y^2=\pm a\sqrt{2s^2-(a^2+4h^2)};$$

$$2x^2=s^2\pm a\sqrt{2s^2-(a^2+4h^2)},$$
$$2y^2=s^2\mp a\sqrt{2s^2-(a^2+4h^2)}.$$

ie Möglichkeit der Aufgabe erfordert nun zuvörderst, dass

$$2s^2 \overset{=}{>} a^2+4h^2$$

Veil aber ferner x^2 und y^2 auch beide positive Grössen
issen, so muss

$$s^2 \overset{=}{>} a\sqrt{2s^2-(a^2+4h^2)},$$

$$s^4 \overset{=}{>} a^2\{2s^2-(a^2+4h^2)\}$$

s leicht zu der Bedingung

$$a^2+4h^2 \overset{=}{>} \frac{s^2(2a^2-s^2)}{a^2}$$

so erfordert die Möglichkeit der Aufgabe, dass

$$2s^2 \overset{=}{>} a^2+4h^2 \overset{=}{>} \frac{s^2(2a^2-s^2)}{a^2}$$

Von dem Herausgeber.

Aufgabe.

erhältnisse der Seiten eines rechtwinkligen
zu bestimmen, in dem sich die Abschnitte der
se, in welche dieselbe von dem auf sie von
e des rechten Winkels gefällten Perpendi-
lt wird, wie $m:n$ verhalten (Taf. V. Fig. 12.).

Auflösung.

er Bezeichnungen s. m. die Figur auf Taf. V. Fig. 12.
raussetzung ist

$$x:y = m:n,$$

also $y = \frac{n}{m}x$, woraus sich

$$w = x + y = \frac{m+n}{m}x$$

ergiebt. Bekanntlich ist nun

$$u^2 = wx = \frac{m+n}{m}x^2, \quad u = x\sqrt{\frac{m+n}{m}};$$

$$v^2 = wy = \frac{n(m+n)}{m^2}x^2, \quad v = x\frac{\sqrt{n(m+n)}}{m};$$

oder es ist:

$$u = x\sqrt{\frac{m+n}{m}}, \quad v = x\sqrt{\frac{n}{m}}.\sqrt{\frac{m+n}{m}}, \quad w = x\sqrt{\frac{m+n}{m}}.\sqrt{\frac{m+n}{m}};$$

also: $u:v:w = 1:\sqrt{\frac{n}{m}}:\sqrt{\frac{m+n}{m}} = \sqrt{m}:\sqrt{n}:\sqrt{m+n}.$

Für $m=1$, $n=2$ ist: $u:v:w = 1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$.

Bemerkung zum Archiv der Mathematik und Physik, 1858, XXXII. Thl. 1. Hft. S. 118. Nr. IX.

Von Herrn Professor Matzka in Prag.

Da der verdienstvolle Herr Herausgeber des Archivs von dem in dieser Miscelle mitgetheilten und ausführlich zergliederten Beweise der Flächengleichheit symmetrischer Kugeldreiecke andeutet: „es solle damit keineswegs gesagt sein, dass er (der Beweis) sich nicht vielleicht schon in anderen Büchern findet"; so erlaube ich mir zu bemerken, dass der Grundgedanke des Beweises, diese Dreiecke mittels grösster Kreise, durch die Axe (oder Pole) der die Spitzen des einen und des anderen Dreieckes aufnehmenden zwei Parallelkreise und durch die symmetrischen Paare der Dreiecksspitzen gelegt, in drei Paar congruente gleichschenklige Kugeldreiecke zu zerschneiden, bereits mit wenigen aber genügenden Worten in meiner, im September 1834 herausgegebenen Ueberarbeitung des zweiten Bandes von Vega's Vorlesungen über d. Math. S. 260. §. 578. I. durchgeführt worden ist. Ich muss jedoch hinzufügen, dass dieser Grundgedanke der Beweisführung keineswegs mein Eigenthum ist, sondern, wenn ich nicht irre, einem Aufsatze in Crelle's Journal für Mathematik entlehnt wurde.

Druckfehler. S. 472 in der letzten Zeile muss $\overline{|-s|}$ statt $\overline{|-\delta|}$ gesetzt werden.

Literarischer Bericht
CXXV.

Geodäsie.

Ueber die Berechnung der Flächen-Inhalte ganz oder überwiegend aus Original-Maassen von J. J. Vorländer, Königl. Preuss. Steuerrath. Leipzig. Teubner. 1858. 8.

Diese Schrift enthält eine ausführliche Anleitung zur Flächenberechnung, hauptsächlich aus rechtwinkligen Coordinaten. Für den Mathematiker enthält sie nichts Neues, aber manche praktische Winke, rücksichtlich der zweckmässigsten Anordnung und Controlirung der Rechnungen, welche sie für Praktiker jedenfalls lehrreich machen, die wir daher auf dieselbe hinweisen.

Astronomie und verwandte Wissenschaften.

Zeitschrift für populäre Mittheilungen aus dem Gebiete der Astronomie und verwandter Wissenschaften. Herausgegeben von Professor Dr. C. A. F. Peters, Director der Sternwarte in Altona. Band I. Heft I. Mit vier Karten. Altona. 1858. 8.

Herr Professor Peters in Altona, der sich schon durch die Herausgabe der „Astronomischen Nachrichten" so grosse Verdienste um die Wissenschaft erwirbt, fügt denselben durch die Herausgabe der obigen Zeitschrift ein neues, nicht minder grosses hinzu, und kommt dadurch jedenfalls einem wesentlichen

Bedürfnisse entgegen. Denn welche Wissenschaft möchte sich wohl mehr zur populären, — d. h. hier nur vom strengen mathematischen Gewande so viel als möglich entkleideten, — Darstellung eignen; welche mehr eine möglichst grosse Verbreitung auch unter denen, die höheren mathematischen Entwickelungen nicht zu folgen im Stande sind, für sich in Anspruch zu nehmen berechtigt sein, als die dem Menschen von der Vorsehung so nahe gelegte Astronomie oder, wie wir hier, gewiss im Sinne des verehrten Herrn Herausgebers, lieber sagen möchten, die Wissenschaft vom Weltgebäude im Grossen und Ganzen. Dass ohne eine Kenntniss dieser unendlich erhabenen Wissenschaft bis zu einem gewissen Grade eine vollständige Bildung des Geistes nicht möglich ist, dass Jeder, wer sich nicht in deren Besitz befindet, nicht bloss einen hohen geistigen Genuss entbehrt, sondern auch auf dem mühevollen von Widerwärtigkeiten nicht freien Gange des Lebens, gewiss zu seinem grössten Schaden, einen Wegweiser verliert, der ihn unter allen Stürmen immer auf das hinweiset, was über dem Leben stehet und in der Unendlichkeit liegt: davon kann wenigstens Niemand mehr überzeugt sein als der Unterzeichnete. Derselbe hat daher das Erscheinen dieser neuen Zeitschrift mit der grössten Freude begrüsst, nicht bloss weil er dieselbe als ein wichtiges Beförderungsmittel allgemeiner Bildung betrachtet, sondern namentlich auch deshalb, weil er, was gerade bei einer solchen Zeitschrift von der grössten Wichtigkeit ist, überzeugt ist, dass deren Herausgabe in den Händen eines mit der Wissenschaft bis in ihre grössten Tiefen vollkommen vertrauten Mannes liegt.

Dass der Herr Herausgeber die Aufgabe seiner Zeitschrift in sehr zweckmässiger Weise, keineswegs vorherrschend bloss im strengen astronomischen Sinne, sondern weit mehr im allgemeineren Sinne des Kosmos aufzufassen gedenkt, erhellet schon aus dem vorliegenden ersten Hefte auf die unzweideutigste Weise. Denn dasselbe enthält zunächst einen Aufsatz über die „Periodischen Erscheinungen der Pflanzen von A. Quetelet, Director der Sternwarte in Brüssel“, in welchem Herr Quetelet eine überaus lehrreiche und vollständige Uebersicht der über diesen Gegenstand, zu dessen Bearbeitung die erste Anregung gegeben zu haben er selbst bekanntlich das grosse Verdienst hat, bisher angestellten Untersuchungen und eine Darlegung der dabei befolgten Methode in einer ganz allgemein verständlichen Sprache giebt, so dass wir diesen Aufsatz einem Jeden, wer sich selbst mit so verdienstlichen Untersuchungen zu beschäftigen gedenkt, nicht genug zur Beachtung empfehlen kön-

nen, um sich mit der besten dabei zu befolgenden Methode und den nie aus dem Auge zu verlierenden Gesichtspunkten bekannt zu machen. Nach einer allgemeinen Einleitung, in welcher mit Recht der grossen Verdienste, die namentlich auch die Herren Kreil und Fritsch in Wien sich um diesen Gegenstand erworben haben, gedacht wird, handelt Herr Quetelet I. Ueber die hauptsächlichsten Ursachen, welche auf die Entwicklung der Pflanzen von Einfluss sind, wobei alle bei den betreffenden Beobachtungen zur Geltung kommenden allgemeinen Gesichtspunkte gehörig hervorgehoben werden. Dann bespricht er II. Die periodischen Erscheinungen der Pflanzen in Brüssel, und endlich III. Die periodischen Erscheinungen der Pflanzen in Belgien und im übrigen Europa, Alles in einer überaus lehrreichen, allgemein verständlichen, zugleich die trefflichste Anleitung zur Anstellung ähnlicher Beobachtungen gebenden Weise, so dass wir Herrn Quetelet für diesen Aufsatz zu dem lebhaftesten Danke verpflichtet sind. — Ausser diesem Aufsatze enthält das vorliegende Heft noch den folgenden zweiten, gleich vorzüglichen Aufsatz: „Das magnetische System der Erde von Ch. Hansteen, Director der Sternwarte in Christiania“, welchem vier magnetische Karten beigegeben sind. Da dieser Aufsatz einen der trefflichsten Gelehrten zum Verfasser hat, welcher fast sein ganzes Leben der Erforschung der Gesetze des Magnetismus überhaupt und besonders des Erdmagnetismus gewidmet hat, so ist eine weitere Empfehlung desselben ganz überflüssig, wenn wir nur unseren Lesern die Versicherung geben, dass auch dieser Aufsatz in einer ganz allgemein verständlichen Sprache gehalten ist, wenn auch freilich dabei einige wenige, ganz elementare mathematische Kenntnisse vorausgesetzt werden mussten.

Das zweite Heft wird einen Aufsatz von Herrn Mädler enthalten: „Zur Cometenkunde“, ausserdem einen Artikel über dessen Centralsonne und eine Uebersicht des Sonnensystems. Ephemeriden, welche das frühere von Schumacher herausgegebene Jahrbuch, als dessen Fortsetzung diese Zeitschrift zu betrachten ist, enthielt, wird diese Zeitschrift nicht enthalten; dagegen aber ausser den astronomischen und physikalischen Abhandlungen auch Tabellen, so weit dieselben für Jeden, der sich irgend mit Naturwissenschaften beschäftigt, von Interesse sein können.

Wir sagen dem Herrn Verfasser für dieses neue, sehr zeitgemässe Unternehmen im Namen der Wissenschaft unsern wärm-

météorologique de l'arme à M. A. Quetelet. p. 306. — Note sur quelques dispositions à donner à la marmite de Papin et sur un avertisseur électrique par M. Melsens. p. 311. — Démonstration d'un Postulatum d'Euclide (Deux droites l'une perpendiculaire, l'autre oblique à une même troisième se rencontrent, lorsqu'elles sont situées dans le même plan et suffisamment prolongées). Par M. Lamarle. p. 408. — Sur les triangulations qui ont été faites en Belgique antérieurement à 1830; par le général Nerenburger. p. 430. — Des observatoires du nord de l'Allemagne et de la Hollande; par M. E. Quetelet. p. 480. — Sur le magnétisme terrestre dans le nord de l'Allemagne et dans la Hollande; par M. E. Quetelet. p. 495. — Mémoire sur l'état actuelle des lignes isocliniques et isodynamiques dans le Grand-Bretagne, la Hollande, la Belgique et la France, d'après les observations de l'auteur; M. Mahmoud-Effendi, astronome égyptien. Rapport de M. A. Quetelet. p. 620. — Sur l'existence d'une atmosphère autour de la lune; par M. Geniller. Rapport de M. Liagre. p. 626. — Horloges électriques; par M. Gérard. Rapport de M. De Vaux. p. 636. — Démonstration du Postulatum d'Euclide (Note additionnelle*). Par M. Lamarle. p. 637. — Note pour démontrer l'existence d'une atmosphère autour de la lune; par M. Geniller. p. 654.

*) S. oben.

Literarischer Bericht

CXXVI.

Arithmetik.

Tables d'intégrales définies par D. Bierens à Haan. Publiées par l'Académie Royale des Sciences á Amsterdam. Amsterdam. 1858. C. G. van der Post. XXII. und 572 S. Quart.-fol.

Es liegt uns hier ein Buch vor, das bis jetzt einzig in seiner Art dasteht; ein Unternehmen, dem sich aus der neuern Litteratur kein wichtigeres an die Seite setzen lässt. Der Verfasser hat das lange gefühlte Bedürfniss einer Sammlung bestimmter Integrale endlich realisirt und die Früchte seines Fleisses in obengenanntem Buche von circa 600 Seiten und etwa 7—8000 bestimmten Integralformeln niedergelegt. Was ihn bei der Herausgabe desselben geleitet, spricht er selbst in der Vorrede sehr deutlich aus. Er sagt: „Je voulais réunir les uns auprès des autres les différents résultats, épars par-ci et par-là, que l'on avait obtenus au sujet de ces fonctions, par beaucoup de méthodes intrinsèquement différentes, et pour la plupart plus ou moins indirectes. Il résultait de cette dispersion des formules obtenues, que l'on ne pouvait en tirer tout le profit possible, tant pour la pratique, — c'est à-dire, pour les cas, où l'on pourrait avoir besoin des valeurs d'une certaine intégrale définie, — que pour la théorie elle-même, — c'ést-à-dire pour l'emploi de ces formules dans la déduction d'autres intégrales définies, et pour la vérification de nouvelles formules de ce genre, à l'égard desquelles on pouvait entretenir des doutes, par rapport à la priorité ou à l'orginalité."

Diesen Uebelständen will der Verfasser durch seine Sammlung bestimmter Integrale entgegentreten. Soll dieselbe ihren Zweck erreichen, so muss jedes darin enthaltene Integral auch die Herleitung zur Seite haben, damit man sich selbst ein Urtheil über die Richtigkeit oder Falschheit bilden könne. Dass sich diese Deductionen bei einem Buche, das schon ohne dieselben die Stärke von 600 Seiten in Quartfolio einnimmt, füglich nicht geben liessen, leuchtet wohl von selbst ein. Um jedoch diese Controlle erreichen zu können, setzt der Verfasser neben jedes Integral die vollständige Literatur, soweit ihm dieselbe bekannt ist. Dass bei dieser Art der Aufnahme der Integrale auch manches falsche mit unterlaufen konnte, sieht man sehr leicht, und das Buch enthält deren auch eine ganze Anzahl. Obwohl es nun eigentlich nach der Vorrede nicht in der Absicht des Verfassers lag, eine genaue Revision jeder einzelnen Integralformel zu unternehmen, so hat er doch nach Beginn des Druckes sich an diese Sysiphusarbeit gemacht und jedes einzelne Integral einer genauen Revision unterzogen. Er hat, nach einer Nachschrift zur Vorrede, jede einzelne Formel nachgerechnet, und aus dieser mühevollen Arbeit sind 29 Spalten Verbesserungen hervorgegangen. Diejenigen Integrale, die er gänzlich als falsch gefunden, sind darin durch das Wort „fautive“ bezeichnet, und der wahre Werth des Integrals ist angegeben; dagegen hat er diejenigen, welche er nur wegen der Art ihrer Herleitung und aus ähnlichen Gründen für eigentlich unbestimmte Integrale hielt, wie die von Herrn Raabe in Zürich gegebenen Integrale goniometrischer Functionen, bei denen diese nur in der ersten Potenz vorkommen, zwischen den Grenzen Null und Unendlich, zwar vollständig aufgenommen, sie jedoch durch ein „fautive“ mit dahintergesetztem Fragezeichen, oder auch durch ein blosses Fragezeichen angedeutet.

Aber nicht alle der aufgenommenen Integrale sind den Werken entnommen, die dem Verfasser zugänglich waren, beinahe die Hälfte — etwas mehr als 3200 — hat der Verfasser aus denen, die von andern Autoren gegeben, hergeleitet. Theils sind dieselben durch Addition oder Subtraction zweier oder mehrerer dieser gegebenen Integrale entstanden, theils hat der Verfasser, um Lücken, die ihm die Folge der Integrale einer Tafel zu bieten schien, auszufüllen, die fehlenden durch einfache Substitutionen aus andern Integralen hergeleitet. Letztere Methode ist jedoch nur dann zugelassen, wenn die Bestimmung der neuen Grenzen keine Maxima oder Minima für dieselben ergab. Den grösseren Theil der neuen Resultate hat er endlich aus einer Reductionsformel geschöpft, die er im zweiten Bande der Schriften der

Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Amsterdam veröffentlicht hat. Sie ist die folgende:

$$\int_a^b f(x)\partial F(x) - f(x)F(x)\Big\{_a^b + \int_a^b F(x)\partial f(x) = 0.$$

Diese Formel ist stets anwendbar, sobald die zu integrirende Function sich in zwei andere zerlegen lässt, deren eine sich als das Differential einer bekannten Function ansehen lässt, und wenn das zweite Glied obiger Formel $f(x)F(x)\Big\{_a^b$, d. h. zwischen den Grenzen a und b genommen, innerhalb dieser Grenzen keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet.

Alle auf eine der drei vorhergehenden Arten erhaltenen Resultate sind in den Tafeln durch einfache Verweisung auf diejenigen Integrale bezeichnet, aus denen sie hergeleitet sind. Dass die Schwierigkeit der Revision dieser Formeln bei Weitem grösser gewesen als die der unmittelbar gegebenen, ist wohl einleuchtend, da hierbei nicht bloss eines der gebrauchten Integrale, sondern mehrere derselben unrichtig sein konnten. Der Verfasser hat aber auch die, wie er selbst sagt, dornenvolle Arbeit nicht gescheut, die Richtigkeit auch dieser Formeln nachzuweisen. Die Früchte dieser Rechnungen sind in jenen oben erwähnten 29 Spalten „Observations et Corrections" niedergelegt.

Es bleibt mir noch übrig, Einiges über die Einrichtung der vorliegenden Tafeln anzuführen. Das Buch zerfällt in drei Hauptabtheilungen. Dieselben gründen sich auf die Anzahl verschiedener Functionsformen, die sich unter dem Integralzeichen finden. Die Abtheilung I., Table 1 à 111, enthält alle Integrale, wo nur eine einzige Functionsform der Integration unterworfen werden soll; die zweite Abtheilung, Table 112 à 374, diejenigen, welche zwei verschiedene; die dritte Abtheilung endlich, Table 375 à 447, umfasst alle diejenigen Integrale, die mehr als zwei verschiedene Functionsformen enthalten.

Diese drei Hauptabtheilungen sind wieder in 35 Unterabtheilungen zerlegt. Sie sind nun nach den verschiedenen Functionsformen selbst gebildet. Die erste Abtheilung enthält die Unterabtheilungen I. bis VI. Jede der Abtheilungen I.—V. enthält die Integrale einer der fünf verschiedenen Functionsarten, der algebraischen, exponentiellen, logarithmischen, goniometrischen und cyclometrischen Functionen und zwar in der aufgeführten Reihenfolge. Die Abtheilung VI., mit der Ueberschrift „Diverses Fonctions" umfasst dann die übrigen transcendenten Functio-

nen, die elliptischen, den Integrallogarithmus, Integralsinus, Integralcosinus und die beiden Functionen $B'(x)$ und $B''(x)$ des Herrn Raabe.

Im zweiten Theile, der die Unterabtheilungen VII. – XX. einschliesst, und im dritten, mit den Unterabtheilungen XXI.—XXXV., sind dieselben so geordnet, dass die obengenannten zehn Functionsarten, in jenem Theile in der Ordnung zu zwei und zwei combinirt erscheinen, wie ihre Folge im ersten Theile ist. Im letzten Theile sind die Unterabtheilungen XXI.—XXXIV. ebenso nach Combinationen zu dreien geordnet, und es enthält endlich Abtheilung XXXV. alle Integrale, deren Argument, d. h. integrirte Function, aus mehr als drei verschiedenen Functionsformen zusammengesetzt ist.

Diese Unterabtheilungen sind nun endlich in Tafeln abgetheilt. Die Anzahl derselben ist 447. Den Eintheilungsgrund gaben hier zuerst die einzelnen Arten der Functionen und dann zweitens die Integrationsgrenzen. Bei der letzten Eintheilung ist nun lediglich auch die grössere oder geringere Anzahl der in eine Tafel zusammenzufassenden Integrale massgebend gewesen. Diejenigen Integrale also, die nur in geringer Anzahl dieselben Grenzen besassen, sind mit ähnlichen Integralen unter der Rubrik „Limites diverses“ zusammengefasst.

Was die Einrichtung der Tafeln selbst betrifft, so ist dieselbe eine sehr einfache. Jede derselben hat drei Argumente. In der Mitte des Tabellenkopfes steht die Nummer der Tafel, links die Angabe der integrirten Function, rechts die Angabe der Grenzen. In dem ausführlichen Inhaltsverzeichniss ist diese Anordnung beibehalten. Die einzelnen Integrale jeder Tafel sind zu leichterer Anführung numerirt und es ist bei der Anordnung darauf gesehen, dass die allgemeinen Formeln den speciellen Fällen derselben nachfolgen. Niemals sind jedoch diese speciellen als in den allgemeinen Formeln enthalten angesehen, sondern sie sind stets einzeln mit aufgezählt.

Soweit die Einrichtung der Tafeln. Den Grad der Vollständigkeit, den sie beanspruchen, kann man aus dem Verzeichniss der eingesehenen Schriften leicht entnehmen. Wie der Verfasser bemerkt, fehlen die englischen und nordamerikanischen Zeitschriften, Journale und Monographien darin ganz, da dieselben ihm nicht zugänglich waren, und auch, zu seinem grossen Bedauern, seiner Aufforderung in verschiedenen Blättern Europas um Einsendung von Monographien leider von keinem einzigen Mathematiker unserer Erde Folge geleistet ist. Wir müssen hierüber im Interesse

der Wissenschaft unser lebhaftes Bedauern ausdrücken. Die Verhandlungen der verschieden Akademien der Wissenschaften dagegen sind vollständig berücksichtigt, da diese ihm sämmtlich in der Bibliothek der Königl. Akademie in Amsterdam, zu deren Mitgliedern sich der Verfasser zählt, zu Gebote standen. Was den Zeitpunkt betrifft, bis zu dem die Integrale aufgenommen sind, so erklärt der Herr Verfasser, dass dieselben mit dem Jahre 1853 geschlossen seien.

Die Ausstattung dieses vortrefflichen für die höhere Mathematik so wichtigen und unentbehrlichen Buches, für das wir dem hochgeehrten Herrn Verfasser im Namen aller Mathematiker unsern Dank aussprechen zu müssen glauben, ist eine vortreffliche: Druck und Papier lassen nichts zu wünschen übrig.

M. Curtze.

Physik.

Tables, meteorological and physical, prepared for the Smithsonian Institution. By Arnold Guyot, P. D., LL. D., Professor of Geology and physical Geography, College of New Jersey. Sec. edition, revised and enlarged. Washington. Smithsonian Institution. 1858. 8.

Wir beeilen uns dieses, von der Smithsonian Institution in Washington herausgegebene wichtige Werk unsern Lesern anzuzeigen. Dasselbe, ein mit amerikanischer Eleganz gedruckter starker Octavband, enthält alle bei meteorologischen und anderen fortlaufenden, in das Gebiet der Physik gehörenden Beobachtungen erforderlichen Tafeln in solcher Vollständigkeit und Zweckmässigkeit, wie unseres Wissens kein anderes Werk, und muss daher der allgemeinsten Beachtung dringend empfohlen werden. Indem wir bei einem solchen Werke kaum für nöthig halten, zu bemerken, dass jeder Tafel eine Einleitung über die wissenschaftlichen Grundlagen ihrer Berechnung vorangeschickt ist, müssen wir nur bedauern, dass es uns hier unmöglich ist, den fast überreichen Inhalt dieses eine höchst interessante und überaus lehrreiche Anschauung von der Grossartigkeit, mit welcher in Amerika die betreffenden Beobachtungen betrieben werden, gewährenden Werkes vollständig anzugeben, so dass wir uns mit der folgenden allgemeinen Uebersicht begnügen müssen, indem wir aber zugleich unsere Bewunderung nicht unterdrücken können über die reiche Unterstützung, welcher die Wissenschaften nach allen Richtungen

und Seiten hin von der berühmten Smithsonian Institution sich zu erfreuen haben, ein Beispiel, welches einzig in seiner Art in der Geschichte der Wissenschaft dasteht.

Die vorliegenden Tafeln zerfallen in sechs Hauptabtheilungen. Die erste Abtheilung unter dem Titel: „Thermometrical Tables'“ enthält auf 35 Seiten 15 Tafeln zur Verwandlung der verschiedensten Thermometer-Scalen in einander, worunter namentlich auch sechs sehr zweckmässige Tafeln vorkommen, welche den Werth der Grade der verschiedenen Scalen unmittelbar in Graden anderer Scalen angeben, wie z. B. „Table XII. Value of any number of Centigrade Degrees, expressed by a corresponding number of Degrees of Reaumur. — Die zweite Abtheilung, unter dem Titel: „Hygrometrical Tables“ enthält auf 165 Seiten 33 Tafeln in einer Vollständigkeit, wie sie uns noch nicht vorgekommen ist, und ist in die folgenden Unterabtheilungen getheilt: Practical Tables based on Regnault's Hygrometrical Constants: a. In French Measures b. In English Measures. (Für das französische Maass sind die hierher gehörenden fünf Tafeln folgende: Elastic Force of Aqueous Vapor. Psychrometrical Tables. For deducing the Relative Humidity from the Indications of Dew-Point Instruments. Factor $\frac{100}{F}$ for computing Relative Humidity. Weight of Vapor contained in a Cubic Metre of Air. Aehnlich für das englische Maass.) — Practical Tables based on the Hygrometrical Constants adopted in the Greenwich Observations. — Miscellaneous Tables for Comparison (Tafeln nach August, Kaemtz, Magnus, Pouillet u. A.; auch für das Saussure'sche Haarhygrometer.) — Appendix: For comparing Quantities of Rain-Water given in Different Measures. Namentlich in diesen Tafeln zur Hygrometrie ist nach unserer Meinung Alles gesammelt, was nur irgend für den Beobachter von Wichtigkeit sein kann. — Die dritte Abtheilung unter dem Titel: Barometrical Tables liefert auf 134 Seiten in 28 Tafeln Alles, was für die Beobachtung des Barometers irgend wünschenswerth sein dürfte, in folgenden Unterabtheilungen: For Comparing the different Barometrical Scales. For Comparing Barometrical Differences. For Reducing Barometrical Observations to the Freezing Point. For Correcting Barometrical Observations for Capillary Action nach Delcros, Pouillet, Gehler's Wörterbuch, Baily. — Die vierte Abtheilung unter dem Titel: Hypsometrical Tables liefert auf 149 Seiten in 44 Tafeln Alles, was nur irgend für barometrisches und thermometrisches Höhenmessen von Interesse ist, unter folgenden Unterabtheilungen: 1. Barometrical Measurement of Heigts. Ta-

bles based on Laplace's Constants (Delcros's Tables. Guyot's Tables. Loomis's Tables, Gauss's Tables, modified by Dippe. Dippe's Tables. Babinet's Modification of Laplace's Formula. Baily's Tables.). Tables based on Bessel's Tables (Plantamours Tables.). Miscellaneous Tables (eine grosse Menge der nützlichsten und wichtigsten Tafeln, die hier alle anzuführen unmöglich ist.). 2. Thermometrical Measurement of Heights. 3. Appendix to the Hypsometrical Tables (Comparison of the Measures of Length most generally used for indicating Altitudes). — Die fünfte Abtheilung unter dem Titel: Meteorological Corrections or Tables for correcting series of observations for the periodic and non-periodic variations enthält auf 120 Seiten 99 Tafeln mit folgenden Unterabtheilungen: Temperature. Hourly Corrections for Periodic Variations (North Amerika. South America. Asia. Europe. Africa and Australia). Monthly Corrections for Non-periodic Variations. Force of Vapor and Relative Humidity (Hourly Corrections for Periodic Variations). — Die sechste Abtheilung endlich enthält auf 16 Seiten die folgenden 6 allgemein sehr nützlichen Tafeln: I. Position of the Principal Observatoires. II. To convert Parts of the Equator into Sidereal Time, or to convert Terrestrial Longitude in Arc into Time. III. To convert Sidereal Time into Parts of the Equator in Arc, or to convert Time into Terrestrial Longitude in Arc. IV. For converting Sidereal Time. V. Correction of the Time obtained by Observation of the Sun, in order to have the True Time of the Clock. VI. For computing Terrestrial Surfaces by Delcros.

Man sieht hieraus, welcher ungemein grosse Reichthum von Hülfsmitteln zur Erleichterung und Abkürzung seiner Arbeiten dem Beobachter hier geboten wird, und muss nicht nur den Fleiss, sondern auch den grossen praktischen Sinn, welchen der Herausgeber dieses merkwürdigen und im höchsten Grade nützlichen und wichtigen Buchs, Herr Arnold Guyot, an den Tag gelegt hat, bewundern, zugleich aber der Smithsonian Institution den wärmsten Dank zollen, dass durch ihre Vermittelung dessen Herausgabe ermöglicht wurde. Allen unsern Lesern, die sich irgend hierher gehörenden Beobachtungen widmen, müssen wir dasselbe dringendst zur Beachtung empfehlen. Wer dieses Buch besitzt, kann nach unserer Meinung alle übrigen ähnlichen Bücher völlig entbehren.

Vermischte Schriften.

The Antlantis: a Register of Literature and Science. Conducted by membres of the Catholic University of Ireland. No. I. January. 1858. No. II. July. 1858. London. 1858. 8. (Preis für jede Nummer 5 Schilling).

Unter obigem Titel erscheint von diesem Jahre an eine in zwei halbjährigen Nummern herauskommende Zeitschrift gemischten Inhalts, die wir der Aufmerksamkeit unserer Leser empfehlen zu müssen glauben, weil dieselbe auch manche sehr beachtenswerthe Artikel aus dem Gebiete der Mathematik und Physik enthält. Aus den beiden ersten Nummern gehören die folgenden Aufsätze hierher: No. I. On the Influence of the Great Inequalities of Jupiter, Saturn etc. upon the Motions of the other Heavenly Bodies. By Rev. W. G. Penny, M. A. p. 145. — On the Physical Structure of the Earth. By Henry Hennessy. p. 170. — No. II. On an Inequality of long period in the motions of the Planets Jupiter, Saturn and Uranus. By Rev. W. G. Penny, M. A. p. 393. — On the Distribution of Heat over Islands, and especially over the British Isles. Part. I. By Henry Hennessy. p. 396. — On the Function of Sommering's Yellow Spot in producing unity of visual perception in binocular vision. By Thomas Hayden, M. D. p. 476. — Auch unter den sehr mannigfaltigen Scientific Notices finden sich mehrere interessante Notizen, die wir hier nicht einzeln namhaft machen können, indem wir uns begnügen, die Aufmerksamkeit unserer Leser im Allgemeinen auf diese beachtungswerthe neue Zeitschrift zu lenken.

Preisaufgabe.

La Société Provinciale des Arts et Sciences à Utrecht met au concours et recommande à l'attention des savants étrangers les questions suivantes:

1. Étude critique sur la vie, et le mérite scientifique de Chrétien Huyghens*).

Les mémoires doivent être ecrits en hollandais, français, anglais, allemand ou latin, dans tous les cas en caractères italiens. L'auteur marquera son mémoire d'un signe distinctif, qui sera reproduit sur un billet cacheté, contenant son nom et son adresse, et qu'il joindra au mémoire. Le prix est une médaille d'or de la valeur de trente ducats d'Hollande. Les mémoires doivent être adresses sans frais, avant le 1. Décembre 1859 au Sécrétaire général de la Société, Mr. le Dr. J. W. Gunning à Utrecht.

*) Die übrigen Preisfragen fallen nicht in den Kreis des Archivs.

Literarischer Bericht
CXXVII.

Preis-Aufgabe der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig.

Die Gesellschaft wünscht:

> **Eine Bestimmung der Bahn des periodischen Kometen von Faye (Komet 1843. III.) aus den drei Erscheinungen von 1843—44, 1850—51 und 1858 mit Berücksichtigung aller Störungen und Fortführung derselben bis zur nächsten Wiederkehr 1865—66, für welche eine Ephemeride zu geben sein wird. Auch ist zu untersuchen, ob bei diesem Kometen ein widerstehendes Mittel angedeutet ist.**

Die ausschliessende Frist für die Einsendung der Lösungen dieser Aufgabe, welche nach der Wahl der Bewerber in deutscher, französischer, englischer oder lateinischer Sprache abgefasst sein können, ist der 1. September 1860. Die Abhandlungen (nicht von der Hand des Verfassers geschrieben) müssen mit einer Devise versehen, und von einem versiegelten Zettel mit derselben Devise, der des Verfassers Namen enthält, begleitet sein. Die versiegelten Zettel zu den Abhandlungen, denen der Preis nicht zuerkannt wird, werden ein halbes Jahr hindurch nach der Preisertheilung aufgehoben, falls die Verfasser etwa ihre Abhandlungen reklamiren wollen. Nach dieser Zeit werden sie uneröffnet verbrannt und es kann nachher keine Abhandlung reklamirt werden.

Die Ertheilung des Preises von

Sechszig Friedrichsd'or

geschieht am 2. Januar 1861, in der ordentlichen Versammlung

zur Feier des Stiftungstages. Die gekrönte Abhandlung bleibt Eigenthum der Gesellschaft.

Die naturforschende Gesellschaft zu Danzig.
Dr. *Liévin*, Director. *J. J. Hartwig*, Secretair.

Geodäsie.

Elemente der Vermessungskunde von Doctor Carl Maximilian Bauernfeind, Baurath der Königl. Bayerischen obersten Baubehörde und Professor. Erster Band. München. 1856. 8. — Zweiter Band. München. 1858. 8. (Cotta'sche Buchhandlung).

Wir haben die Anzeige dieses jedenfalls in vielen Beziehungen empfehlenswerthen Werks bis zu dem Erscheinen des uns jetzt vorliegenden zweiten Bandes verschoben, und wollen nun etwas ausführlicher über dasselbe berichten.

Der erste Band ist nach einer Einleitung, welche die Allgemeinen Begriffe enthält, und die bei den Vermessungen gebräuchlichen Maasse, so wie das Sehen mit freiem Auge bespricht, hauptsächlich den Instrumenten gewidmet. In nach unserer Meinung sehr zweckmässiger Weise werden zuerst die bei allen Messinstrumenten vorkommenden Bestandtheile für sich besprochen, wodurch vielfache, sonst gewiss häufig vorkommende Wiederholungen vermieden werden. Es kommen daher nach und nach zur Betrachtung: die Mittel zur Herstellung der Absehlinie, die Mittel zur Herstellung von loth- und wagerechten Richtungen, die Mittel zur Vergrösserung sehr kleiner Gegenstände, die Mittel zur Vergrösserung entfernter Gegenstände, die Mittel zur Messung sehr kleiner Linien und Winkel, und hierin Manches, was sich in ähnlichen Werken nur selten findet, wie z. B. die Beschreibung und der Gebrauch der Messkeile, eines bei der Messung der Standlinien sehr wichtigen und interessanten, an sich freilich auf sehr einfachen geometrischen Principien beruhenden Hülfsmittels. Hierauf geht der Herr Verfasser zu den verschiedenen Arten der Instrumente selbst über, nämlich: Mittel zur Bezeichnung der Punkte auf dem Felde. Instrumente zum Winkelmessen (Instrumente für constante Winkel, wobei auch das Prismenkreuz des Herrn Verfassers mit Recht besondere Beachtung gefunden hat;

Instrumente zur graphischen Aufnahme der Winkel; Instrumente zur Aufnahme und Absteckung der Winkel im Gradmaasse, nämlich Boussolen-Instrumente, Theodoliten, Spiegelsextant und Spiegelkreise). Instrumente zum Längenmessen (Maassstäbe, Messketten, die verschiedenen Arten der Distanzmesser, woraus wir mannigfaltige Belehrung geschöpft haben). Instrumente zum Höhenmessen (Nivellir-Instrumente und Barometer). Instrumente zum Geschwindigkeitsmessen, ein lehrreicher Abschnitt, der bis jetzt in allen ähnlichen Werken ganz fehlt, wobei wir noch besonders hervorheben müssen, dass in allen vorhergehenden Abschnitten auch die Markscheide-Instrumente ganz besondere Beachtung gefunden haben. Wenn auch die aus Münchener Werkstätten hervorgehenden Instrumente hin und wieder besondere Berücksichtigung gefunden haben — wozu übrigens die Berechtigung durch die grosse Berühmtheit dieser Werkstätten, die eigentlich allen übrigen zum Muster gedient haben, und denen ewig der Ruhm bleiben wird, zuerst in Deutschland bessere und vollkommenere Instrumente geliefert zu haben, vollständig gegeben war, — so dürfen wir doch dem Herrn Verfasser das Zeugniss völliger Unpartheilichkeit in dieser Beziehung nicht versagen, sondern müssen ihm vielmehr bezeugen, dass er überall sich nur nach dem Besten und Zweckmässigsten umzusehen bemühet gewesen ist. Dass den Fehlern und Correctionen der Instrumente stets grosse Aufmerksamkeit gewidmet worden ist, bedarf bei einem solchen Werke kaum noch besonderer Erinnerung, wobei übrigens mit Recht nur solche Corrections-Methoden Aufnahme gefunden haben, welche praktisch leicht und genau ausführbar sind. Zeichnungen sind in reichlichem Maasse in sehr schöner und deutlicher Ausführung und in einem fast mehr als hinreichend grossen Maassstabe beigegeben. Die verschiedenen Planimeter haben ihren Platz im zweiten Theile am gehörigen Orte gefunden. Wenn nun auch in neuerer Zeit schon manche recht verdienstliche und anerkennungswerthe Werke über Instrumentenkunde erschienen sind, so scheint uns doch dem vorliegenden jedenfalls der Vorzug einer, so weit es bei diesem Gegenstande überhaupt möglich ist, völlig systematischen Darstellung, und der durch das dadurch nothwendig bedingte methodische Fortschreiten von selbst erreichten Vollständigkeit zu gebühren, weshalb wir diesen ersten Theil des auch äusserlich von der berühmten Verlagshandlung vortrefflich ausgestatteten Werkes zu sorgfältiger Beachtung zu empfehlen und auf denselben besonders aufmerksam zu machen für unsere Pflicht halten.

Der zweite Theil ist den Messungsmethoden gewidmet. Zuerst handelt der Herr Verfasser von Horizontalmessungen

(Messung der Linien. Messung der Winkel und Dreiecke. Messung von Vielecken und Flurmarken, wobei die Linearplanimeter von Wetli und Hansen, so wie das Polarplanimeter von Amsler sorgfältig beschrieben und beurtheilt worden sind, auch die Vertheilung der Felder mit gehöriger Berücksichtigung der Bonität gelehrt worden ist. Messung eines ganzen Landes); dann von den Vertikalmessungen (Messung der Vertikalwinkel. Trigonometrische Höhenmessungen. Nivelliren. Barometrisches Höhenmessen, wobei die Theorie von Ohm gebührende Berücksichtigung gefunden hat). Der folgende Abschnitt ist der Grubenmessung oder der Markscheidekunst gewidmet, und der letzte betrifft die Wassermessungen, worüber man in allen übrigen einschlagenden Werken bis jetzt vergeblich Belehrung sucht. Der übrige Theil des Werkes beschäftigt sich in sehr vollständiger und lehrreicher Weise mit den Kartenprojectionen; der Entwerfung der Situationspläne, der Nivellimentspläne oder Profilrisse nach der Länge und Quere, der Berg- oder Grubenpläne; so wie mit dem Copiren der Karten. Dass bei den Nivellimentsplänen die Methode der Horizontalen besondere Berücksichtigung gefunden hat, erkennen wir besonders an. Den Beschluss macht ein auch sehr zweckmässig unter dem besonderen Titel:

Tafeln über verschiedene Gegenstände der praktischen Geometrie. München. 1858.

erschienener Anhang, worin funfzehn, viele häufig vorkommende geodätische Rechnungen wesentlich erleichternde Tafeln enthalten sind. — Unser Urtheil über diesen zweiten Theil geht dahin, dass derselbe jedenfalls die einfachsten und besten Messungsmethoden in sehr deutlicher Darstellung enthält, und die jedenfalls aus vielfacher eigener Praxis hervorgegangene Umsicht bekundet, mit welcher der Herr Verfasser überall das Zweckmässigste, bei der praktischen Anwendung am Sichersten auf guten Erfolg rechnen Dürfende herauszufinden und seinen Lesern mitzutheilen und zu empfehlen verstanden hat. Zum Schluss wollen wir uns nur die Bemerkung erlauben, dass, wenn auch der Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler (S. 119.) und die Ausgleichung der Winkel keineswegs unberücksichtigt geblieben, doch der Methode der kleinsten Quadrate keine Besprechung zu Theil geworden ist, woraus wir indess dem Herrn Verfasser bei der ganzen Tendenz des vorliegenden Werkes um so weniger einen Vorwurf zu machen geneigt sind, weil bekanntlich die Ansichten über die Zweckmässigkeit und den wahrhaft lohnenden Erfolg der Anwendung dieser Methode in der Feldmesskunst, im Verhältniss zu dem durch sie in Anspruch genommenen Zeit- und Kraftaufwand noch mehrfach

getheilt sind und aus einander gehen, wobei man nur an manche neuere ausserhalb Deutschland ausgeführte, selbst sehr grosse Ländergebiete umfassende Messungen zu denken braucht. Nur aber muss man bei dieser Divergenz der Ansichten nicht aus dem Auge verlieren, dass es der Wissenschaft noch nicht gelungen ist, etwas Besseres an die Stelle jener Methode zu setzen, die auch immer Das für sich haben wird, dass sie durch consequente Schlüsse auf wenigen Grundprincipien aufgeführt worden ist, wenn auch diese Grundprincipien selbst an sich noch manche schwache Seite darbieten und Anfechtungen ausgesetzt sein dürften.

Gewiss wird auch dieses Werk, das mit wenigen Ausnahmen durchaus nur elementare mathematische Kenntnisse voraussetzt und überall sich einer sehr deutlichen Darstellung befleissigt, das Seinige dazu beitragen, dem leider noch immer vorkommenden, ganz handwerksmässigen Treiben vieler Feldmesser immer mehr und mehr ein Ziel zu setzen und einer geläuterten Theorie immer mehr und mehr Eingang zu verschaffen, welchen Erfolg wir ihm vorzüglich wünschen. G.

Physik.

Annali del Real Osservatorio meteorologico Vesuviano.

Diese Annalen des durch die Munificenz Sr. Majestät des Königs von Neapel auf dem Vesuv errichteten, meteorologischen Observatoriums werden von dessen verdientem Director, Herrn **Luigi Palmieri** herausgegeben und erscheinen in einem Bande am Ende eines jeden Jahres in gross 4°. bei Herrn **Alberto Detken** zu Neapel (Largo di Palazzo, sotto la Real Foresteria). Bei der grossen Wichtigkeit solcher Beobachtungen auf dem genannten merkwürdigen Punkte der Erde halten wir uns verpflichtet, auf diese „Annalen" in Folge des uns zugesandten Prospectus aufmerksam zu machen.

Vermischte Schriften.

Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae. Vol. II. Fasciculus prior 1856. Upsaliae. 1856. 4°.

Der erste Theil dieser dritten Reihe der trefflichen und stets so vieles Ausgezeichnete enthaltenden Schriften der Königlichen

Societät der Wissenschaften zu Upsala ist im Literar. Ber. Nr. CVI. S. 10. angezeigt worden, und wir freuen uns, schon wieder einen von der erfolgreichen Thätigkeit derselben von Neuem das rühmlichste und erfreulichste Zeugniss ablegenden Theil dieser wichtigen Gesellschafts-Schriften anzeigen zu können. Ausser sprachwissenschaftlichen und botanischen Arbeiten enthält derselbe die folgenden in den Kreis des Archivs gehörenden Abhandlungen:

Détermination de la latitude du nouvel Observatoire d'Upsala. Par Dr. *H. Schultz*, Assistant de l'Observatoire d'Upsala. p. 177.—p. 206.

Auf den Wunsch des verdienten Directors der Sternwarte, Herrn Professor G. Svanberg, unternahm Herr H. Schultz eine neue Bestimmung der geographischen Coordinaten des Observatoriums und veröffentlicht in der vorliegenden Abhandlung zunächst seine rücksichtlich der Breite angestellten Untersuchungen. Die Grundlage seiner Bestimmung bilden Beobachtungen der Sterne im ersten Vertikal mit einem als Universal-Instrument montirten Fernrohr von Repsold von funfzigmaliger Vergrösserung. Nach einer sehr lehrreichen theoretischen Auseinandersetzung der Methode an sich und im Allgemeinen, theilt Herr Schultz seine ganz nach den betreffenden neuesten Methoden geführten Rechnungen vollständig mit, die sich auf die Beobachtungen von neun Sternen gründen. Der eine war der Bessel'sche Fundamental-Stern α Cassiop., für welchen Herr S. die Positionen aus dem Nautical-Almanac. 1854. entnahm. Für drei andere: β, η, v_2 Cassiop. hatte Herr Rümker im Januar 1855 directe Bestimmungen zu machen die Güte; für die übrigen wurden die Positionen theils aus Herrn Rümker's Catalog, theils aus „The Catal. of Stars of the Britt. Association" genommen. Im Ganzen halten wir die vorliegende Untersuchung, ganz abgesehen von dem natürlich grossen besonderen Werthe der gewonnenen Resultate, an sich für ein treffliches und sehr lehrreiches Beispiel für derartige Untersuchungen überhaupt, und dieselbe verdient namentlich auch in dieser Beziehung alle Empfehlung zu allgemeinerer Beachtung. Als End-Resultat ergab sich

$$59^{0}.51'.31'',5$$

als Breite der Drehkuppel des Observatoriums.

La longitude terrestre déterminée au moyen de signaux galvaniques. Par Dr. *T. R. Thalén*. p. 207.—p. 220.

Jeder weiss, mit wie gutem Erfolg in neuerer Zeit die elektrischen Telegraphen schon vielfach zur Bestimmung von Längen-Differenzen angewandt worden sind. Eine neue Bestimmung der

Längen-Differenz zwischen Stockholm und Upsala auf diesem Wege liegt uns hier vor. Als mittleres Resultat ergab sich in Zeit:

23. Juni 1855 . . . . . 1^m.43^s,648,

23. „ . . . . 1^m.43^s,641,

was mit dem früheren von Herrn G. Svanberg natürlich auf ganz anderem Wege erhaltenen Resultate: 1^m.43^s,70 sehr gut übereinstimmt. Aber nicht bloss dieses Resultats wegen ist die vorliegende Abhandlung wichtig und interessant, sondern auch rücksichtlich der angewandten Methode im Allgemeinen. In der „Introduction historique“ zählt Herr Thalén als wichtigste Fehlerquellen dieser Methode die folgenden auf:

1. Les erreurs personelles des observateurs.

2. Celles qui proviennent de l'inertie des appareils.

3. Celles de la durée nécessaire pour la transmission du courant électrique.

und entwickelt nun in der „Exposition générale de la nouvelle méthode“ eine neue ihm eigenthümliche Beobachtungs-Methode, durch welche die aus der Ungleichheit der Organe der Beobachter und der Trägheit der Apparate entspringenden Fehler ganz vermieden werden, wodurch er seiner Abhandlung auch einen allgemein wissenschaftlichen Werth und ein allgemeineres Interesse, als die Resultate der Beobachtungen an sich derselben verleihen, sichert, weshalb wir Alle, die sich mit dergleichen Beobachtungen zu beschäftigen beabsichtigen, auf dieselbe hinweisen und sie recht sehr zur verdienten Beachtung empfehlen.

Remarques sur la forme des racines numériquement déterminées. Par *C. J. D:s Hill*. p. 221.—p. 228.

In dieser Abhandlung liefert Herr Professor Hill zwei neue Beweise für das Fundamental-Theorem der Theorie der Gleichungen, welches bekanntlich Gauss eigentlich sein ganzes Leben hindurch nie aus den Augen verloren, und dem, ausser anderen grossen Mathematikern, namentlich auch Cauchy stets seine besondere Aufmerksamkeit gewidmet hat. Den einen der beiden Beweise, — die natürlich eine Mittheilung oder auch nur einen Auszug hier in diesen literarischen Berichten nicht gestatten, — welcher auf die Betrachtung einer Curve von doppelter Krümmung gegründet ist, nimmt Herr Hill ganz als sein Eigenthum in Anspruch; den andern bezeichnet er als eine Modification des Beweises von D'Alembert, die jedoch eine Anwendung auf transcendente Gleichungen möglich macht. Den Hauptzweck seiner beiden Beweise macht aber Herr Hill mit folgenden Worten namhaft: „Il m'a toujours semblé d'un avantage particu-

lier, si l'on pouvait entamer la démonstration d'une telle manière, qu'en même temps une voie sûre était indiquée, sur laquelle on pouvait procéder adroitement à la récherche des valeurs mêmes de la partie de la racine." Wir freuen uns wahrhaft, hier bekennen zu können, dass diese Worte uns selbst wie aus der Seele geschrieben sind. Ja, wir sind ganz entschieden der Meinung, dass Gauss, Cauchy und andere grosse Mathematiker wiederholt so grosse Kraft und Zeit auf die Auffindung strenger Beweise für den fraglichen Satz verwandten, weniger des Satzes an sich wegen, an dessen Richtigkeit wohl längst nicht gezweifelt wurde, als vielmehr deshalb, weil sie von dem gewiss ganz richtigen Gesichtspunkte ausgingen, dass sich bei der Aufsuchung strenger Beweise für den fraglichen Satz vielleicht noch am Ersten Wege eröffnen möchten, auf denen man zu der Auflösung der Gleichungen selbst gelangen könnte, eine Ansicht, die auch wir schon längst als völlig richtig anerkannt und zu der unsrigen gemacht haben. Wir verfehlen daher nicht, unsere Leser auf die hier besprochenen neuesten Arbeiten des Herrn Professor Hill über diesen wichtigen Gegenstand ganz besonders hinzuweisen und aufmerksam zu machen. G.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CXXIV. S. 10.)

N°. 6. (Novembre e Dicembre 1858.) Intorno ad alcuni punti della teoria dei minimi quadrati. Nota del Sig. Prof. Felice Casorati. p. 329. — Sopra i Combinanti. Nota del Sig. Prof. Enrico Betti. p. 344. — La theorica dei covarianti, e degli invarianti delle forme binarie e le sue principali applicazioni. Monografia del Prof. Francesco Brioschi (Continuazione). p. 349. — Sulla risultante di due equazioni di 4°. grado. Nota del Cav. F. Faà di Bruno. p. 362. — Construction du centre de courbure de la courbe, lieu des points dont les distances a deux courbes données sont dans un rapport constant. Par A. Mannheim. p. 364. — Sopra due formole di Calcolo differenziale. Nota di Emmanuele Fergola. p. 370.

Rivista bibliografica. Sulle superficie d'eguale attrazione. Articolo del Prof. F. Brioschi. p. 379. — Di una nota del Barone Plana. Casi particolari del moto di liquidi. Articolo del Prof. Angelo Genocchi. p. 388. — Pubblicazioni recenti. p. 397. — Indice generale di tutti gli articoli. p. 399.

Literarischer Bericht
CXXVIII.

Carl Adolph Agardh.

Am 28. Januar 1859 starb Carl Adolph Agardh, Bischof von Carlstad, in einem Alter von 74 Jahren und 5 Tagen, da er am 23. Januar 1785 zu Båstad in Schonen, wo sein Vater als Kaufmann lebte, geboren war. Dass Agardh's Name als Naturforscher auf dem Gebiete der Botanik neben den Namen von Linné und Berzelius glänzt und dass er auf diesem Felde zu den berühmtesten Gelehrten der neueren Zeit gehörte, ist bekannt genug und gehört nicht in den Kreis dieser Zeitschrift. Weniger bekannt aber ist es und verdient eben deshalb um so mehr hier hervorgehoben zu werden, dass Agardh, bei grosser allgemeiner wissenschaftlicher Bildung, namentlich auch ein sehr tüchtiger Mathematiker war, so wie sich denn die Mathematik in Schweden überhaupt unter allen, die überhaupt nur auf wissenschaftliche Bildung Anspruch machen, einer grossen Verbreitung erfreut und von jeher im grössten Ansehen gestanden hat und noch steht. Nachdem Agardh von 1799 an auf der Universität zu Lund studirt hatte, trat er daselbst 1807 als Lehrer der Mathematik auf, kehrte aber bald zu der schon früher lieb gewonnenen Botanik zurück, und gelangte, wie schon gesagt, auf diesem Gebiete zu dem grössten wissenschaftlichen Ruhme. Von 1812 an war er Professor der Botanik und praktischen Oekonomie in Lund und wurde endlich im Jahre 1834, nachdem er schon 1816 die priesterliche Weihe und eine Präbende erhalten hatte, zum Bischof von Carlstad befördert, eine Art und Weise, auf welche Schweden nicht selten seine grossen Gelehrten ehrt und belohnt. Sehr erhebend aber ist es, zu sehen, wie Agardh, nachdem er auf dem Gebiete der Botanik solche Erfolge errungen, sich auch auf

pädagogischem, theologischem und staatswissenschaftlichem Gebiete (durch eine Kritik der Grundlehren der Staatsökonomie) und durch seine Thätigkeit auf mehreren Reichstagen als Abgeordneter seines Stifts namhafte Verdienste erworben hatte, im spätesten Alter als Bischof von Carlstad wieder mit ganzer Seele zu den Studien zurückkehrte, mit denen er seine so ruhmvolle wissenschaftliche Laufbahn begonnen hatte. Denn noch im Jahre 1849 publicirte er die beiden, von tiefen mathematischen Kenntnissen zeugenden Schriften:

> Essai sur la Metaphysique du calcul intégral. Par C. A. Agardh, Evêque de Carlstad. **Etudes de loisir.** Stockholm. 1849.

und

> Apperçu de la méthode des séries pour résoudre les équations numériques. Par C. A. Agardh, Evêque de Carlstad. Stockholm. 1849.

und setzte auf den Titel der ersteren das Motto:

> Haec studia senectutem oblectant, adversis rebus perfugium ac solatium praebent (Cicero pro Archia).

Solche Beispiele erheben und erfreuen das Herz und legen, wenn es dessen überhaupt noch bedürfte, wohl auch Zeugniss ab von dem hohen Werthe mathematischer Studien für die Jugend und für das Alter.

Friede seiner Asche und Ehre seinem Gedächtniss!

Arithmetik.

Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln von Dr. Theodor Wittstein, Lehrer an der Königlichen Generalstabs-Akademie und bei dem Königlichen Cadetten-Corps in Hannover. Hannover. (Hahn.) 1850. 8. 20 Ngr.

Diese Tafeln fünfstelliger Logarithmen sind sehr schön und deutlich gedruckt und nach unserer Ueberzeugung recht gut eingerichtet, ohne von der gewöhnlichen Anordnung sich wesentlich zu unterscheiden. Auch sind wir mit dem Herrn Verfasser darin ganz einverstanden, dass Tafeln, die nicht über die fünfte Stelle hinausgehen, sowohl für eine grosse Anzahl von Rechnungen, als namentlich für die Zwecke des Unterrichts vollständig ausreichen, indem besonders in letzterer Beziehung die siebenstelligen Tafeln

gewiss viel überflüssigen Ballast enthalten. Für die Winkel von 15 zu 15 Minuten im ersten Quadranten sind in Taf. II. auch die natürlichen trigonometrischen Zahlen gegeben, was wir gleichfalls recht zweckmässig finden, da diese Zahlen auch nach unserer Ueberzeugung in vielen Fällen der Praxis vortheilhafte Anwendung finden können, und gar nicht so überflüssig sind, wie man gewöhnlich zu meinen scheint. Taf. IV. enthält die Länge der Kreisbögen; Taf. V. die Gaussischen Logarithmen in einer der Einrichtung der gewöhnlichen Logarithmen-Tafeln conformen Anordnung; Taf. VI. die natürlichen Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis e^6; und ein Anhang enthält eine Tafel der wichtigsten Formeln der Goniometrie, der ebenen und sphärischen Trigonometrie und der trigonometrischen Auflösung der quadratischen und cubischen Gleichungen. Auf dem letzten Blatte sind endlich die Dimensionen des Erdsphäroids zusammengestellt. Wir glauben dieses Büchlein Lehrern zur Beachtung aus Ueberzeugung empfehlen zu dürfen.

Astronomie.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. apost. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl von Littrow, Director der k. k. Sternwarte. Dritter Folge achter Band. Jahrgang 1858. Wien. 1859. 8.

Nachdem wir den siebenten Band dritter Folge dieser überaus verdienstlichen Annalen erst im vorigen Jahre im Liter. Ber. Nr. CXXI. angezeigt haben, wird uns schon wieder die Freude, einen neuen Band zur Anzeige zu bringen, woraus, was wir schon mehrmals rühmend hervorgehoben haben, von Neuem die grosse Regelmässigkeit der Arbeiten der Wiener Sternwarte unter der Leitung ihres verdienten Directors, durch welche dieselbe sich so sehr auszeichnet, erhellet. In den Beobachtungen am Meridiankreise holt der vorliegende Band einen mehrjährigen Rückstand ein, in welchem dieser Theil der verdienstlichen Publicationen der Sternwarte sich befand. Bis 1856. Juni 22. sind die Beobachtungen ganz auf die im vorhergehenden Jahrgange erörterte Weise angeordnet; von dem genannten Tage an erhielt das Instrument eine Ergänzung durch den Apparat für lichte Fäden im dunkeln Felde, welcher im VII. Bande Seite VIII. ff. beschrieben wurde. (M. s. Literar. Ber. Nr. CXXI. S. 13.) Die Fälle, in welchen an diesen lichten Linien beobachtet wurde, sind durch

ein * kenntlich gemacht, das einerseits den die Anzahl der genommenen Fäden bezeichnenden Ziffern, andererseits den Mitteln der Lesungen am Kreise beigesetzt ist. Die auf diese Art beobachteten Durchgangszeiten sind sämmtlich auf den dunklen Mittelfaden reducirt, auf welchen sich die Columne „Mittel der Fäden" bezieht. Die Beobachtungen am Meridiankreise, welche dieser Band enthält, reichen überhaupt vom 15. März 1854 bis 17. December 1856; die Zonenbeobachtungen am Mittagsrohre, welche den Zeitraum vom 1. August 1856 bis 2. October 1856 und die Zonen 9 bis 25 umfassen, wurden ganz auf die im vorigen Jahrgange erörterte Weise fortgeführt. Die Beobachtungen am Meridiankreise besorgte vom 1. August 1856 an Herr Assistent Allé allein, mit den Zonenbeobachtungen war Herr Assistent Oeltzen beauftragt. Die Meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1857 bilden nebst einigen Tafeln zur Reduction der Zonenbeobachtungen den Schluss dieses Bandes.

Schon in unserer oben erwähnten Anzeige des vorhergehenden Bandes brachten wir die für die Meteorologen gewiss sehr wichtige Nachricht, dass durch Se. Excellenz den Herrn Unterrichts-Minister Leo Grafen von Thun, dem die Wissenschaften schon so Vieles verdanken, die Mittel zum Druck der so wichtigen älteren meteorologischen Beobachtungen der Wiener Sternwarte bewilligt worden seien, und dass der Druck derselben nächstens beginnen werde. Diese sehr erfreuliche Nachricht können wir nun dahin ergänzen, dass der Druck dieser Beobachtungen wirklich begonnen hat, und dass die ersten mit 1775 beginnenden Jahrgänge nächstens ausgegeben werden können. Wie wichtig der Dienst ist, welcher hierdurch der Meteorologie geleistet wird, brauchen wir wohl nicht erst aus einander zu setzen, und begleiten daher dieses Unternehmen mit unseren besten Wünschen.

Nautik.

Magnetische Beobachtungen im östlichen Theile des Mittelmeeres, auf Befehl Seiner k. k. Hoheit des Durchlauchtigen Herrn Erzherzogs Ferdinand Max, Obercommandanten der k. k. Marine, ausgeführt im Jahre 1857 von Dr. F. Schaub, Director der k. k. Marine-Sternwarte. Triest. 1858. 4.

Durch die im Jahre 1854 von Herrn Director K. Kreil ausgeführten magnetischen Beobachtungen ist im adriatischen Golfe die magnetische Abweichung (Missweisung des Compasses) dem

Seefahrer mit einer Genauigkeit gegeben, die nichts zu wünschen übrig lässt. Nicht so verhält es sich in den angränzenden Gewässern. Auf einem grossen Theile der Seekarten des östlichen Mittelmeeres sind die Angaben der magnetischen Abweichung, da sie meist auf älteren Beobachtungen beruhen, um mehrere Grade unrichtig. Dies bewog Seine Kaiserl. Hoheit den Durchlauchtigsten Herrn Erzherzog Ferdinand Max, den Director der k. k. Marine-Sternwarte Herrn Professor Dr. Schaub in Triest mit der Ausführung magnetischer Beobachtungen im ganzen östlichen Becken des Mittelmeeres zu beauftragen. Herr Schaub führte diesen ehrenvollen Auftrag in Gemeinschaft mit den Herren Schiffsfähnrich Lobmeyr und Fregattenfähnrich Joly, welche die Zeit- und Breitenbestimmungen übernahmen, im August und September 1857 aus, wobei er die Reise auf S. M. Kriegsdampfer „Curtatone", commandirt vom Herrn Linienschiffs-Lieutenant Baron Moll, machte. Die Beobachtungen erstrecken sich über den südöstlichen Theil des Mittelmeeres zwischen dem 20. und 36. Grade östlicher Länge von Greenwich, und sollen späterhin bis Tunis auf der einen, bis Constantinopel auf der anderen Seite ausgedehnt werden. In der Einleitung giebt der Herr Verfasser das angewandte Verfahren vollständig an und erläutert es in lehrreicher Weise. Die einzelnen Beobachtungsstationen sind: Corfu, Zante, Cerigo, Candia, Rhodus, Adalia, Limassol, Latakia, Beirut, Jaffa, Alexandria, Bombah. Wie wichtig diese Operation für die Nautik sowohl insbesondere, als in allgemein wissenschaftlicher Rücksicht ist, und wie sehr die in der Schrift niedergelegten Resultate verdienen, beachtet und benutzt zu werden, brauchen wir wohl nicht besonders hervorzuheben, und sagen dem Herrn Verfasser im Namen der Wissenschaft unsern wärmsten Dank.

Nautisches Jahrbuch oder vollständige Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1861 zur Bestimmung der Länge, Breite und Zeit zur See nach astronomischen Rechnungen, nebst einer gemeinfasslichen Anleitung, wie die erforderlichen Rechnungen anzustellen sind. Unter amtlicher Aufsicht herausgegeben von Dr. C. Bremiker. Berlin. Reimer. 1859. 8. 15 Sgr.

Wir freuen uns, den neuen Jahrgang dieses nautischen Jahrbuchs, dessen Vortrefflichkeit schon früher mehrfach sowohl im Literar. Ber., als auch im Archiv selbst von uns hervorgehoben worden ist, anzeigen zu können, ohne darüber etwas Weiteres zu sagen, da seine sehr zweckmässige Einrichtung aus den frühe-

ren Jahrgängen bekannt genug ist. Sein beispiellos niedriger Preis empfiehlt das Buch auch anderen Beobachtern, die nicht nautische, sondern allgemeine astronomische Zwecke verfolgen, recht sehr.

Physik.

Lehrbuch der Elektricität von J. Gavarret, Professor der Physik an der medicinischen Facultät zu Paris. Deutsch bearbeitet von Dr. Rudolf Arendt. Erster Theil. Mit 280 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Leipzig. Brockhaus. 1859.

Wenn uns für jetzt auch nur die erste Lieferung dieser sehr wohl gelungenen Uebersetzung des Lehrbuchs der Elektricität von Gavarret vorliegt, so glauben wir doch schon jetzt Lehrer der Physik auf dieselbe aufmerksam machen zu müssen. Die uns vorliegende erste Lieferung ist der Statischen Elektricität; der Theorie der Coulomb'schen Wage und des Condensators in den beiden Noten A. und B.; dem Magnetismus und dem Anfange der Dynamischen Elektricität gewidmet. Jedenfalls hat der Verfasser eine mehr elementare, zugleich der Praxis dienende Darstellung der Lehre von der Elektricität, unter Voraussetzung eines sehr geringen Maasses mathematischer Vorkenntnisse, die überdies hauptsächlich nur in den Noten Anwendung gefunden haben, liefern wollen, weshalb auch alle Instrumente und damit anzustellende Versuche sehr deutlich durch treffliche Holzschnitte erläutert sind, wobei er sich zugleich, was wir als vollkommen zweckmässig anerkennen, auf einfachere Apparate beschränkt hat. Ueberhaupt aber scheint der Verfasser uns in der angegebenen Beziehung seinen Zweck recht gut erreicht zu haben, und das Buch verdient daher gewiss, so weit aus der bis jetzt vorliegenden ersten Abtheilung sich urtheilen lässt, Lehrern zur Beachtung empfohlen zu werden. Die äussere Ausstattung ist in jeder Beziehung vortrefflich.

Meteorologie.

Untersuchungen über den Druck der Luft. Ein Beitrag zur Klimatologie Oberösterreichs. Von P. Augustin Reslhuber, Director der Sternwarte zu Kremsmünster. Linz. 1858.

Wir halten diese Schrift für einen wichtigen Beitrag zur Klimatologie eines der schönsten und merkwürdigsten Theile Deutschlands, und rücksichtlich der Sorgfalt und Umsicht, mit welcher die betreffenden Beobachtungen discutirt und zur Grundlage wichtiger Resultate gemacht worden sind, für äusserst lehrreich, ja für ein Muster für derartige Untersuchungen überhaupt, weshalb wir dieselbe hier etwas ausführlicher zur Anzeige zu bringen uns verpflichtet halten. Eine eingehende Discussion der zahlreichen, auf der Sternwarte zu Kremsmünster angestellten meteorologischen Beobachtungen begann der frühere verdienstvolle Director der Sternwarte, Marian Koller, konnte dieselbe aber, da er inzwischen zu einer höheren Bestimmung als Rath in das k. k. Unterrichts-Ministerium, in welcher hohen Stellung der treffliche Mann der Sternwarte seines Stifts unausgesetzt die regste Theilnahme bewahrt und dieselbe auf jede Weise selbst durch eigene Aufopferungen zu fördern gesucht hat, abberufen wurde, nicht zur Vollendung bringen. Herr P. Augustin Reslhuber hat nun nach jahrelanger Vorbereitung dieser schwierigen und zeitraubenden Untersuchung sich unterzogen, und legt deren Resultate in der oben genannten trefflichen Schrift, die wir mit grossem Interesse gelesen haben, dem Publikum vor.

Die Beobachtungen wurden an verschiedenen Barometern gemacht, vom 1. Mai 1838 bis 1857 an einem Gefäss-Barometer von Eckhardt in Wien, welches noch gegenwärtig im Gebrauch ist. Bei Gelegenheit eines Besuchs der Sternwarte hatte Schumacher*) dieses Barometer mit seinem genau mit dem Haupt-Barometer der Pariser Sternwarte verglichenen Barometer controlirt und seine Correction $= + 0'',036$ Paris $= 0''',432$ Paris gefunden, eine Correction, die bei späteren, von Herrn Director Kreil angestellten Vergleichungen sich als ganz richtig erwiesen hat.

Die einzelnen Abtheilungen, in welche die angestellten Untersuchungen zerfallen, mit deren Angabe wir uns bei der Kürze unserer literarischen Berichte begnügen müssen, sind die folgenden: Bestimmung des stündlichen Ganges der Aenderungen des Luftdruckes. — Bestimmung des mittleren monatlichen und jährlichen Luftdruckes. — Stündliche Aenderung des Luftdruckes in den verschiedenen Jahreszeiten. — Bestimmung des Einflusses

*) Eine sehr interessante Beschreibung dieses Besuchs der Sternwarte in Kremsmünster hat Schumacher in einem der früheren Bände der astronomischen Nachrichten, den ich in diesem Augenblicke jedoch nicht genau zu bezeichnen im Stande bin, gegeben. G.

der Wasserdämpfe der Luft auf den Stand des Barometers. — Druck der trockenen Luft. — Aussergewöhnliche Schwankungen des Luftdruckes. — Mittlere monatliche Extreme. — Barometrische Windrose.

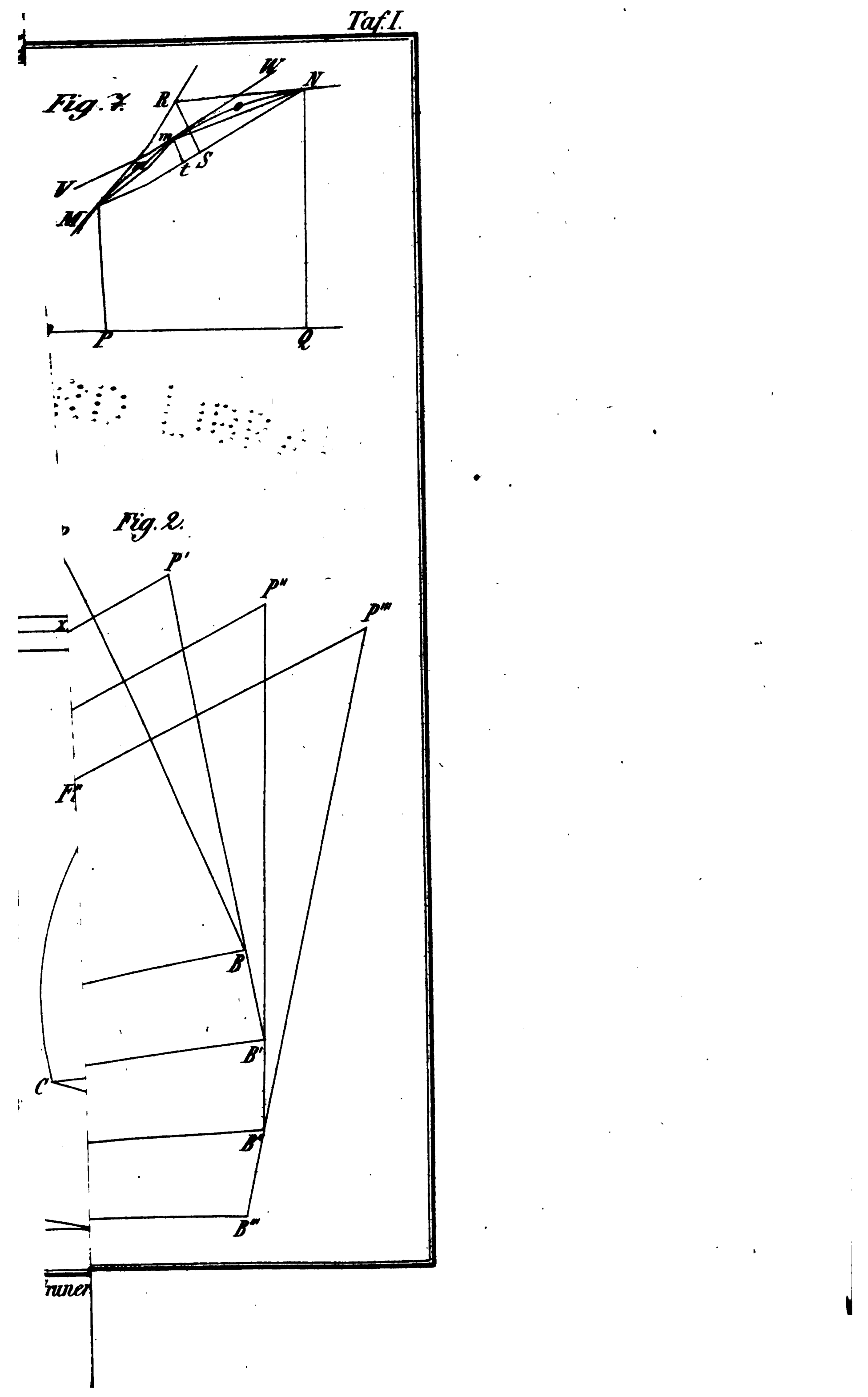
Dass überall die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, insbesondere der Methode der kleinsten Quadrate, Anwendung gefunden haben, und aus den Beobachtungen allgemeine Formeln zur Bestimmung der betreffenden Elemente als Functionen der Zeit durch periodische Reihen abgeleitet worden sind, versteht sich bei einer so streng wissenschaftlich gehaltenen meteorologischen Schrift von selbst, zu deren Vollendung wir dem Herrn Verfasser von Herzen Glück wünschen, indem wir nur noch bemerken, dass es wenige Gegenden geben möchte, deren meteorologische Verhältnisse in Bezug auf Luftdruck auf eine gleich vollständige Weise untersucht sind.

Vermischte Schriften.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CXXVII. S. 8.)

N°. 1. (Gennaro e Febbraro 1859.) Il Determinante di Sylvester, ed i risultante di Eulero. Nota del Prof. Otto Hesse. p. 5. — Composizione di una funzione biquadratica ed a quattro indeterminate. Nota del Prof. B. Tortolini. p. 9. — Sulle linee del terz' ordine a doppia curvatura. Teoremi del Prof. Luigi Cremona. p. 19. — Sui punti focali nelle superficie di secondo grado. Nota dell Dott. Tommaso del Beccaro. p. 30. — Mémoire sur la figure de la terre considerée comme peu differente d'une sphère. Par Mr. Ossian Bonnet. p. 46. — Sur l'abaissement de l'équation modulaire du huitième degré. (Da una lettera del Sig. Hermite al Prof. Brioschi.) p. 59.

Rivista bibliografica. Dei criteri per distinguere i massimi dai minimi valori di una funzione. (Richelot: Bemerkungen zur Theorie der Maxima und Minima. Altona 1858.) Articolo del Prof. F. Brioschi. p. 61. — Pubblicazioni recenti. p. 62. — Prospectus per un 'Opera del Sig. Poggendorff. (Betrifft das biographisch-literarische Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften u. s. w.)


Fig. 7.
R
W
N
m
t
S
V
M
P
Q
Fig. 2.
P'
P''
P'''
x
B
B'
B''
B'''
C

